

文章编号 1004-924X(2025)13-2076-13

共轴球面并联跟踪机构运动学建模与应用

赵 卫^{1,2}, 冯昂昂^{1,2}, 周宇飞^{1,2}, 盛展翊¹, 朱明超^{1*}, 邓永停^{1*}

(1. 中国科学院 长春光学精密机械与物理研究所, 吉林 长春 130033;

2. 中国科学院大学, 北京 100049)

摘要: 为完成大范围、高刚度及快速响应的动态跟踪任务, 研究了一种应用于光学动态跟踪的 3-RRR 共轴球面并联机构。首先, 通过几何向量法对机构进行正、逆运动学分析, 基于向量投影从至多 8 组解析逆解中解出符合构型的唯一逆解, 根据所提出的逆运动学算法在正运动学至多 8 种封闭解中确定与实际构型对应的唯一正解。然后, 结合正逆运动学求解算法、运动奇异性指标和碰撞约束算法, 系统分析了该类共轴球面跟踪机构在无奇异、无碰撞条件下的实际笛卡尔空间与构型空间分布。最后, 基于单位四元数理论构建平台姿态球面插值法, 实现在工作空间内从任意姿态至目标姿态的平滑变换。计算与实验结果表明: 运动学解析正解算法相较于约束迭代算法计算速度提升 94%, 计算误差降至 10^{-14} , 且无初始值选取问题。工作空间求解结果表明: 无运动学奇异与碰撞的机构俯仰角能够达到 $48.42^\circ \sim 138.42^\circ$, 方位角达到 $-180^\circ \sim 180^\circ$ 。在此范围内绕指向轴滚转自由度依旧存在。理论分析与实验均表明, 共轴球面并联跟踪机构具有优异的运动性能, 满足光学动态跟踪任务的需求。

关键词: 并联机构; 动态跟踪; 正逆运动学; 工作空间; 轨迹规划; 共轴球面

中图分类号: TP273; TH691.9 **文献标识码:** A

doi: 10. 37188/OPE. 20253313. 2076

CSTR: 32169. 14. OPE. 20253313. 2076

Kinematic modeling and application of coaxial spherical parallel tracking mechanism

ZHAO Wei^{1,2}, FENG Angang^{1,2}, ZHOU Yufei^{1,2}, SHENG Zhanyi¹, ZHU Mingchao^{1*},
DENG Yongting^{1*}

(1. Changchun Institute of Optics, Fine Mechanics and Physics, Chinese Academy of Sciences,
Changchun 130033, China;

2. University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

* Corresponding author, E-mail: zhumingchao@ciomp. ac. cn; dengyongting@ciomp. ac. cn

Abstract: To address the requirements of dynamic tracking tasks demanding extensive motion range, high stiffness, and rapid response, this study examines a coaxial 3-RRR spherical parallel mechanism for optical dynamic tracking applications. Initially, the mechanism's forward and inverse kinematics are analyzed using a geometric vector method. Vector projection is employed to identify the unique inverse kinematic solution corresponding to the actual configuration from eight analytical candidates. Subsequently, a singular forward kinematic solution is determined from up to eight closed-form solutions by applying the proposed

收稿日期: 2025-05-28; 修订日期: 2025-06-18.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (No. 62173047)

inverse kinematics algorithm. Furthermore, integrating the forward and inverse kinematic algorithms with a motion singularity index and a collision avoidance strategy, the reachable Cartesian and configuration spaces are systematically characterized under singularity-free and collision-free conditions. A unit quaternion-based spherical interpolation method is introduced to guarantee smooth orientation transitions of the moving platform within the workspace. Both computational and experimental results demonstrate that the analytical forward kinematics solution enhances computation speed by 94% compared to conventional constraint-based iterative methods, while reducing numerical error to the order of 10^{-14} and obviating the need for initial value estimates. Workspace analysis reveals that the mechanism achieves a pitch range from 48.42° to 138.42° and a full azimuthal range of -180° to 180° , maintaining the rolling degree of freedom about the pointing axis within this domain. Theoretical and experimental findings confirm that the proposed coaxial spherical parallel tracking mechanism exhibits superior motion performance, fully meeting the demands of optical dynamic tracking applications.

Key words: parallel mechanism; dynamic tracking; forward and inverse kinematics; workspace; trajectory planning; coaxial spherical

1 引言

传统的光电经纬仪跟踪架机械惯性较大,响应速度相对较慢,无法进行连续大仰角运动,存在过顶死角。3-RRR球面并联跟踪机构(Spherical Parallel Mechanism, SPM)能够提供绕定点3个纯旋转自由度的功能,同时多支链增强了动平台承载能力,驱动旋转关节赋予了机构快速跟踪的能力,其独特运动特点已广泛应用于相机定位、医疗康复和稳定平台指向上^[1-5]。然而,SPM机构的3个驱动旋转副呈 120° 分散配置,增加了跟踪架占用的空间,同时缩小了动平台指向空间范围,尤其是绕指向轴旋转自由度的工作空间。而基于SPM机构发展的3-RRR共轴球面并联机构(Coaxial 3-RRR Spherical Parallel Mechanism, CSPM)克服了SPM机构诸如结构尺寸大、工作空间小的问题,应用广泛在空间指向、关节康复、仿人机器人关节模拟中^[6-10]。

针对SPM机构与CSPM机构,众多国内外学者对机构正逆运动学开展了研究。Gosselin等将SPM机构运动学封闭正解归纳为八阶方程^[11-12]。Bai等将SPM闭环运动链归纳为两个四杆球形链,并基于四杆球形链导出关节角度的三角函数方程,通过半图解法求得关节变量,从而分析出所有可能的正向运动学解^[13-14]。通过几何分析法获取机构解析解,其求解精度高,稳定性

强,这对于机构运动学标定以及反馈控制至关重要。Yang等基于旋量理论构建了SPM机构正运动学模型,通过构建三条运动链中被动角与动平台姿态的雅可比矩阵,使用牛顿迭代求解机构正运动学解。虽然迭代法表达式简洁,但对动平台姿态求解精度较低^[15]。对于一般泛化的SPM机构八阶特征方程,依旧需要通过迭代法求解。而有一类退化的SPM机构并不需要复杂的八阶特征方程描述正解,其正解方程已经退化为具有解析解的四阶方程。这为共轴球面机构正解的高精度求解提供了思路^[16-17]。

CSPM机构构型属于存在封闭解的一类SPM机构构型。对于运动学逆解,一些学者依据三条支链的几何特征将CSPM机构运动学逆解归纳为求解三个一元二次方程的解^[18-19]。将方程实根解中正数解作为运动学唯一逆解,这种逆解方法存在部分动平台姿态无逆运动学解的问题。焦文杰等提出基于欧拉角的分步逆运动学解法,通过解耦3个旋转自由度分步求解驱动轴输入角度,最后再叠加为最终角度^[20]。

对于CSPM机构工作空间,常规做法是结合运动学理论与向量之间约束关系进行分析。Bai等通过解耦关节变量与结构参数,建立了处理全局奇异曲面以及可用于求解可达工作空间的方程,将并联机构的定向能力直接与其结构参数相关联^[21]。还有部分学者依据速度雅可比矩阵,定

义奇异条件数用于评估机构的灵巧性与运动空间。由于缺少实际物理结构之间的尺寸约束,存在连杆发生碰撞而奇异条件数依旧满足要求的可能^[21-23]。因此,在机构实际使用之前需要充分分析机构工作空间与运动能力。

本文根据实际应用中快速逆解、求解连续的需求,结合机构几何构型,求解唯一正逆运动学并分析机构的实际工作空间。结合四元数理论,针对 CSPM 机构设计球面姿态动态轨迹规划实现从任意姿态向目标姿态的转变,提出一种基于向量投影的 CSPM 机构快速唯一逆解求解算法;基于唯一逆解与向量分解约束方法的机构唯一正运动学求解算法,实现服从实际物理构型与连续运动特点的正逆运动学唯一求解算法;结合唯一正逆运动学求解算法、奇异性指标以及碰撞约束算法的工作空间求解,综合分析了机构实际笛卡尔空间和构型空间,避免链路碰撞以及运动过程自由度缺失等奇异现象^[24]。实验表明,CSPM 机构用于动态目标跟踪任务具有显著的优势,并可应用于其他光学设备,可拓展性强。

2 运动学分析

2.1 机构建模

CSPM 机构与 SPM 机构具有相似的模型构建方法,同时 CSPM 机构改进了 SPM 机构中存在的部分缺陷,不仅在 3 个姿态方向上实现了解耦,其旋转输入关节位于同一轴线的配置,克服了机构绕指向轴旋转角度受限的问题。如图 1(a)所示,SPM 机构所有旋转关节轴线相交于一点,该点定义为旋转中心,同时为机构原点,动平台围绕旋转中心实现三个自由度的旋转。驱动连杆(弯曲弧度为 α_1)一端与基座相连,其处于初始位置时夹角决定了角度 γ 的大小。连接的关节轴线向量定义为 $\boldsymbol{u}$,另一端与随动连杆(弯曲弧度为 α_2)通过旋转副相连,处于初始位置时夹角 β 为 90° ,连接的关节轴线向量定义为 $\boldsymbol{w}$,共同组成一条支链。支链间沿逆时针方向间隔 120° , $i=1,2,3$,支链与动平台通过旋转副连接。旋转关节轴线向量定义为 $\boldsymbol{v}$,不同 $\boldsymbol{v}$ 之间的夹角为 α_3 。CSPM

机构与 SPM 机构具有相似的结构参数,如图 1(b)所示。所有的关节轴线同样相交于一点,围绕该点同样能够实现 3 个自由度纯转动,此点定义为动平台动坐标系 $\{B\}$ 原点, y 轴与 $\boldsymbol{v}_1$ 向量重合, z 轴作为指向轴垂直于动平台,并符合右手定则。原点世界坐标系 $\{O\}$ 固定在基座中心点,其 xyz 轴与初始时动平台指向相同。与 SPM 机构不同的是 3 个驱动关节轴线向量 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ 与基坐标系 z 轴重合。位于初始位姿时,每条支链中被动连杆位于驱动轴连杆右侧。

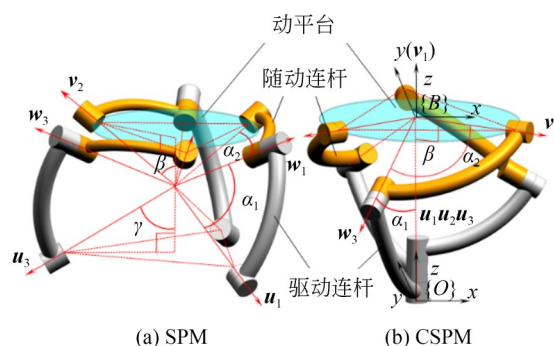


图 1 并联机构的模型参数

Fig. 1 Model parameters of parallel mechanisms

初始姿态下,在固定世界坐标系中,3 个驱动轴旋转轴向量表示为:

$$\boldsymbol{u}_i = [0, 0, -1]^T, \quad (1)$$

式中 $i=1, 2, 3$ 。向量 $\boldsymbol{v}_i$ 为:

$$\boldsymbol{v}_i = [v_{ix} \ v_{iy} \ v_{iz}]^T, \quad (2)$$

驱动连杆与被动连杆连接的旋转关节轴线用向量 $\boldsymbol{w}_i$ 表示,为:

$$\boldsymbol{w}_i = \begin{bmatrix} w_{ix} \\ w_{iy} \\ w_{iz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\eta_i + \theta_i) \sin \alpha_1 \\ \sin(\eta_i + \theta_i) \sin \alpha_1 \\ -\cos \alpha_1 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

其中: θ_i 为驱动轴输入角, $\eta_i = 2(i-1)\pi/3$, $i=1, 2, 3$ 。如图 1(b)所示,动平台姿态由连接动平台的向量 $\boldsymbol{v}_i$ 控制。

CSPM 机构旋转正方向根据初始时随动连杆偏置位置不同,定义逆时针方向为旋转正方向。初始位置时, $\boldsymbol{w}_i$ 如图 2 所示。使用欧拉角 zyx 序列关联向量 $\boldsymbol{v}_i$ 统一描述动平台姿态。

$$\boldsymbol{R}_0(\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z) = \boldsymbol{R}_z(\varphi_z) \boldsymbol{R}_y(\varphi_y) \boldsymbol{R}_x(\varphi_x), \quad (4)$$

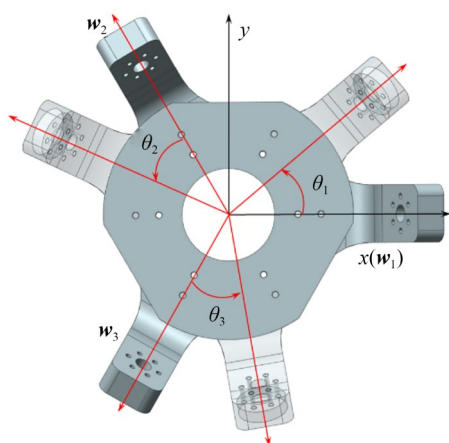


图 2 3-RRR 球面并联跟踪机构旋转方向定义

Fig. 2 Definition of rotation direction of coaxial 3-RRR spherical parallel mechanism

式中:

$$\begin{cases} R_z(\varphi_z) = \begin{bmatrix} \cos \varphi_z & -\sin \varphi_z & 0 \\ \sin \varphi_z & \cos \varphi_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ R_y(\varphi_y) = \begin{bmatrix} \cos \varphi_y & 0 & \sin \varphi_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi_y & 0 & \cos \varphi_y \end{bmatrix} \\ R_x(\varphi_x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_x & -\sin \varphi_x \\ 0 & \sin \varphi_x & \cos \varphi_x \end{bmatrix} \end{cases} \quad (5)$$

若已知动平台姿态 R_0 , 则动平台姿态与 $\mathbf{v}_i$ 的关系为: $R_0(\mathbf{y}) = \mathbf{v}_1$. $\mathbf{v}_2$ 向量为 $\mathbf{v}_1$ 向量围绕

$$\begin{cases} A_i = -\mathbf{v}_{ix} \cos \eta_i \sin \alpha_1 - \mathbf{v}_{iy} \sin \eta_i \sin \alpha_1 - \mathbf{v}_{iz} \cos \alpha_1 - \cos \alpha_2 \\ B_i = \mathbf{v}_{iy} \cos \eta_i \sin \alpha_1 - \mathbf{v}_{ix} \sin \eta_i \sin \alpha_1 \\ C_i = \mathbf{v}_{ix} \cos \eta_i \sin \alpha_1 + \mathbf{v}_{iy} \sin \eta_i \sin \alpha_1 - \mathbf{v}_{iz} \cos \alpha_1 - \cos \alpha_2 \end{cases} \quad (12)$$

每条支链对应一个一元二次方程组,其解对应 $\mathbf{w}_i$ 向量的两组解及装配时的两组构型,因此运动学逆解依据随动连杆的偏置情况至多存在 8 组解。根据实际使用需求,逆运动学解应符合初始配置时连杆偏置构型,运动过程中不存在跨构型状态,同时唯一运动学逆解应满足连续性和非奇异性。为了满足上述条件,本文提出一种基于向量投影方法的唯一逆运动求解算法。逆运动向量投影法如图 3 所示。通过考虑单支链一元二次方程解对应的连杆偏置构型,最终确定 $\mathbf{v}_i$ 与 $\mathbf{w}_{i0}$

$R_0(z)$ 逆时针旋转 120° , $\mathbf{v}_3$ 向量为 $\mathbf{v}_1$ 向量围绕 $R_0(z)$ 顺时针旋转 120° , 向量 $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ 使用 Rodrigues 旋转公式进行计算:

$$\mathbf{v}_1 = [0, 1, 0]^T, \quad (6)$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 \cos \tau_1 + (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{z}) \sin \tau_1 + \mathbf{z}(\mathbf{z} \cdot \mathbf{v}_1)(1 - \cos \tau_1), \quad (7)$$

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 \cos \tau_2 + (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{z}) \sin \tau_2 + \mathbf{z}(\mathbf{z} \cdot \mathbf{v}_1)(1 - \cos \tau_2), \quad (8)$$

其中 $\tau_1 = -120^\circ, \tau_2 = 120^\circ$ 。

2.2 逆运动学分析

机构逆运动学求解过程为:通过输入描述动平台姿态的齐次旋转矩阵,分解 $\mathbf{v}_i$ 向量,再基于向量约束方程求解驱动轴关节角。运动学向量约束条件可描述为:

$$\begin{cases} \mathbf{w}_i \cdot \mathbf{v}_i = \cos \alpha_2, i = 1, 2, 3, \\ \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = \cos \alpha_3, i, j = 1, 2, 3, i \neq j. \\ \|\mathbf{v}_i\| = 1 \end{cases} \quad (9)$$

将式(2)和式(3)代入式(9)中,可得用于描述机构单支链逆运动的一元二次方程:

$$A_i T_i^2 + 2B_i T_i + C_i = 0, i = 1, 2, 3, \quad (10)$$

其中:

$$\begin{cases} T_1 = (-2B + \sqrt{4B^2 - 4AC}) / (2A) \\ T_2 = (-2B - \sqrt{4B^2 - 4AC}) / (2A), \\ T_i = \tan\left(\frac{\theta_i}{2}\right) \end{cases} \quad (11)$$

首先,确定与 $\mathbf{u}_i, \mathbf{w}_i$ 向量所构成平面垂直并经过 $\{O\}$ 原点的平面。本文所研究的 CSPM 机构中,与驱动连杆相关的 $\mathbf{u}_i, \mathbf{w}_i$ 所构成的平面始终垂直于 $\{O\}$ 所在的 xy 平面。再将 $\mathbf{v}_i, \mathbf{w}_i$ 在 xy 平面投影,可得到投影向量:

$$\mathbf{v}_{ixy} = [\mathbf{v}_{ix} \quad \mathbf{v}_{iy} \quad 0]^T, \quad (13)$$

$$\mathbf{w}_{ixy} = [\cos(\eta_i + \theta_i) \sin \alpha_1 \quad \sin(\eta_i + \theta_i) \sin \alpha_1 \quad 0]^T. \quad (14)$$

计算 $\mathbf{v}_{ixy}, \mathbf{w}_{ixy}$ 的叉积,得到:

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{w}_{ixy} \times \mathbf{v}_{ixy} = [0 \quad 0 \quad \cos(\eta_i + \theta_i) \sin \alpha_1 \mathbf{v}_y - \mathbf{v}_x \sin(\eta_i + \theta_i) \sin \alpha_1]^T. \quad (15)$$

提取叉积向量 a_i 中最后一位元素, 得到:

$$b_{ij} = v_y \cos(\eta_i + \theta_i) \sin \alpha_1 - v_x \sin(\eta_i + \theta_i) \sin \alpha_1. \quad (16)$$

下标 i 代表第条 i 支链, j 代表支链中使用式 (11) 求解的不同驱动轴关节角对应的 w_{ij} 。 b_{ij} 的正负决定了连杆不同的偏置状态: 当 $b_{ij} > 0$ 时, 随动连杆置于驱动连杆右侧; 当 $b_{ij} < 0$ 时, 随动连杆置于驱动连杆左侧; 当 $b_{ij} = 0$ 时, 随动连杆处于完全折叠或者展开, 此时机构处于如图 4 所示的奇异位置时, 投影向量 v_{ixy}, w_{ixy} 完全重合。

基于机构初始时的连杆状态, 选择合适的逆解结果。当求解角度中出现 b_{ij} 近似为零时, 应考虑实际机构连续运行状态, 避免出现连杆完全折叠和展开的情况, 如图 4 所示。

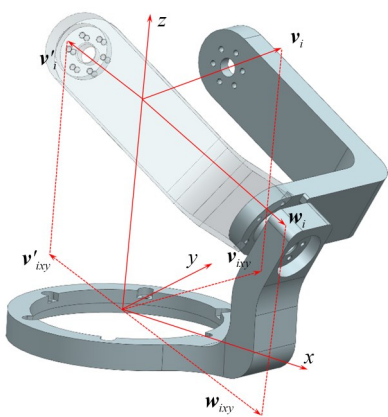


图 3 逆运动学向量投影法

Fig. 3 Inverse kinematics vector projection method

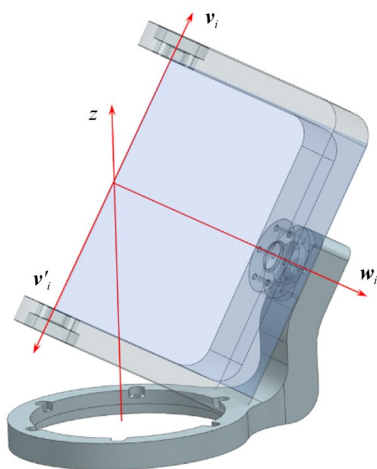


图 4 连杆完全展开与折叠

Fig. 4 Passive linkage fully extended or folded at singularity

2.3 正运动学分析

CSPM 机构正运动学是依据驱动轴关节输入角 θ_i 求取动平台的对应姿态。此时, SPM 机构 (v_i 共面) 具有四阶形式的封闭解析正解, 即:

$$v_1 = \cos \gamma_1 a_1 + \sin \gamma_1 b_1, \quad (17)$$

$$v_2 = \cos \gamma_2 a_2 + \sin \gamma_2 b_2, \quad (18)$$

其中: 向量 a_1, a_2 是 w_1, w_2 叉积向量; b_1 处于 a_1 与 v_1 所在平面, v_1 用 a_1, b_1 表示; b_2 处于 a_2 与 v_2 所在平面, v_2 用 a_2, b_2 表示。

$$\begin{cases} a_1 = a_2 = \frac{w_1 \times w_2}{\|w_1 \times w_2\|_2}, \\ b_1 = w_1 \times a_1 \\ b_2 = w_2 \times a_2 \end{cases} \quad (19)$$

$$v_1^T v_2 = \cos \epsilon, \epsilon = 120^\circ. \quad (20)$$

CSPM 机构正运动学向量之间的几何关系如图 5 所示。

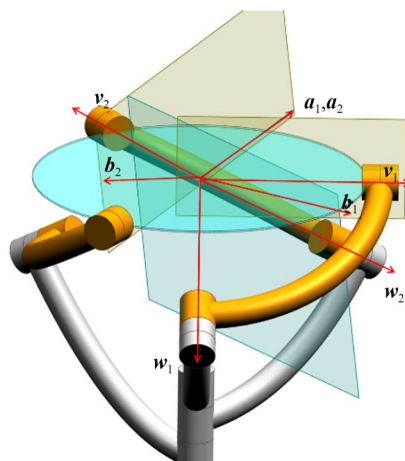


图 5 CSPM 机构正运动学向量关系

Fig. 5 Vector relationship in CSPM forward kinematics

ϵ 为 v_i 之间的夹角。由于 v_i 共面, 因此存在以下约束等式:

$$v_1 + v_2 + v_3 = 0. \quad (21)$$

将式 (21) 两边同时乘以 w_3^T 可得:

$$w_3^T v_1 + w_3^T v_2 = 0. \quad (22)$$

由式 (17)、式 (18) 和式 (20) 可得:

$$M_1 \cos \gamma_2 + N_1 \sin \gamma_2 = G_1, \quad (23)$$

其中:

$$\begin{cases} M_1 = a_1^T a_2 \cos \gamma_1 + b_1^T a_2 \sin \gamma_1 \\ N_1 = a_1^T b_2 \cos \gamma_1 + b_1^T b_2 \sin \gamma_1 \\ G_1 = v_1^T v_2 \end{cases} \quad (24)$$

由式(17)、式(18)和式(22)得:

$$M_2 \cos \gamma_2 + N_2 \sin \gamma_2 = G_2, \quad (25)$$

其中:

$$\begin{cases} M_2 = \mathbf{w}_3^T \mathbf{a}_2 \\ N_2 = \mathbf{w}_3^T \mathbf{b}_2 \\ G_2 = -\mathbf{w}_3^T \mathbf{a}_1 \cos \gamma_1 - \mathbf{w}_3^T \mathbf{b}_1 \sin \gamma_1 \end{cases}. \quad (26)$$

结合式(23)和式(25)消去 $\cos \gamma_2$ 与 $\sin \gamma_2$, 得到:

$$(G_2 E_1 - G_1 E_2)^2 + (G_2 F_1 - G_1 F_2)^2 - (E_1 F_2 - F_1 E_2)^2 = 0. \quad (27)$$

式(24)和式(26)可重新表示为:

$$\begin{cases} M_1 = \cos \gamma_1 \\ N_1 = \xi_1 \sin \gamma_1 \\ G_1 = \xi_2 \\ M_2 = \xi_3 \\ N_2 = \xi_4 \\ G_2 = \xi_5 \cos \gamma_1 + \xi_6 \sin \gamma_1 \end{cases}. \quad (28)$$

代入式(27)中将方程转化为关于 $\tan \gamma_1$ 的函数:

$$\lambda_2 \tan^4 \gamma_1 + \lambda_5 \tan^3 \gamma_1 + \lambda_4 \tan^2 \gamma_1 + \lambda_3 \tan \gamma_1 + \lambda_1, \quad (29)$$

其中:

$$\begin{cases} \lambda_1 = \xi_5^2 - \xi_4^2 + \xi_2^2 \xi_3^2 + \xi_2^2 \xi_4^2 - 2\xi_2 \xi_3 \xi_5 \\ \lambda_2 = \xi_1^2 \xi_6^2 + \xi_2^2 \xi_3^2 + \xi_2^2 \xi_4^2 - \xi_1^2 \xi_3^2 - 2\xi_1 \xi_2 \xi_4 \xi_6 \\ \lambda_3 = 2\xi_5 \xi_6 + 2\xi_1 \xi_3 \xi_4 - 2\xi_2 \xi_3 \xi_6 - 2\xi_1 \xi_2 \xi_4 \xi_5 \\ \lambda_4 = \xi_6^2 - \xi_4^2 - \xi_1^2 \xi_3^2 + 2\xi_2^2 \xi_3^2 + 2\xi_2^2 \xi_4^2 + \xi_1^2 \xi_5^2 \\ \quad - 2\xi_1 \xi_2 \xi_4 \xi_6 - 2\xi_2 \xi_3 \xi_5 \\ \lambda_5 = 2\xi_1^2 \xi_5 \xi_6 + 2\xi_1 \xi_3 \xi_4 - 2\xi_2 \xi_3 \xi_6 - 2\xi_1 \xi_2 \xi_4 \xi_5 \end{cases}. \quad (30)$$

由此得到关于 γ_1 的四阶封闭解。使用四阶方程解析法^[25]求解出 γ_1 后,分别求解关于 γ_1 相关的参数 M_1, N_1, G_1 ,代入式(23)可得:

$$(M_1^2 + N_1^2)E^2 - 2G_1 M_1 E + (G_1^2 - N_1^2) = 0, \quad (31)$$

$$\begin{cases} E = \frac{2G_1 M_1 \pm \sqrt{4G_1^2 M_1^2 - 4(M_1^2 + N_1^2)(G_1^2 - N_1^2)}}{2(M_1^2 + N_1^2)} \\ F = (G_1 - M_1 E) / N_1 \end{cases}, \quad (32)$$

$$\gamma_2 = \arctan 2(F, E). \quad (33)$$

将 γ_2 代入式(18)中求解出 $\mathbf{v}_2$ 后,结合式(21)求解出 $\mathbf{v}_3$,最后将 $\mathbf{v}_i$ 转化为描述动平台姿态的齐

次旋转矩阵。将求解的至多8组运动学正解结果代入逆解算法中,求解出逆解 $\mathbf{w}_i$ 与正解 $\mathbf{w}_i$ 是否相等,再验证逆解所得驱动轴关节角度是否与正运动学输入角度相同。最终,得到符合实际构型的唯一正运动学解。

3 工作空间分析

3.1 机构雅可比与碰撞检测

在机构实际运动之前需要充分考虑分析运动学奇异性,必须使机构远离奇异和接近奇异的位置,防止意外的发生或者控制效果达不到。机构的奇异性可以分为速度奇异和碰撞奇异。

CSPM 机构雅可比描述了特定驱动角度下输入角速度和输出角速度之间的关系,对式(9)两边求导可得:

$$\dot{\mathbf{w}}_i \cdot \mathbf{v}_i + \mathbf{w}_i \cdot \dot{\mathbf{v}}_i = 0, \quad (34)$$

式中:

$$\dot{\mathbf{v}}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_i, \quad (35)$$

$$\dot{\mathbf{w}}_i = \dot{\theta}_i \cdot (\mathbf{u}_i \times \mathbf{w}_i), \quad (36)$$

式中: $\boldsymbol{\omega}$ 表示动平台角速度, $\dot{\theta}$ 表示在特定输入角度下驱动角速度,化简后得:

$$J_1 \boldsymbol{\omega} + J_2 \dot{\theta} = 0, \quad (37)$$

式中:

$$\begin{cases} J_1 = J_1(\mathbf{v}_i, \theta) = \begin{bmatrix} (\mathbf{w}_1 \times \mathbf{v}_1)^T \\ (\mathbf{w}_2 \times \mathbf{v}_2)^T \\ (\mathbf{w}_3 \times \mathbf{v}_3)^T \end{bmatrix} \\ J_2 = \text{diag}(\mathbf{w}_1 \times \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v}_1, \mathbf{w}_2 \times \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_3 \times \mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{v}_3) \end{cases}. \quad (38)$$

最终得到:

$$\dot{\theta} = \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}. \quad (39)$$

雅可比矩阵 $\mathbf{J}$ 可以表示为:

$$\mathbf{J} = -J_2^{-1} J_1. \quad (40)$$

定义 $\det(\bullet)$ 为矩阵行列式。当 $\det(J_1) = 0$ 或者 $\det(J_2) = 0$ 或者两者皆为零时,机构发生奇异。当 $\det(J_2) = 0$ 时,动平台位于笛卡尔工作空间的边界上,在该位置上失去一个或多个自由度,当 CSPM 机构的任意一条支链完全折叠或展开时发生上述奇异。在分析运动学奇异时,使用条件指数 $\zeta(J) \in (0, 1)$ 来评估姿态奇异

性程度:

$$\zeta(J) = \frac{1}{\|J\| \|J^{-1}\|}, \quad (41)$$

式中:

$$\|J\| = \sqrt{\text{tr}(J^T \frac{1}{3} J)}. \quad (42)$$

机构雅可比矩阵是基于向量之间约束关系获得的,这无法表达机构因为实际物理尺寸所造成的机构连杆干涉问题,因此,在分析工作空间时还需考虑物理碰撞情形。

CSPM 结构碰撞分为单支链连杆碰撞和支链与支链碰撞,分别如图 6(a)和 6(b)所示。在一条支链中连杆之间碰撞,通过计算 v_i 和 w_i 构成的平面与 v_i 和 u_i 构成的平面夹角来衡量,当夹角过小时,实际物理模型中支链中连杆已经发生了碰撞。

v_i 和 w_i 构成的平面法向量可以表示为:

$$v_i \times w_i = \begin{bmatrix} v_{iy}w_{iz} - w_{iy}v_{iz} \\ w_{ix}v_{iz} - v_{ix}w_{iz} \\ v_{ix}w_{iy} - w_{ix}v_{iy} \end{bmatrix}. \quad (43)$$

w_i 和 u_i 构成的平面法向量可以表示为:

$$w_i \times u_i = \begin{bmatrix} w_{iy}u_{iz} - w_{iz}u_{iy} \\ w_{ix}u_{iz} - w_{iz}u_{ix} \\ w_{ix}u_{iy} - w_{iy}u_{ix} \end{bmatrix}. \quad (44)$$

两平面构成的夹角可以表示为:

$$\phi_i = \pi - \arccos\left(\frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}\right), \quad (45)$$

式中:

$$\begin{cases} A_1 = v_{iy}w_{iz} - w_{iy}v_{iz} \\ B_1 = w_{ix}v_{iz} - v_{ix}w_{iz} \\ C_1 = v_{ix}w_{iy} - w_{ix}v_{iy} \\ A_2 = w_{iy}u_{iz} - w_{iz}u_{iy} \\ B_2 = w_{ix}u_{iz} - w_{iz}u_{ix} \\ C_2 = w_{ix}u_{iy} - w_{iy}u_{ix} \end{cases}. \quad (46)$$

通过 3 条支链中驱动连杆与被动连杆夹角 ϕ_i 约束机构运动范围。由于 CSPM 机构驱动关节向量的共轴特性,三条支链驱动连杆也存在碰撞的可能。当发生驱动连杆间夹角过小甚至于后一驱动连杆运动超过前一驱动连杆,存在缺乏实际物理模型的关联,从而发生碰撞甚至越位,因此,通过计算驱动轴运动夹角来判断此类碰撞奇

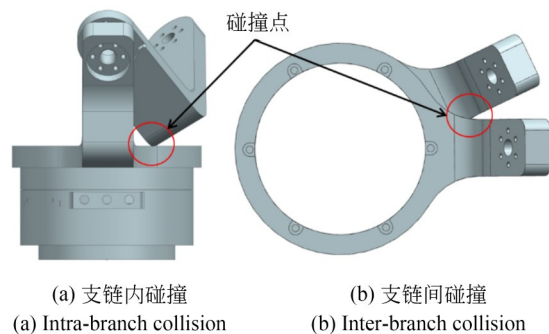


图 6 两种碰撞类型

Fig. 6 Two types of collisions

异的的发生。

3.2 实际笛卡尔空间与构型空间

通过逆运动学算法求取 CSPM 机构无奇异,无链路碰撞的笛卡尔空间,求解流程如图 7 所示。

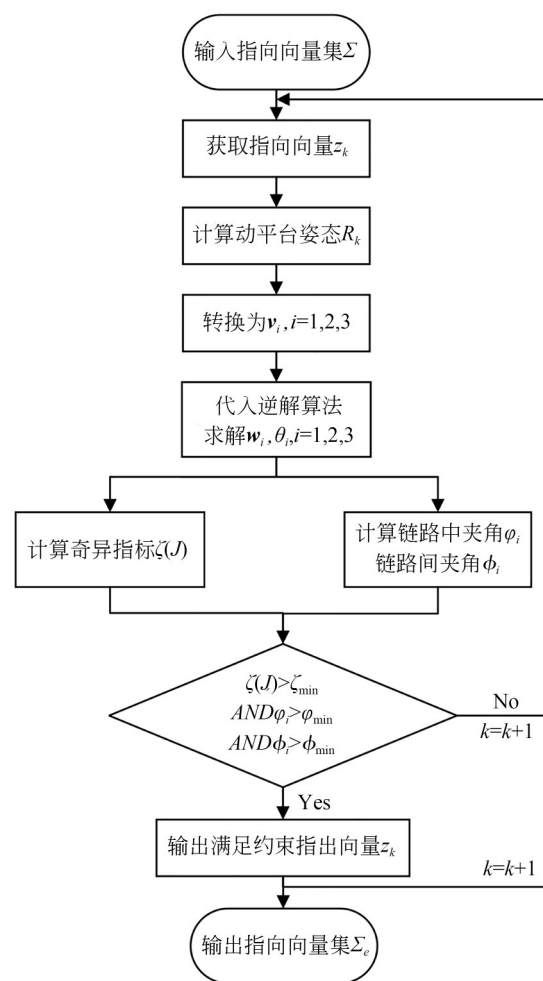


图 7 笛卡尔空间求解流程

Fig. 7 Flowchart of cartesian space solution

基于蒙特卡洛法生成上半球形区域指向向量集 Σ :

$$z_k = [a, b, c], |z_k| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 1, z_k \in \Sigma, \quad (47)$$

其中 z_k 表示动平台指向向量。使用下述笛卡尔空间求解算法,分析确定最终 CSPM 机构的笛卡尔空间。依据连杆物理尺寸(直径、长度)设置所需施加的碰撞约束夹角为:支链间夹角最小值 $\phi_{\min} = 20^\circ$, 支链内连杆夹角最小值 $\varphi_{\min} = 40^\circ$ 。通过输入驱动轴关节角求取无奇异,无连杆碰撞,无驱动轴越位的所有驱动轴输入角度的集合完成对 CSPM 机构构型的空间分析,求解流程如图 8 所示。基于正运动学与碰撞约束的机构构型工作空间求解结果如图 9 所示。CSPM 可在俯仰 $48.42^\circ \sim 138.42^\circ$, 方位角 $-180^\circ \sim 180^\circ$ 的工作空间内围绕指向轴无限滚转。

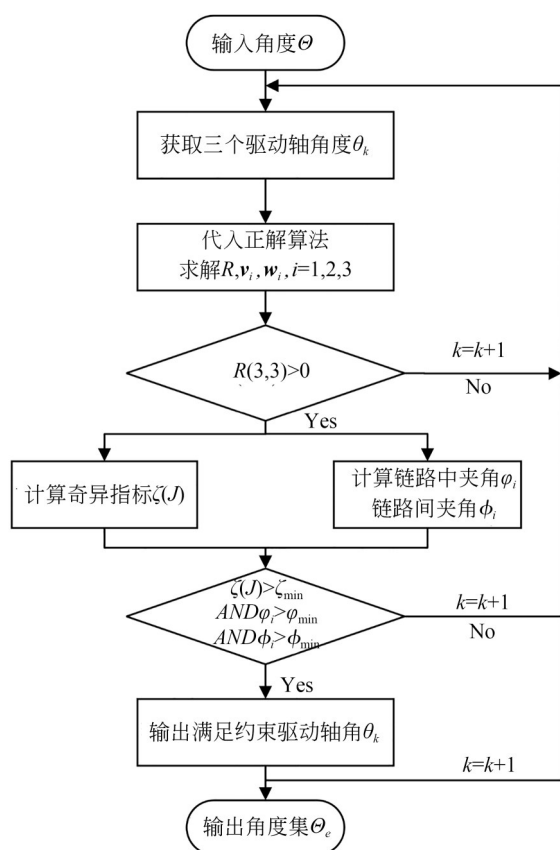


图 8 构型空间求解流程

Fig. 8 Flowchart of configuration space solution

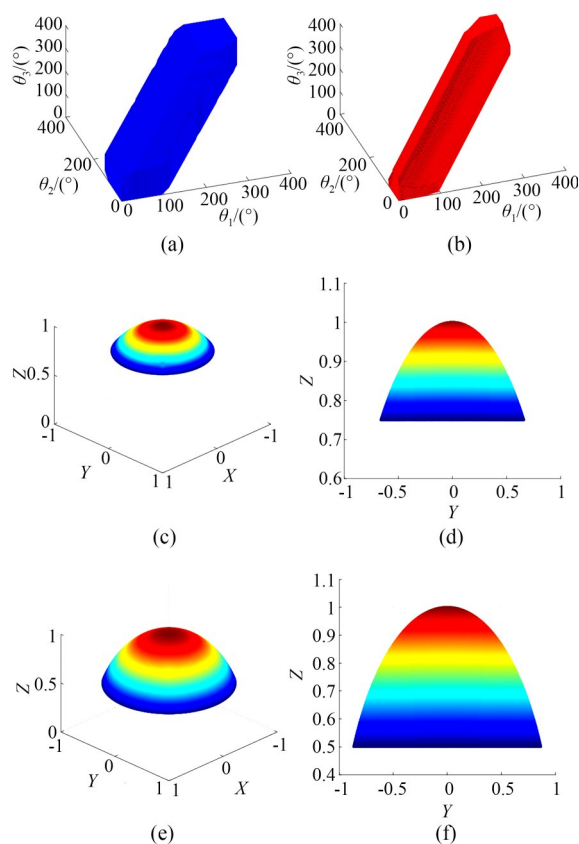


图 9 构型空间与笛卡尔空间。(a)无连杆碰撞约束构型空间;(b)有连杆碰撞约束实际构型空间;(c)(d)为有连杆碰撞约束机构实际笛卡尔空间;(e)(f)为无连杆碰撞约束笛卡尔空间,指向范围可达俯仰 $30^\circ \sim 150^\circ$, 方位 $-180^\circ \sim 180^\circ$

Fig. 9 Configuration space and cartesian space. (a) The configuration space without linkage collision constraints; (b) The actual configuration space with linkage collision constraints; (c) and (d) The actual Cartesian space of the mechanism with linkage collision constraints; (e) and (f) The Cartesian spaces. The range of motion without linkage collision constraints for pitch from 30° to 150° and azimuth from -180° to 180°

4 基于单位四元数的轨迹规划

在姿态变换过程中使用单位四元数描述动平台姿态变化,结合运动学逆解以及速度规划方法,实现动平台轨迹的平滑变化。动态跟踪时,若需要由一个姿态向另一个姿态大角度转变,仅解算起始姿态与目标姿态对应的驱动关节角,直

接从关节空间规划轨迹,则无法避免动平台姿态变换过程中连杆发生碰撞的可能。因此依据前述求解的笛卡尔工作空间,在空间中基于球面插值规划轨迹。

定义单位四元数:

$$q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k, \quad (48)$$

单位四元数与 CSPM 姿态齐次旋转矩阵 $R(x, y, z)$ 之间变换关系,单位四元数转换到齐次旋转矩阵,得到:

$$R = \begin{bmatrix} 1 - 2q_2^2 - 2q_3^2 & 2(q_1q_2 - q_0q_3) & 2(q_0q_2 + q_1q_3) \\ 2(q_1q_2 + q_0q_3) & 1 - 2q_1^2 - 2q_3^2 & 2(q_2q_3 - q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 - q_0q_2) & 2(q_0q_1 + q_2q_3) & 1 - 2q_1^2 - 2q_2^2 \end{bmatrix}. \quad (49)$$

齐次旋转矩阵转换为单位四元数,得到:

$$\begin{cases} q_0 = \frac{\sqrt{x_1 + y_2 + z_3 + 1}}{2} \\ q_1 = \frac{\sqrt{x_1 - y_2 - z_3 + 1}}{2} \\ q_2 = \frac{\sqrt{-x_1 + y_2 - z_3 + 1}}{2} \\ q_3 = \frac{\sqrt{-x_1 - y_2 + z_3 + 1}}{2} \end{cases}. \quad (50)$$

四元数符号如下:

$$\begin{cases} \text{sign}(q_1) = \text{sign}(q_0)\text{sign}(z_2 - y_3) \\ \text{sign}(q_2) = \text{sign}(q_0)\text{sign}(x_3 - z_1) \\ \text{sign}(q_3) = \text{sign}(q_0)\text{sign}(y_1 - x_2) \end{cases}. \quad (51)$$

已知初始姿态齐次旋转矩阵 R_s , 与目标姿态齐次旋转矩阵 R_e 。使用式(49)~式(51)将姿态齐次旋转矩阵转化为初始姿态四元数 q_s , 目标姿态四元数 q_e , 规划的球面轨迹函数为:

$$r(t) = \alpha(t)q_s + \beta(t)q_e, \quad (52)$$

$$\theta = \arccos(q_s \cdot q_e). \quad (53)$$

由式(52)和式(53)可得:

$$\alpha(t) = \frac{\sin(\theta - \theta(t))}{\sin \theta}, \beta(t) = \frac{\sin(\theta(t))}{\sin \theta}. \quad (54)$$

采用上述球面插值法结合加减速速度规划,避免启动与结束阶段速度波动过快造成机构抖动。

5 实 验

5.1 正逆运动学验证

为了验证正逆运动学求解结果的正确性与求解精度,将正运动学解析法与数值迭代方法求解结果分别代入逆解算法中进行比较。机构参数如下: $\alpha_1 = \pi/3$; $\alpha_2 = \pi/2$; $\alpha_3 = 2\pi/3$ 。机构的三维模型如图 10(a) 所示。实验机构结构如图 10(b) 所示,三台伺服电机同轴垂直排列,通过驱动器控制伺服电机运动实现姿态控制。

设置驱动轴旋转关节角 $\theta_1 = -15^\circ$, $\theta_2 = 10^\circ$, $\theta_3 = -20^\circ$ 。由 Rodrigues 旋转公式获得 w_i 向量的当前值:

$$w_1 = \begin{bmatrix} 0.8365 \\ -0.2241 \\ -0.5000 \end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix} -0.5567 \\ 0.6634 \\ -0.5000 \end{bmatrix}, \quad (55)$$

$$w_3 = \begin{bmatrix} -0.6634 \\ -0.5567 \\ -0.5000 \end{bmatrix}.$$

依据向量之间的约束条件获得含约束非线性方程组:

$$\begin{cases} 0.8365v_{1x} - 0.2241v_{1y} - 0.5000v_{1z} = 0 \\ -0.5567v_{2x} + 0.6634v_{2y} - 0.5000v_{2z} = 0 \\ -0.6634v_{3x} - 0.5567v_{3y} - 0.5000v_{3z} = 0 \\ v_{1x}v_{2x} + v_{1y}v_{2y} + v_{1z}v_{2z} + 0.5 = 0 \\ v_{1x}v_{3x} + v_{1y}v_{3y} + v_{1z}v_{3z} + 0.5 = 0 \\ v_{2x}v_{3x} + v_{2y}v_{3y} + v_{2z}v_{3z} + 0.5 = 0 \\ v_{1x}^2 + v_{1y}^2 + v_{1z}^2 - 1 = 0 \\ v_{2x}^2 + v_{2y}^2 + v_{2z}^2 - 1 = 0 \\ v_{3x}^2 + v_{3y}^2 + v_{3z}^2 - 1 = 0 \end{cases}. \quad (56)$$

迭代初始值的选取对收敛结果偏向的影响较大,依据本文所提出的设计构型设置 v_i 初值向量:

$$\begin{bmatrix} v_{1x} & v_{1y} & v_{1z} \\ v_{2x} & v_{2y} & v_{2z} \\ v_{3x} & v_{3y} & v_{3z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (57)$$

数值迭代算法基于非线性方程组求解工具箱,采用 Levenberg-Marquardt 算法,设置收敛容差 10^{-12} ,其他参数默认,求解得到:

$$R = \begin{bmatrix} 0.8877 & 0.0834 & 0.4529 \\ -0.2025 & 0.9540 & 0.2212 \\ -0.4136 & -0.2881 & 0.8637 \end{bmatrix}, \quad (58)$$

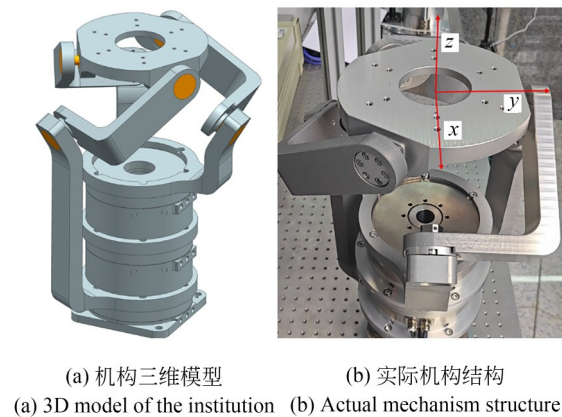


图 10 机构实际模型

Fig. 10 Actual mechanism model

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= \begin{bmatrix} 0.0834 \\ 0.9540 \\ -0.2881 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} -0.8105 \\ -0.3016 \\ 0.5022 \end{bmatrix}, \\ \boldsymbol{v}_3 &= \begin{bmatrix} 0.7205 \\ -0.6554 \\ -0.2263 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (59)$$

将数值迭代法求解的正运动学解代入逆运动学求解算法中,验证正运动学的求解精度。数值迭代法的逆解求解结果 $\theta_1 = -15.0000^\circ$, $\theta_2 = 10.0027^\circ$, $\theta_3 = -19.1730^\circ$ 。将相同驱动轴关节

角代入正解解析法中,求得:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= \begin{bmatrix} 0.0898 \\ 0.9562 \\ -0.2784 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} -0.8101 \\ -0.3001 \\ 0.5037 \end{bmatrix}, \\ \boldsymbol{v}_3 &= \begin{bmatrix} 0.7203 \\ -0.6561 \\ -0.2252 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (60)$$

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} 0.8836 & 0.0898 & 0.4596 \\ -0.2055 & 0.9562 & 0.2082 \\ -0.4208 & -0.2784 & 0.8634 \end{bmatrix}. \quad (61)$$

将正运动学解析算法的求解结果代入逆运动学求解算法中,得到: $\theta_1 = -15.0000^\circ$, $\theta_2 = 10.0000^\circ$, $\theta_3 = -20.0000^\circ$ 。这里给出 5 组随机驱动关节角度使用正解求解后代入逆解中反算后的角度,比较迭代正解与解析正解的求解精度,结果如表 1 所示。为比较两种算法的计算速度,在相同的计算机硬件与软件环境下进行了多次计算并统计平均计算时间。实验所用计算机配备 AMD Ryzen 7 8845H 处理器,主频为 3.80 GHz。计算结果表明,数值迭代法的平均计算时间为 0.033 48 s,解析法的平均计算时间为 0.002 4 s。相较于使用数值迭代法,解析法的计算速度提升 94%,计算精度高,稳定性强。

表 1 运动学正解求解精度

Tab. 1 Accuracy of forward kinematic solution

驱动关节角/(°)	数值迭代法	解析法
[15, -10, 20]	[15.000 0, -9.998 7, 19.901 1]	[15.000 0, -10.000 0, 20.000 0]
[45, 25, 10]	[45.000 0, 25.000 2, 10.118 2]	[45.000 0, 25.000 0, 10.000 0]
[25, 15, 30]	[25, 15.002 3, -29.667 7]	[25.000 0, 15.000 0, 30.000 0]
[13, 14, 0]	[13, 14.001 1, 0.384 4]	[13.000 0, 14.000 0, 1.137e-13]
[10, 20, 40]	[10.000 0, 20.000 0, 40.412 7]	[10.000 0, 20.000 0, 40.000 0]
平均误差	3.2×10^{-3}	6.3314×10^{-14}

5.2 轨迹规划验证

定义起始姿态与目标姿态,在笛卡尔空间上半球面规划指向轴运动轨迹。动平台姿态轨迹如图 11 所示。实验验证时限制较小的速度与加速度约束,方便结果观察。

初始姿态如下:

$$\boldsymbol{R}_s = \boldsymbol{R}_z(15^\circ) \boldsymbol{R}_y(25^\circ) \boldsymbol{R}_x(15^\circ). \quad (62)$$

目标姿态如下:

$$\boldsymbol{R}_e = \boldsymbol{R}_z(90^\circ) \boldsymbol{R}_y(-25^\circ) \boldsymbol{R}_x(-15^\circ). \quad (63)$$

转化为四元数:

$$\boldsymbol{q}_s = [0.9634 \quad 0.0983 \quad 0.2294 \quad 0.0983], \quad (64)$$

$$\boldsymbol{q}_e = [0.7044 \quad 0.0616 \quad -0.2418 \quad 0.6645]. \quad (65)$$

根据笛卡尔空间规划结果再实时执行逆解程序从而获得关节运动控制律。由轨迹实验可得:姿态变换全过程经历 2.4 s,完整运动轨迹如图 11

所示,每幅间隔 0.3 s。在启动与结束阶段无抖动,运动平滑,且全过程无碰撞。运动过程中关节空间角度与角速度变化如图 12 和图 13 所示。

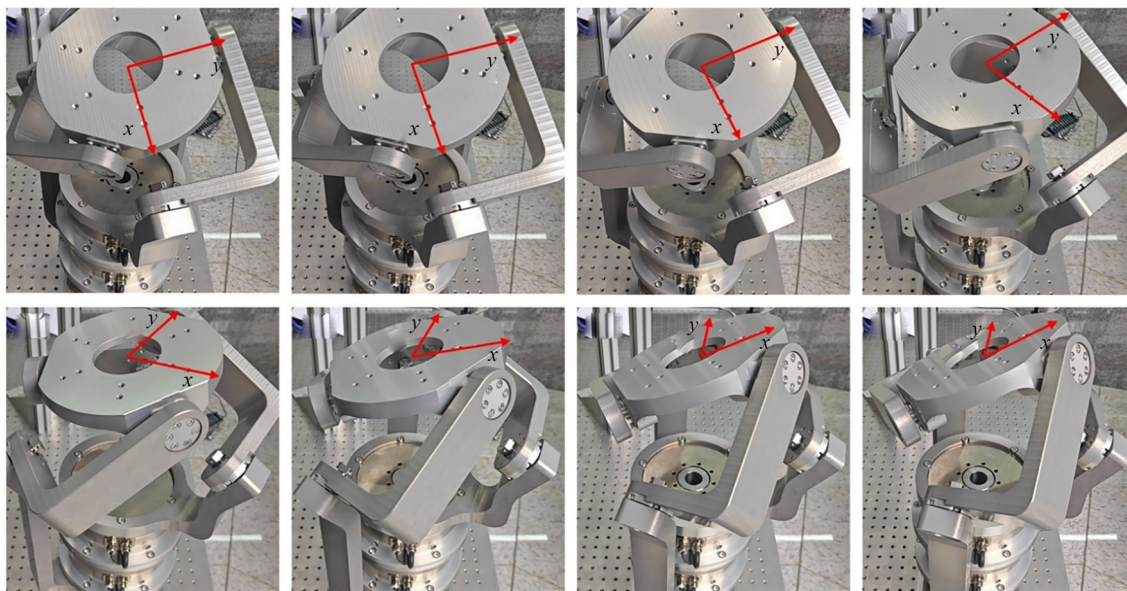


图 11 动平台姿态变换轨迹规划

Fig. 11 Orientation trajectory planning of moving platform

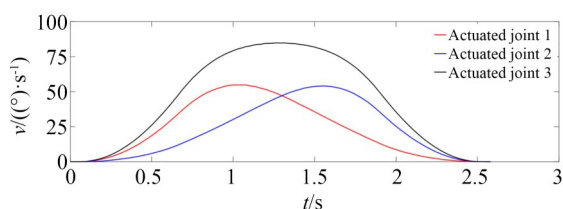


图 12 驱动轴角速度曲线

Fig. 12 Driving axes angular velocity

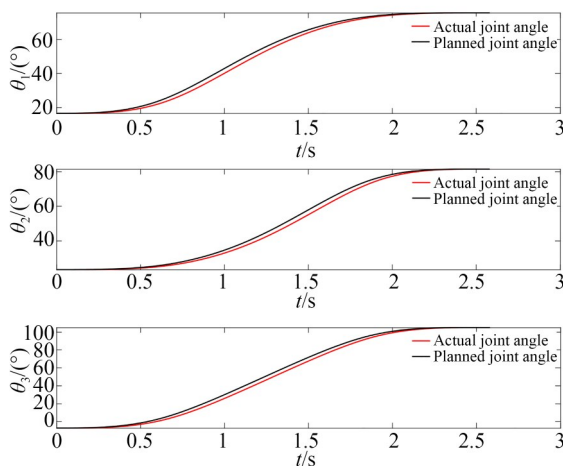


图 13 驱动轴角度随时间的变化曲线

Fig. 13 Variation of actuated joint angle with time

6 结 论

本文根据动态光学跟踪任务对机构刚高度、大范围、快速响应的需求,引入新型共轴球面并联跟踪机构用于光学跟踪任务。提出并验证了向量投影法求解机构唯一逆运动学解的准确性。依据与动平台连接轴向量共面特性,分析封闭解析解并根据所提出逆解算法获取唯一正解。唯一正运动学算法相较于迭代算法的计算速度提高 94%,计算误差可降至 10^{-14} 。结合唯一正逆运动学算法,运动学奇异指标和碰撞约束算法分析了适用于实际跟踪控制的无连杆碰撞、无奇异构型工作空间,其指向轴俯仰角可达 $48.42^\circ \sim 138.42^\circ$,方位角可达 $-180^\circ \sim 180^\circ$,在此范围内绕指向轴无限滚转的特性依旧存在。姿态变换实验验证了基于单位四元数球面插值轨迹规划在动平台姿态实时快速变换中的应用,避免了直接从关节空间规划运动导致的动平台指向未知以及连杆碰撞发生。未来可结合运动学与动力学优化机构构型,以及三维位移平台实现动平台六维全向运动,增大视

角,适应更加复杂的应用场景。

作者贡献声明:

赵卫:方法提出,论文构思和撰写;

冯昂昂:实验数据分析;

周宇飞:实验设计及数据整理;

盛展翊:实验指导;

朱明超,邓永停:论文指导与审核。

参考文献:

- [1] DJENNANE M, CHEHAIDIA S E, YAKOUB C, *et al.* Design, analysis, and implementation of a 3-DOF spherical parallel manipulator[J]. *IEEE Access*, 2024, 12: 52837-52850.
- [2] SAAFI H, LARIBI M A, ZEGHLOUL S. Optimal torque distribution for a redundant 3-RRR spherical parallel manipulator used as a haptic medical device[J]. *Robotics and Autonomous Systems*, 2017, 89: 40-50.
- [3] TAUNYAZOV T, RUBAGOTTI M, SHIN-TEMIROV A. Constrained orientation control of a spherical parallel manipulator *via* online convex optimization[J]. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 2018, 23(1): 252-261.
- [4] 周昌春, 葛德俊. 三自由度冗余驱动飞行模拟器设计及分析[J]. *机械科学与技术*, 2017, 36(9): 1458-1463.
ZHOU CH CH, GE D J. Designing and analyzing kinematics of 3-DOF redundant-actuation flight simulator[J]. *Mechanical Science and Technology for Aerospace Engineering*, 2017, 36(9): 1458-1463. (in Chinese)
- [5] SHI S Y, WANG F X, ZHOU Y L. Configuration and parameter optimization design of a novel RBR-2RRR spherical hybrid bionic shoulder joint[J]. *Machines*, 2024, 12(10): 683.
- [6] WU J H, WAN G F, LIANG J. Design and evaluation of a symmetric amplification mechanism based anthropomorphic shoulder[J]. *Bioinspiration & Biomimetics*, 2024, 19(4): 046017.
- [7] WU G L, BAI S P. Design and kinematic analysis of a 3-RRR spherical parallel manipulator reconfigured with four-bar linkages[J]. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, 2019, 56: 55-65.
- [8] ASY K M, ZAKY A B, EL-HUSSIENY H, *et al.* Conceptual design and kinematic analysis of hybrid parallel robot for accurate position and orientation [C]. 2023 62nd Annual Conference of the Society of Instrument and Control Engineers (SICE). September 6-9, 2023, Tsu, Japan. IEEE, 2023: 558-563.
- [9] ZHANG W X, WANG Z, MA K, *et al.* State of the art in movement around a remote point: a review of remote center of motion in robotics[J]. *Frontiers of Mechanical Engineering*, 2024, 19(2): 14.
- [10] LAHDIRI C, SAAFI H, MLIKA A, *et al.* Optimal design of a new redundant spherical parallel manipulator with an unlimited self-rotation capability [J]. *Robotica*, 2025, 43(1): 300-315.
- [11] GOSSELIN C M, SEFRIQUI J, RICHARD M J. On the direct kinematics of spherical three-degree-of-freedom parallel manipulators of general architecture [J]. *Journal of Mechanical Design*, 1994, 116(2): 594-598.
- [12] HUANG Z, YAO Y L. A new closed-form kinematics of the generalized 3-DOF spherical parallel manipulator [J]. *Robotica*, 1999, 17(5): 475-485.
- [13] BAI S P, HANSEN M R, ANGELES J. A robust forward-displacement analysis of spherical parallel robots[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2009, 44(12): 2204-2216.
- [14] BAI S P. Algebraic coupler curve of spherical four-bar linkages and its applications [J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2021, 158: 104218.
- [15] 杨加伦, 高峰, 戚开诚, 等. 正交三自由度球面并联机构的位置正反解新方法[J]. *机械设计与研究*, 2008, 24(3): 30-32, 42.
YANG J L, GAO F, QI K CH, *et al.* A new method of the forward and inverse position analysis of the orthogonal 3-DOF spherical parallel mechanism [J]. *Machine Design & Research*, 2008, 24(3): 30-32, 42. (in Chinese)
- [16] LI W, ZHANG S, WANG B Y, *et al.* Forward kinematics of three classes of 3-RRR spherical parallel mechanisms admitting closed-form solutions [J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2024, 201: 105751.
- [17] KONG X W, GOSSELIN C M. A formula that produces a unique solution to the forward displacement

- ment analysis of a quadratic spherical parallel manipulator: the agile eye[J]. *Journal of Mechanisms and Robotics*, 2010, 2(4): 044501.
- [18] TURSUNBEK I, SHINTEMIROV A. Infinite torsional motion generation of a spherical parallel manipulator with coaxial input axes [C]. 2020 *IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics (AIM)*. July 6-9, 2020. Boston, MA, USA. IEEE, 2020: 1780-1785.
- [19] MARRUGO D, VITOLA A, VILLA J L, *et al.* Kinematic and workspace analysis of spherical 3RRR coaxial parallel robot based on screw theory [C]. 2020 *IX International Congress of Mechatronics Engineering and Automation (CIIMA)*. November 4-6, 2020, Cartagena, Colombia. IEEE, 2020: 1-6.
- [20] JIAO W J, JI S X, HAO H M, *et al.* New method and application of inverse kinematic solution for spherical wrist rehabilitation mechanism [J]. *Journal of Zhejiang University (Engineering Science)*, 2023, 57(7).
- [21] BAI S P, HANSEN M R, ANDERSEN T O. Modelling of a special class of spherical parallel manipulators with Euler parameters [J]. *Robotica*, 2009, 27(2): 161-170.
- [22] BAI S P. Optimum design of spherical parallel manipulators for a prescribed workspace [J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2010, 45 (2): 200-211.
- [23] SHINTEMIROV A, NIYETKALIYEV A, RUBAGOTTI M. Numerical optimal control of a spherical parallel manipulator based on unique kinematic solutions [J]. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 2016, 21(1): 98-109.
- [24] TURSUNBEK I, SHINTEMIROV A. Infinite rotational motion generation and analysis of a spherical parallel manipulator with coaxial input axes [J]. *Mechatronics*, 2021, 78: 102625.
- [25] CHÁVEZ-PICHARDO M, MARTÍNEZ-CRUZ M A, TREJO-MARTÍNEZ A, *et al.* A complete review of the general quartic equation with real coefficients and multiple roots [J]. *Mathematics*, 2022, 10(14): 2377.

作者简介:



赵 卫(1999—),男,安徽合肥人,硕士研究生,主要从事机器人运动学与标定技术的研究。E-mail: zhaowei232@mails.ucas.ac.cn

通讯作者:



邓永停(1987—),男,山东潍坊人,研究员,博士生导师,主要从事望远镜精密跟踪控制技术的研发及电子学设计。E-mail: dengyongting@ciomp.ac.cn

通讯作者:



朱明超(1981—),男,吉林长春人,博士,研究员,博士生导师,主要从事空间智能机器人,机器人运动控制的研究。E-mail: zhumingchao@ciomp.ac.cn