

文章编号 1004-924X(2026)03-0438-12

基于同轴球面并联机构的望远镜跟踪架

宗永红^{1,3}, 李希宇^{1,2*}, 高 昕^{1,3}, 郝三峰^{1,3}, 雷呈强¹, 丁 华⁴

- (1. 北京跟踪与通信技术研究所, 北京 100094;
2. 天基综合信息系统全国重点实验室, 北京 100094;
3. 太空安全国家级重点实验室, 北京 100094;
4. 装备项目管理中心, 北京 100094)

摘要:为满足高动态响应、高精度与大范围的光电跟踪任务需求,研究了一种基于同轴球面并联机构的望远镜跟踪架。基于几何向量与旋量关系建立了跟踪架的正/逆运动学模型,研究了采用信赖域迭代并结合装配模式约束筛选唯一运动学解的求解方法。利用雅可比矩阵计算条件数,并在叠加支链夹角约束的条件下,分析了跟踪架无碰撞、无自由度缺失的工作空间,分析结果表明,跟踪架的俯仰角为 $48.4^{\circ}\sim 131.6^{\circ}$,方位角无限。最后,提出了单位四元数 Slerp 结合三次 Bezier 速度连续化的轨迹规划方法,实现了跟踪架在不同姿态间的连续平滑运动。实验结果表明,所提出的运动学求解方法的角度误差数量级至少为 10^{-11} ,验证了所建模型与求解模型具有较高的一致性。在多关键姿态的指向实验中,在设定规划时间内跟踪架姿态与角速度均能保证连续平滑收敛,且整条轨迹无奇异点,进一步验证了基于同轴球面并联机构的望远镜跟踪架具有优异的结构特性与运动能力。

关键词: 并联机构; 望远镜跟踪架; 运动学; 工作空间; 轨迹规划

中图分类号: TH743 **文献标识码:** A

doi: 10.37188/OPE.20263403.0438 **CSTR:** 32169.14.OPE.20263403.0438

Telescope tracking mount based on coaxial spherical parallel mechanism

ZONG Yonghong^{1,3}, LI Xiyu^{1,2*}, GAO Xin^{1,3}, HAO Sanfeng^{1,3}, LEI Chengqiang¹, DING hua⁴

- (1. *Beijing Institute of Tracking and Telecommunications Technology, Beijing 100094, China;*
2. *National Key Laboratory of Space Integrated Information System, Beijing 100094, China;*
3. *National Key Laboratory of Space Security, Beijing 100094, China;*
4. *Equipment Project Management Centre, Beijing 100094, China*)

* *Corresponding author, E-mail: lixiyu19900910@163.com*

Abstract: To enable electro-optical tracking with high dynamic response, high precision, and wide operating range, a telescope tracking mount based on a coaxial spherical parallel mechanism (CSPM) is investigated. First, forward and inverse kinematic models are formulated using geometric vector relations and screw theory. A solution strategy is then developed in which a trust-region iterative scheme, combined with assembly-mode constraints, is applied to determine a unique kinematically feasible solution. Next,

收稿日期: 2025-11-12; 修订日期: 2025-11-28.

基金项目: 科技应用推进计划项目 (No. 145XXX050532000X)

the Jacobian-based condition number is evaluated and, together with inter-limb angle constraints, is used to characterize a practical workspace free of collisions and degree-of-freedom deficiency. The results indicate that the mount provides an elevation (pitch) range of 48.4° - 131.6° , while the azimuth is unbounded. Finally, a trajectory-planning method is proposed that integrates unit-quaternion SLERP with cubic Bézier velocity smoothing, thereby ensuring continuous and smooth transitions between attitudes. Experimental results show that the proposed kinematic solution method achieves an angular error on the order of 10^{-11} deg, demonstrating strong consistency between the kinematic model and the numerical solver. In multi-key-posture pointing experiments, within the prescribed planning time, both attitude and angular velocity remain continuous and smoothly convergent, and the entire trajectory is free of singularities, further confirming the excellent structural characteristics and motion capability of the CSPM-based telescope tracking mount.

Key words: parallel mechanism; telescope mount; kinematics; workspace; trajectory planning

1 引言

目前,光学望远镜多采用串联式的驱动结构,其跟踪架由方位轴系和俯仰轴系组成^[1-2],结构简单,技术成熟,但是方位轴系带动俯仰轴电机和镜筒同步转动导致系统转动惯量较大,系统带宽通常较低、响应速度慢。当系统仰角接近 90° 时,还会出现过顶盲区,导致目标跟踪中断,望远镜的连续跟踪能力受限。为解决上述问题,并联机构以其封闭运动链和多支链分担载荷的特点,具备高刚度、低运动部件质量与响应速度快等结构优势^[3-5]。六自由度 Stewart 平台^[6]作为平面型并联机构,广泛用于精密定位、光机系统、医疗康复等领域^[6-7],但针对只需纯旋转指向的望远镜跟踪架系统,其包含不必要的平移自由度,且结构复杂、响应速度慢、工作空间有限。球面并联机构(Spherical Parallel Mechanism, SPM)则是纯指向调节的典型代表,在相机/光学载荷定向、激光指向、机器人腕关节等领域得到了广泛应用^[8-9]。

国内外学者针对 SPM 的结构设计、运动、动力学、轨迹规划等开展了众多研究^[10-14]。Kong 与 Gosselin 教授基于旋量理论给出了 SPM 类型综合框架,奠定了 SPM 结构系统化设计的基础^[15]。在正/逆运动学方面,针对 Agile Eye 的装配模式、闭链运动链, Bai 等将 SPM 归纳为两个四杆球形链,并建立了基于关节约束的运动学方程,从而解出不同装配模式下的正运动学解^[16];在奇

异性分析方面, Angeles 的闭环链奇异性分类和 Zlatanov 的广义奇异理论及约束奇异概念,为 SPM 的奇异边界与可达域判定提供了统一视角^[17-18];在性能优化方面,围绕工作空间、灵巧度、传动角/条件数等指标的多目标综合与尺度优化方法被用于 SPM。然而,由于 SPM 的三驱动旋转副呈 120° 等角分布,装置的外形尺寸与占用空间随之增大,且动平台指向空间被压缩,尤其限制了绕指向轴的连续旋转能力。针对上述结构与性能矛盾,同轴球面并联机构(Coaxial Spherical Parallel Mechanism, CSPM)在 SPM 基础上引入同轴驱动布局,显著改善了体积与可达域之间的折中,兼具紧凑结构与更广的定向能力,已广泛用于空间指向系统、康复机器人关节以及仿人机器人关节模拟等领域^[19-22]。

CSPM 的运动学结构最早见于文献[23],该研究评估了其它作为并联腕关节的运动学和静态性能,并从降低奇异性的角度进行了这类腕关节的优化设计。研究表明,CSPM 只在工作空间边界上存在奇异点。随后由于其独特的结构特性可大幅降低转动惯性,CSPM 被用于设计船用推进器和机器人连杆机构^[9,24-25]。文献[26-27]侧重于从运动学和动力学的角度对所提出的 CSPM 进行设计优化。上述工作主要集中在机械设计优化,没有对 CSPM 的无限旋转能力进行分析。Almas Shintemirov 教授在此基础上给出了求取 CSPM 运动唯一解方法,提出了一种使末端执行器无限旋转运动的控制策略。

本文基于部分光电跟踪任务对高动态响应、高精度、大范围工作空间的需求,开展了CSPM在望远镜跟踪架上的应用研究。与现有串联光电跟踪架相比,本方案的主要优势如下:(1)面向光电跟踪任务,将同轴球面并联机构引入望远镜跟踪架设计,实现三自由度纯转动指向,显著减小了转动惯量、消除了过顶盲区;(2)在几何约束基础上,提出了装配模式约束+信赖域迭代相结合的运动学求解策略,有效降低了串联机构间存在误差累积问题。首先分析了基于CSPM的望远镜跟踪架结构部件间的几何关系与约束条件,建立了跟踪架的运动学方程。其次,基于条件数与支链夹角分析了跟踪架在工作空间内的奇异性,避免运动过程中出现链路碰撞、自由度缺失等情况。最后,提出了一种可满足多关键姿态插值的轨迹规划方法,实现了复杂轨迹的平滑跟踪。实验表明,基于CSPM的望远镜跟踪架在仅保留三个转动自由度情况下,不仅结构简单、紧凑,并且响应速度快、工作空间较大,适用于光电跟踪领域。

2 运动学分析

2.1 运动模型与坐标系定义

三自由度球面并联机构的几何模型通常由两个共顶点的金字塔形平台构成,该公共顶点被定义为旋转中心,同时也是机构的原点^[28],如图1所示。其中,下平台为固定基座,上平台为动平台,动平台可围绕旋转中心实现3-DOF的球面运动,金字塔的几何形状由角度 γ 和 β 来定义。动平台通过编号为 $i=1,2,3$ 的三条支链与基座相连,各支链在逆时针方向上呈等距分布,每条支链包括两个弯曲的近端(下部)和远端(上部)连杆,其曲率分别由角度 α_1 和 α_2 定义。基座、连杆关节和动平台关节的轴线在旋转中心相交,并分别由单位向量 b_i , w_i 和 v_i 表示,方向为从旋转中心指向相应关节。对于基于同轴球面并联机构的望远镜跟踪架的几何模型^[29],其几何角度 $\gamma=0^\circ$,下平台可看作一条线,其三维模型如图2所示。

动平台的姿态由动平台关节轴线之间的夹

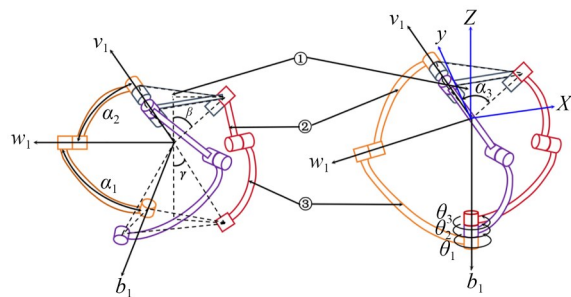


图1 球面并联机构参数

Fig. 1 Spherical parallel mechanism parameters

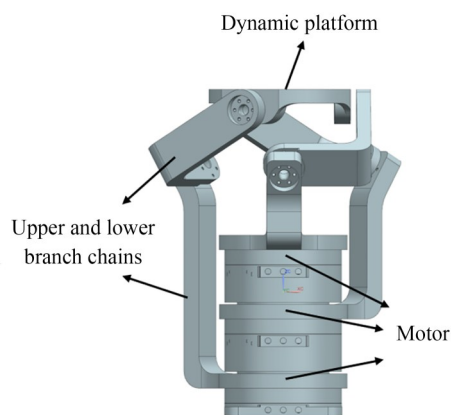


图2 同轴球面并联机构三维模型

Fig. 2 3D model of coaxial spherical parallel mechanism

角所决定,该夹角为 $\alpha_3=2\pi/3$ 。由于机构角度 $\beta=\pi/2$,机构原点与动平台几何中心重合。为便于描述各向量在空间中的坐标关系,设定基坐标系 z 轴竖直向上,在初始姿态下,动平台法向量与 z 轴正方向重合, y 轴为动平台关节轴线向量 v_1 的指向, x 轴则根据右手定则确定。

基座驱动关节实际安装位置位于动平台下方,根据基坐标系的定义,其在基坐标系中的 z 分量为负,令基座驱动关节单位向量 b_i , $i=1,2,3$ 表示为:

$$b_i = [0, 0, -1]. \quad (1)$$

令逆时针旋转为正方向,如图3所示,则连杆关节单位向量 w_i 可表示为:

$$w_i = \begin{bmatrix} \sin \alpha_1 \sin(\epsilon_i + \theta_i) \\ \sin \alpha_1 \cos(\epsilon_i + \theta_i) \\ -\cos \alpha_1 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

其中: θ_i 为基座驱动电机输入角度, ϵ_i 为每支链的角偏移量, $\epsilon_i=2(i-1)\pi/3$, $i=1,2,3$ 。

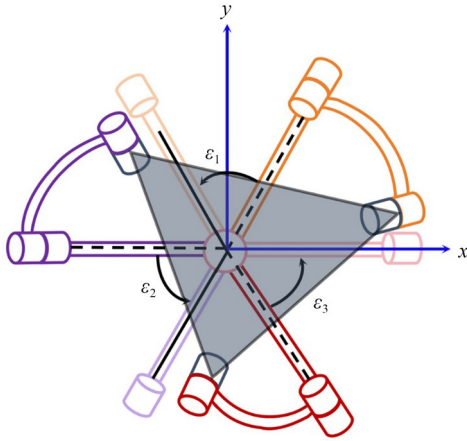


图3 机构旋转方向定义

Fig. 3 Definition of rotation direction of mechanism

2.2 正运动学

基于同轴球面并联机构的望远镜跟踪架的正运动学分析旨在根据基座驱动电机的输入角度 θ_i , 求解动平台与支链连接处的关节单位向量 $\boldsymbol{v}_i$, 进而确定动平台的绝对姿态。设计跟踪架的构型参数为: $\alpha_1 = \pi/3$, $\alpha_2 = \pi/2$, $\alpha_3 = 2\pi/3$ 。根据跟踪架结构的几何约束条件, 可建立方程组如下:

$$\begin{cases} \boldsymbol{w}_i \cdot \boldsymbol{v}_i = \cos \alpha_2 \\ \boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_j = \cos \alpha_3, \\ \|\boldsymbol{v}_i\| = 1 \end{cases} \quad (3)$$

其中 $i, j=1, 2, 3, i \neq j$ 。

由于 $\boldsymbol{w}_i$ 已知, 该方程组包含 9 个方程 9 个未知数, 难以得到显式的解析式, 本文采用信赖域迭代进行数值求解, 该方法结合了梯度下降与牛顿法的优势, 具有较快的收敛速度, 能够满足实时性要求。

迭代初始向量 $\boldsymbol{v}_0$ 的选取至关重要, 其数值的正负及空间位置直接影响最终收敛所得的构型, 因此初始向量需满足与目标装配模式处支链向量夹角较小, 位于该装配模式的吸引域内, 并且其 z 分量符号与实际支链向量一致。由于本实验机构采用 r-r-r 构型, 即靠近动平台的上支链位于对应下支链的右侧, 因此初始向量的构造过程如下: 先将 $\boldsymbol{w}_i$ 绕 z 轴逆时针旋转一个小角度 τ , 再将 z 方向分量取反, 从而得到最终的初始向量。数值实验表明, 当 τ 位于 2° 至 10° 时, 信赖域迭代法均在 15 步内收敛, 并且最终得到的装配模式正

确; 当 $\tau < 1^\circ$, 初值过于接近对称构型, 部分姿态会收敛到错误的装配模式; 当 $\tau > 15^\circ$ 时, 初值与真实解的夹角增大, 迭代步数明显增加。综合考虑收敛速度与稳定性, 本文取 $\tau = 5^\circ$ 作为默认初始旋转角度。

此时, 旋转向量通过 Rodrigues 旋转公式可求出:

$$\boldsymbol{v}'_{i,0} = \boldsymbol{w}_i \cos \tau + (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{w}_i) \sin \tau + \boldsymbol{n}(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{w}_i)(1 - \cos \tau), \quad (4)$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 为 z 轴正方向单位向量。

初始向量具有正 z 方向上的分量, 而 $\boldsymbol{w}_i$ 向量的 z 方向分量始终为负, 由此得到最终的 $\boldsymbol{v}_0$:

$$\boldsymbol{v}_0 = \begin{bmatrix} v'_{1x,0}, v'_{1y,0}, -v'_{1z,0} \\ v'_{2x,0}, v'_{2y,0}, -v'_{2z,0} \\ v'_{3x,0}, v'_{3y,0}, -v'_{3z,0} \end{bmatrix}. \quad (5)$$

2.3 逆运动学

基于同轴球面并联机构的望远镜跟踪架的逆运动学分析旨在通过动平台的绝对位姿, 求解动平台与支链连接处关节的单位向量 $\boldsymbol{v}_i$, 进而反解运动学得到基座驱动电机的输入角度 θ_i 。

动平台的绝对位姿可由 zyx 旋转顺序下对应的旋转矩阵 $\boldsymbol{R}$ 表示, 根据坐标系定义以及式(4), 可得:

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{R}_y \\ \boldsymbol{v}_2 = \text{Rodrigues}\left(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{R}_z, \frac{2\pi}{3}\right) \\ \boldsymbol{v}_3 = \text{Rodrigues}\left(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{R}_z, \frac{-2\pi}{3}\right) \end{cases} \quad (6)$$

其中: $\boldsymbol{R}_y, \boldsymbol{R}_z$ 分别为旋转矩阵 $\boldsymbol{R}$ 的 y 方向分量和 z 方向分量; Rodrigues 函数的输入参数依次为为旋转向量、旋转轴和旋转角度。联立式(2)和式(3)可得到关于 θ_i 的方程:

$$M_i \tan\left(\frac{\theta_i}{2}\right)^2 + 2N_i \tan\left(\frac{\theta_i}{2}\right) + O_i = 0, \quad (7)$$

其中:

$$\begin{cases} M_i = -\sin \alpha_1 (\cos \epsilon_i \cdot \boldsymbol{v}_{ix} + \sin \epsilon_i \cdot \boldsymbol{v}_{iy}) - \cos \alpha_1 \cdot \boldsymbol{v}_{iz} - \cos \alpha_2 \\ N_i = \sin \alpha_1 (\cos \epsilon_i \cdot \boldsymbol{v}_{iy} - \sin \epsilon_i \cdot \boldsymbol{v}_{ix}) \\ O_i = \sin \alpha_1 (\cos \epsilon_i \cdot \boldsymbol{v}_{ix} + \sin \epsilon_i \cdot \boldsymbol{v}_{iy}) - \cos \alpha_1 \cdot \boldsymbol{v}_{iz} - \cos \alpha_2 \end{cases} \quad (8)$$

每条支链对应一个一元二次方程, 因此电机目标角度在理论上共有 8 组解, 对应 8 种不同的

支链装配模式,物理意义上即每条远端支链在对应近端支链的左右侧组合。由于本实验机构采用 r-r-r 构型,要求每条支链的远端连杆在运动过程中始终位于其近端连杆的右侧,即 $\boldsymbol{w}_i$ 和 $\boldsymbol{v}_i$ 张成的平面的法向量的 z 方向分量的极性始终为正。因此,可通过判断每组解所得的 $\boldsymbol{w}_i \times \boldsymbol{v}_i$ 的 z 方向分量是否均为正,从而筛选出符合构型约束的唯一解;如果无解,则说明在此构型下,机构无法达到此姿态。

3 奇异性与工作空间分析

3.1 奇异性分析

奇异性分析是确保基于同轴球面并联机构的望远镜跟踪架运动稳定性与进行工作空间分析的重要基础。为此,通常借助雅可比矩阵来描述从关节空间到任务空间的运动(或力)传递特性。

对式(3)中第一个等式两边关于时间求导可得:

$$\dot{\boldsymbol{w}}_i \cdot \boldsymbol{v}_i + \dot{\boldsymbol{v}}_i \cdot \boldsymbol{w}_i = 0, \quad (9)$$

其中:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{w}}_i = (\boldsymbol{b}_i \times \boldsymbol{w}_i) \cdot \dot{\theta}_i \\ \dot{\boldsymbol{v}}_i = \dot{\boldsymbol{\sigma}} \times \boldsymbol{v}_i \end{cases} \quad (10)$$

$\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ 为动平台绕其旋转轴的角速度,展开后有:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 \times \boldsymbol{w}_1 \cdot \boldsymbol{v}_1 \\ \boldsymbol{b}_2 \times \boldsymbol{w}_2 \cdot \boldsymbol{v}_2 \\ \boldsymbol{b}_3 \times \boldsymbol{w}_3 \cdot \boldsymbol{v}_3 \end{pmatrix} \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{w}_1^T \times \boldsymbol{v}_1^T \\ \boldsymbol{w}_2^T \times \boldsymbol{v}_2^T \\ \boldsymbol{w}_3^T \times \boldsymbol{v}_3^T \end{pmatrix} \dot{\boldsymbol{\sigma}} = 0. \quad (11)$$

简化后得:

$$\boldsymbol{J}_1 \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{J}_2 \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}} = 0. \quad (12)$$

最终可得到动平台角速度到基座驱动电机输入角速度之间的雅可比矩阵 $\boldsymbol{J}$:

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{J} \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}}, \quad (13)$$

其中 $\boldsymbol{J} = -\boldsymbol{J}_1 \cdot \boldsymbol{J}_2$, 反映了机构的关节空间到任务空间的速度传递关系。当 $\det(\boldsymbol{J}_1)$ 或 $\det(\boldsymbol{J}_2)$ 等于 0 时,机构处于奇异位形;若仅有 $\det(\boldsymbol{J}_1) = 0$,动平台将丧失一个或更多自由度,此种奇异通常出现在支链完全折叠或完全展开时;若仅有 $\det(\boldsymbol{J}_2) = 0$,即使基座电机锁定,动平台仍可能

发生运动。

然而,上述判断并不能完全保证跟踪架平稳运行。在实际工程中,当跟踪架折叠、展开到一定程度接近奇异位形时,其传递性能已显著下降,可能导致跟踪架无法满足控制精度等要求。为此,本文采用条件数 $\zeta(\boldsymbol{J}) \in (0, 1)$ 作为评价指标,以衡量机构的奇异性程度:

$$\zeta(\boldsymbol{J}) = \frac{1}{\sqrt{\text{tr}\left(\boldsymbol{J}^T \frac{\boldsymbol{I}}{3} \boldsymbol{J}\right)} \cdot \sqrt{\text{tr}\left((\boldsymbol{J}^{-1})^T \frac{\boldsymbol{I}}{3} \boldsymbol{J}^{-1}\right)}}. \quad (14)$$

条件数 $\zeta(\boldsymbol{J})$ 引入权重矩阵 $\boldsymbol{I}/3$,使得单位矩阵的范数为 1,反映了机构三轴运动的平均传递精度与误差敏感度。 $\zeta(\boldsymbol{J})$ 越小,机构速度方程的病态性就越大,可能导致机构失去控制; $\zeta(\boldsymbol{J})$ 越大,机构的精度越好,能量的传递效率就越高。

3.2 工作空间

工作空间是衡量机构运动范围的指标,基于同轴球面并联机构的望远镜跟踪架的工作空间特性主要取决于其结构参数,且运动范围被限制在上半球面。然而,在上半球面内的某些位形可能无法求得正/逆运动学解,或存在构件干涉与奇异点,这些因素共同构成了工作空间的实际约束。

为确定有效工作空间,首先设置条件数 $\zeta(\boldsymbol{J})$ 的下限,来规避支链过度折叠或展开导致的运动传递性能恶化;其次,为避免构件间的距离过小产生干涉,需限制基座上相邻驱动电机转角之差 ϕ_i 的范围。经测试,当 $\zeta(\boldsymbol{J}) < 0.25$ 时,速度、力传递性能明显恶化;当支链间夹角小于 30° 时,支链间距离已处于干涉边缘。综合考虑传递性能与物理干涉,设定约束条件 $\zeta_{\min} = 0.25, \phi_{\min} = 30^\circ$ 。

基于上述约束的工作空间求解流程如图 4 所示。机构在上半球面内的工作空间如图 5 所示。其中,蓝色区域表示跟踪架可绕其指向轴做无限连续滚转运动,俯仰角为 $48.4^\circ \sim 131.6^\circ$ 。绿色区域为机构可达但无法实现连续滚转;若不考虑连续滚转,则俯仰角可扩展至 $40.1^\circ \sim 139.9^\circ$ (彩图见期刊电子版)。

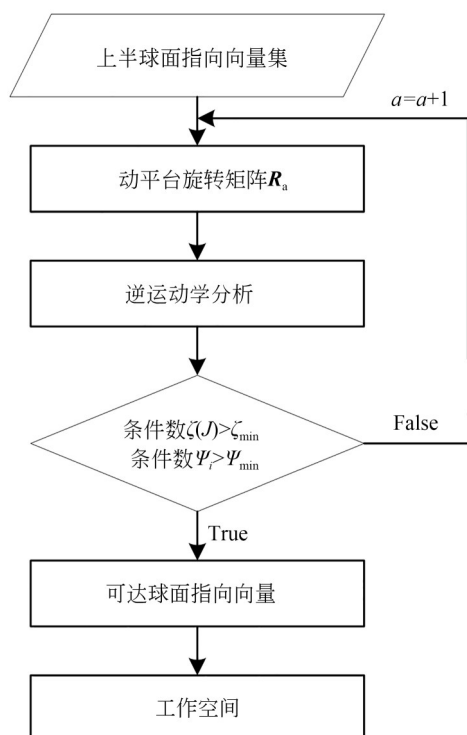


图4 工作空间求解流程

Fig. 4 Workspace solution process

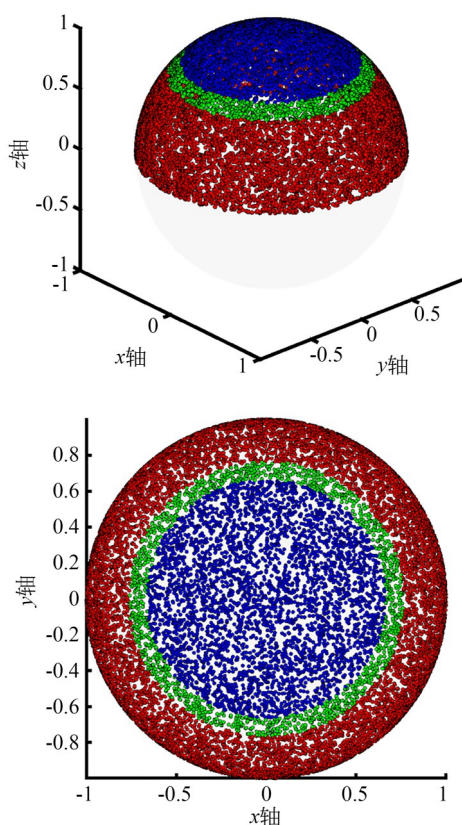


图5 跟踪架的工作空间

Fig. 5 Workspace of tracking mount

4 轨迹规划

基于同轴球面并联机构的望远镜跟踪架可实现三自由度纯旋转运动,本文采用单位四元数进行姿态插补。该方法不仅计算效率高,且在规划过程中不会出现万向节现象,从而实现目标姿态间的平滑动态跟踪。

在轨迹规划之前,需先将运动学分析中所得目标位姿对应的旋转矩阵 R 转化为单位四元数形式:

$$\begin{cases} s_0 = \frac{\sqrt{R_{11} + R_{22} + R_{33} + 1}}{2} \\ s_1 = \frac{\sqrt{R_{11} - R_{22} - R_{33} + 1}}{2} \\ s_2 = \frac{\sqrt{-R_{11} + R_{22} - R_{33} + 1}}{2} \\ s_3 = \frac{\sqrt{-R_{11} - R_{22} + R_{33} + 1}}{2} \end{cases}, \quad (15)$$

其中: s_0, s_1, s_2, s_3 分别为四元数实部、虚部系数的绝对值,将各项的符号代入,即可得到完整的四元数系数:

$$\begin{cases} a = s_0 \\ b = s_1 \cdot \text{sign}(s_0) \text{sign}(R_{32} - R_{23}) \\ c = s_2 \cdot \text{sign}(s_0) \text{sign}(R_{13} - R_{31}) \\ d = s_3 \cdot \text{sign}(s_0) \text{sign}(R_{21} - R_{12}) \end{cases} \quad (16)$$

已知当前姿态旋转矩阵 R_i 与目标姿态旋转矩阵 R_g ,根据式(15)和式(16)可求得当前姿态四元数 q_i 与目标姿态四元数 q_g 。采用球面线性插补算法 slerp,可构造用于实现两姿态间平滑均匀插值的函数如下:

$$\begin{cases} S(t) = \begin{cases} \frac{\sin(1-t)\rho}{\sin\rho} q_i + \frac{\sin(t\rho)}{\sin\rho} q_g & \text{if } \rho > \chi \\ (1-t)q_i + tq_g & \text{otherwise} \end{cases} \\ \omega = \frac{2\rho \cdot \kappa}{t} \end{cases}, \quad (17)$$

其中: t 为插值参数,且满足 $0 \leq t \leq 1$; ω 为旋转角速度; κ 为旋转轴向量;旋转角 $p = \arccos(q_i \cdot q_g)$ 。当 p 较小时,插值结果可能不稳定,导致精度损失,故设定角度下限 $\chi = 10^{-4}$;当 $\rho < \chi$ 时,则切换插值函数为线性插值,此方

法在微小旋转下与 slerp 近似等价,保证了计算的稳定性。

上述插值方法在两个姿态间能够实现良好的平滑过渡。然而,如果需要对多个四元数进行插值,跟踪复杂的轨迹时,角速度在不同插值线段的连接点处会出现突变,影响运动的平稳性与精度。为此,可采用三次 Bezier 曲线插值予以改进。

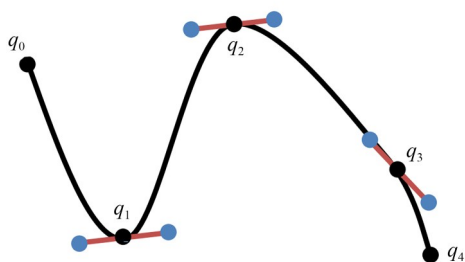


图6 三次贝塞尔插值曲线

Fig. 6 Cubic Bézier interpolation curve

在图6中,轨迹需经过 q_0, q_1, q_2, q_3, q_4 ,为实现轨迹连续且一阶可导,除在相邻关键点 q_i 与 q_{i+1} 之间使用 Bezier 插值外,还需要利用插值区间的前一位置 q_{i-1} 与后一位置 q_{i+2} 生成两个控制点 c_i 与 c_{i+1} ,以调节插值曲线的形状, c_i 与 c_{i+1} 分别为关键点处切向量的两端点。轨迹起点与终点的控制点取为自身。控制点 c_i 满足下式:

$$c_i = q_i \cdot e^{\frac{\log q_i q_{i-1}^{-1} - \log q_i^{-1} q_{i+1}}{4}}. \quad (18)$$

随后,将控制点代入式(16)所描述的两四元数间的球面线性插值公式,即可获得最终满足连续性与一阶可导要求的插值轨迹:

$$S_q(t) = \text{slerp}(\text{slerp}(q_i, q_{i+1}, t), \text{slerp}(q_{i+1}, q_{i+2}, t), 2t(1-t)). \quad (19)$$

5 实 验

实验采用工业 PC 作为上位机及运动控制平台,所用伺服电机尾部安装 12 000 线的增量式编码器,用于提供位置与速度反馈信号,实验平台如图 7 所示。

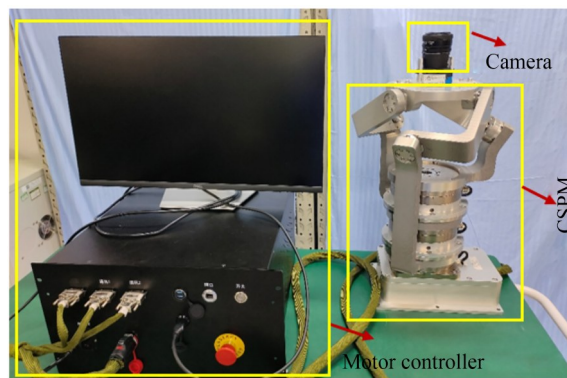


图7 并联机构性能实验硬件平台

Fig. 7 Experimental hardware platform for performance-test of parallel mechanisms

5.1 运动学验证

给定驱动电机输入角度,首先通过正运动学,采用信赖域迭代结合装配构型约束求得动平台的姿态;随后,以此姿态作为逆运动学的输入,根据支链几何约束方程,计算出对应的驱动电机角度。

根据表1中4组驱动电机角度,分别得到其动平台姿态如式(20)所示。

$$\begin{aligned} R_a &= \begin{bmatrix} 0.9499 & -0.1298 & -0.2843 \\ 0.2683 & 0.8054 & 0.5285 \\ 0.1604 & -0.5783 & 0.7999 \end{bmatrix}, \\ R_b &= \begin{bmatrix} 0.9096 & -0.4017 & 0.1063 \\ 0.3811 & 0.9085 & 0.1716 \\ -0.1655 & -0.1156 & 0.9794 \end{bmatrix}, \\ R_c &= \begin{bmatrix} 0.5695 & -0.6659 & -0.4819 \\ 0.5547 & 0.7440 & -0.3725 \\ 0.6066 & -0.0552 & 0.7931 \end{bmatrix}, \\ R_d &= \begin{bmatrix} 0.6983 & -0.6961 & 0.1666 \\ 0.7057 & 0.6306 & -0.3229 \\ 0.1198 & 0.3431 & 0.9316 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (20)$$

在运动学求解过程中,将数值迭代的最优性容差与步长容差均设置为 10^{-6} 。最终,由逆运动学反解得到的电机角度与目标角度的对比结果如表1所示。根据仿真数据与实际电机编码器反馈对照,各轴角度误差数量级均在 10^{-11}° 以上,仿真与实验结果分别如图 8(a)~8(d), 8(e)~8(h) 所示,理论与实验结果动平台中心指向高度一致,表明所提方法具有较高的计算精度。

为了验证该机构的快速响应性能以及进一

表 1 运动学求解精度
Tab. 1 Accuracy of kinematic solution

驱动电机输入角/(°)	逆运动学解	误差/(°)
$\begin{bmatrix} -15 \\ 15 \\ 35 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -15.000\,000\,000\,000\,053 \\ 15.000\,000\,000\,001\,369\,6 \\ 34.999\,999\,999\,996\,163\,1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5.3 \times 10^{-13} \\ 1.4 \times 10^{-12} \\ 3.8 \times 10^{-12} \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 20 \\ 30 \\ 20 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 20.000\,000\,000\,035\,811\,4 \\ 30.000\,000\,000\,004\,213\,5 \\ 20.000\,000\,000\,001\,342\,9 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3.6 \times 10^{-11} \\ 4.2 \times 10^{-12} \\ 1.3 \times 10^{-12} \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 40 \\ 30 \\ 60 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 40.000\,000\,000\,009\,862\,3 \\ 30.000\,000\,000\,037\,307\,0 \\ 59.999\,999\,999\,997\,207\,6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9.9 \times 10^{-12} \\ 3.7 \times 10^{-11} \\ 2.8 \times 10^{-12} \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 60 \\ 35 \\ 45 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 60.000\,000\,000\,001\,712\,4 \\ 35.000\,000\,000\,001\,129\,8 \\ 44.999\,999\,999\,994\,841\,5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.7 \times 10^{-12} \\ 1.1 \times 10^{-12} \\ 5.2 \times 10^{-12} \end{bmatrix}$

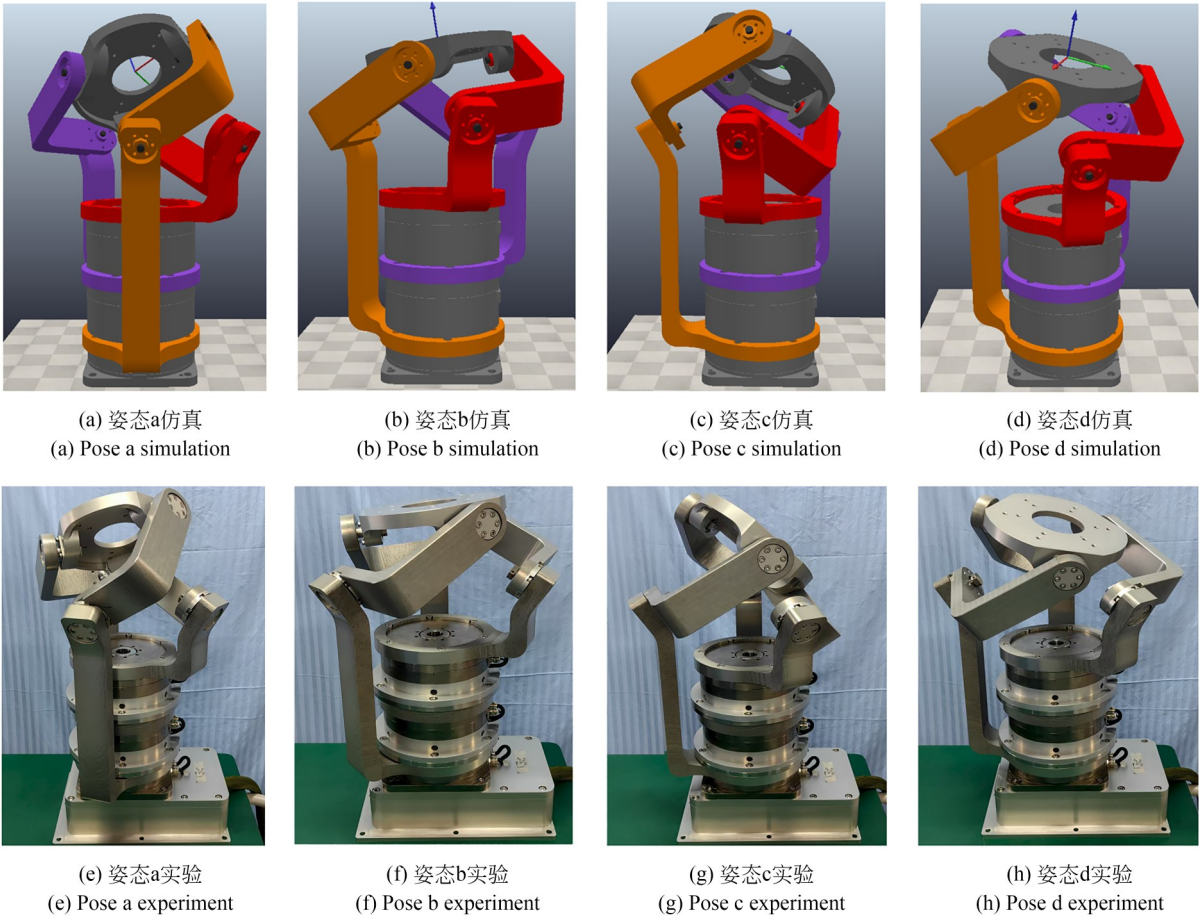


图 8 基于同轴球面并联机构的望远镜跟踪架运动学仿真与实验
Fig. 8 Kinematic simulation and experimentation of CSPM

步评估实际姿态与目标姿态的误差精度,对姿态 R_0 到 R_i 进行了多次重复定位仿真实验,单次定位仿真实验各轴角误差的响应曲线如图 9 所示。

由于该机构绕动平台中心做球面滚转运动,跟踪精度主要体现在动平台 z 轴是否对齐目标,故本实验主要测量 z 轴指向精度,重复进行多次实验

后, z 轴轴向误差分布如图 10 所示。

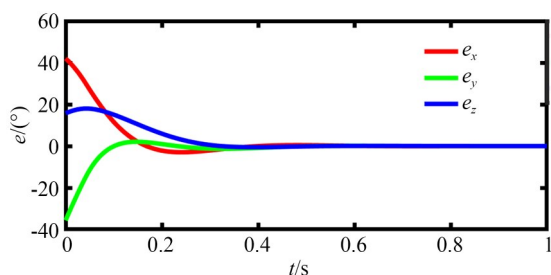


图 9 姿态切换轴角误差响应曲线

Fig. 9 Attitude switching axis angle error variation curve

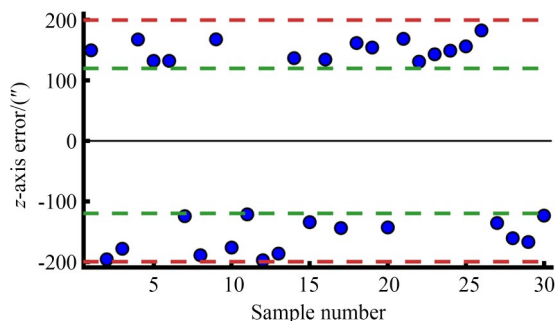


图 10 z 轴轴角误差分布散点图

Fig. 10 Scatter plot of z -axis angular error distribution

实验结果表明,在大角度姿态阶跃响应下,该机构能实现各轴角在 0.5 s 内快速收敛;在未考虑机械结构误差、动力学补偿的前提下, z 轴方向最大指向误差在 200" 内,表明提出的运动学方法与机构能够实现更高精度的定向能力。

5.2 轨迹规划验证

将式(20)中四组数据作为轨迹规划的关键点,仅采用单位四元数 slerp 插值,与 slerp 叠加三次 Bézier 速度整形后插值,得到的动平台欧拉角变化曲线以及对应轴角的角速度变化分别如图 11~图 14 所示。

需要指出的是,轨迹规划时间 t 与跟踪架闭环控制的响应时间并非等价概念。闭环伺服系统的控制周期通常在毫秒量级,而本文所讨论的规划时间 t 主要针对较大角度的、多姿态的切换过程,用于在给定的起始与终止姿态之间生成一条在整个区间内角度、角速度均尽量平滑的参考轨迹,需满足角速度约束(最大角速度 $\omega_{\max}=0.8$ rad/s),并且这个规划时间是动态的,会根据关键

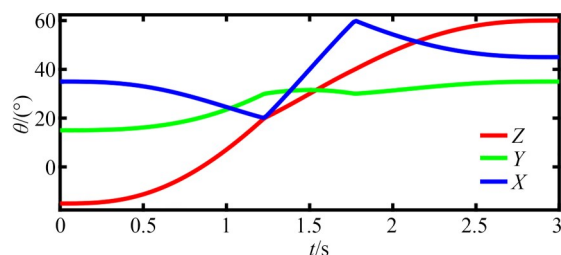


图 11 slerp 插值动平台欧拉角变化曲线

Fig. 11 Euler angle variation curve of dynamic platform using slerp interpolation

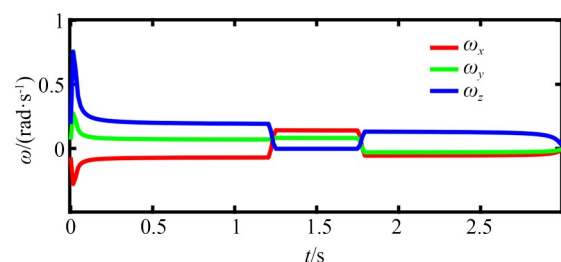


图 12 Slerp 插值动平台角速度变化曲线

Fig. 12 Variation curve of angular velocity of dynamic platform using slerp interpolation

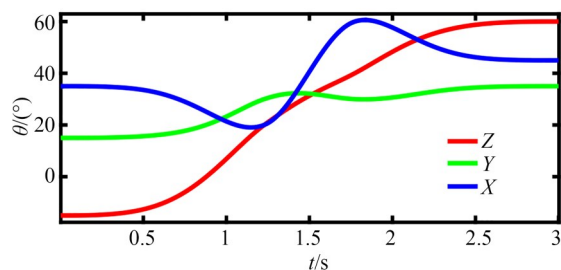


图 13 改进 slerp 插值动平台欧拉角变化曲线

Fig. 13 Euler angle variation curve of dynamic platform using improve slerp interpolation

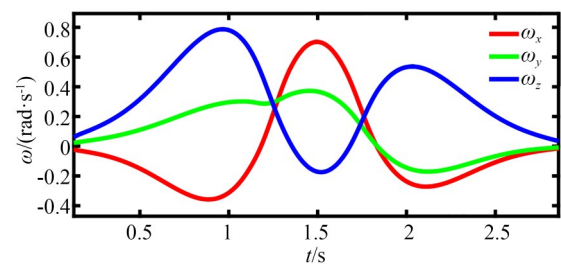


图 14 改进 slerp 插值动平台角速度变化曲线

Fig. 14 Variation curve of angular velocity of dynamic platform using improve slerp interpolation

姿态的复杂度而定。

在3 s的规划时间内,若仅采用单位四元数slerp插值,机构欧拉角、角速度在过渡点处不平滑,严重影响机构平稳运行;若采用slerp叠加三次Bézier速度整形后插值,机构欧拉角轨迹连续无跳变,角速度在插值向量切换处保持平滑且满足最大约束;角度与角速度均能准确收敛至目标值。由于上文已确定机构的无奇异工作空间,故插值的关键姿态已位于可达空间内,不同姿态间的插值轨迹必然在其可达域内,故整个轨迹未经过任何奇异点。

6 结 论

针对高动态响应、高精度、大范围的光电跟踪任务需求,本文研究了一种基于同轴球面并联机构的望远镜跟踪架,将三驱动电机轴线同轴化,结构紧凑,在保持并联机构的高刚度、低惯量优势的情况下,同时获得了绕指向轴的大范围无限连续滚转能力。首先,对其进行了基于几何约束的精确运动学建模,提出通过装配模式约束与数值迭代相结合的运动学求解策略,角度精度数量级可达 10^{-11}° ,满足高精度需求。此外,根据运动学模型结合条件数与支链夹角,分析了跟踪架的工作

空间。实验结果表明,跟踪架可实现在俯仰角范围为 $48.4^\circ \sim 131.6^\circ$ 内无限连续滚转运动;若不考虑连续滚转自由度,跟踪架的可达空间可增至 $40.1^\circ \sim 139.9^\circ$,满足大范围跟踪需求;实验机构的最大角速度 $\omega_{\max}=0.8 \text{ rad/s}$,在大角度姿态切换下,该机构能做到各轴角在0.5 s内快速收敛,并且在无机械结构误差补偿以及动力学补偿的前提下能做到 z 轴方向最大指向误差在200"内。最后,提出了一种基于单位四元数slerp结合三次Bezier速度连续化的轨迹规划方法,在规划时间内保证复杂轨迹关键点处角速度连续平滑且收敛,避免了从关节空间规划可能导致的指向平台的奇异性。综合结构设计、运动学求解、无奇异工作空间分析与轨迹规划,所设计的并联跟踪架相较于传统串联式跟踪架,在结构紧凑性、指向范围和精度等方面均表现出明显的优势。

作者贡献声明:

宗永红:方法提出,论文构思与撰写;
李希宇:仿真分析;
高昕:总体设计论证;
郝三峰:仿真实验设计与数据整理分析;
雷呈强:实验平台搭建;
丁华:论文审核与编辑写作。

参考文献:

- [1] 张景旭. 地基大口径望远镜系统结构技术综述[J]. 中国光学, 2012(4): 327-336.
ZHANG J X. Overview of structure technologies of large aperture ground-based telescopes[J]. *Chinese Optics*, 2012(4): 327-336. (in Chinese)
- [2] 王国民. 天文光学望远镜轴系驱动方式发展概述[J]. 天文学进展, 2007, 25(4): 364-374.
WANG G M. Review of drive style for astronomical optical telescope[J]. *Progress in Astronomy*, 2007, 25(4): 364-374. (in Chinese)
- [3] 刘沅果, 杨飞, 霍银龙, 等. 大口径光学望远镜抖动测量与抑制技术研究进展[J]. 激光与光电子学进展, 2024, 61(17): 1700003.
LIU Y G, YANG F, HUO Y L, et al. Research progress in jitter measurement and suppression technology for large-aperture optical telescopes[J]. *Laser & Optoelectronics Progress*, 2024, 61(17):

1700003. (in Chinese)
- [4] 李兴瑞, 龙有强, 姜峰. 新型3-DOF 1T2R并联机构的运动学分析与尺度优化[J]. 机电工程, 2024, 41(10): 1806-1815.
LI X R, LONG Y Q, JIANG F. Kinematics analysis and scale optimization of a new 3-DOF 1T2R parallel mechanism[J]. *Mechanical & Electrical Engineering Magazine*, 2024, 41(10): 1806-1815. (in Chinese)
- [5] 叶伟, 谢镇涛, 李秦川. 一种可用于微创手术的并联机构运动学分析与性能优化[J]. 机械工程学报, 2020, 56(19): 103-112.
YE W, XIE ZH T, LI Q CH. Kinematics analysis and performance optimization of a parallel manipulator for minimally invasive surgery[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2020, 56(19): 103-112. (in Chinese)
- [6] 韩秀英, 李旭莹, 凌金博, 等. 一种新型3-RRPU并联机构的运动学及鲁棒控制研究[J]. 机电工

- 程, 2024, 41(8): 1464-1471.
- HAN X Y, LI X Y, LING J B, *et al.* Kinematics and robust control of a novel 3-RRPU parallel mechanism [J]. *Mechanical & Electrical Engineering Magazine*, 2024, 41(8): 1464-1471. (in Chinese)
- [7] 刘小平, 曾海, 张立杰, 等. 基于粒子滤波的 Stewart 平台正运动学求解[J]. *光学 精密工程*, 2025, 33(23): 3691-3701.
- LIU X P, ZENG H, ZHANG L J, *et al.* Solution for forward kinematics of Stewart platform based on particle filter[J]. *Optics and Precision Engineering*, 2025, 33(23): 3691-3701. (in Chinese)
- [8] TAO Z J, AN Q. Interference analysis and workspace optimization of 3-RRR spherical parallel mechanism[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2013, 69: 62-72.
- [9] WU G L. Ultiobjective optimum design of a 3-RRR spherical parallel manipulator with kinematic and dynamic dexterities[J]. *Modeling, Identification and Control: A Norwegian Research Bulletin*, 2012, 33(3): 111-121.
- [10] GOSSELIN C M, HAMEL J F. The agile eye: a high-performance three-degree-of-freedom camera-orienting device[C]. *Procee of the 1994 IEEE International Conference on Robotics and Automation. May 8-13, 1994, San Diego, CA, USA.* IEEE, 2002: 781-786.
- [11] BAI S P, HANSEN M R. Forward kinematics of spherical parallel manipulators with revolute joints [C]. *2008 IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics. July 2-5, 2008, Xi'an, China.* IEEE, 2008: 522-527.
- [12] 王丽, 王蓉. 3-RRR 球面并联机器人运动干涉检查及工作空间研究[J]. *机械传动*, 2021, 45(7): 30-36.
- WANG L, WANG R. Motion interference inspection and workspace research of 3-RRR spherical parallel robot[J]. *Journal of Mechanical Transmission*, 2021, 45(7): 30-36. (in Chinese)
- [13] 易建, 何兵, 车林仙, 等. 4-PRPaR 并联机构尺度参数多目标优化[J]. *机械传动*, 2021, 45(7): 60-66.
- YI J, HE B, CHE L X, *et al.* Multi-objective optimization of dimensional parameter for 4-PRPaR parallel mechanism [J]. *Journal of Mechanical Transmission*, 2021, 45(7): 60-66. (in Chinese)
- [14] 常振, 王成博, 王高峰, 等. 新型球面并联机构运动学分析及尺度综合[J]. *机械传动*, 2022, 46(6): 45-51.
- CHANG ZH, WANG CH B, WANG G F, *et al.* Kinematics analysis and scale synthesis of a novel spherical parallel mechanism [J]. *Journal of Mechanical Transmission*, 2022, 46(6): 45-51. (in Chinese)
- [15] KONG X W, GOSSELIN C M, RICHARD P L. Type synthesis of parallel mechanisms with multiple operation modes[J]. *Journal of Mechanical Design*, 2007, 129(6): 595-601.
- [16] BAI S P, HANSEN M R, ANGELES J. A robust forward-displacement analysis of spherical parallel robots[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2009, 44(12): 2204-2216.
- [17] GOSSELIN C, ANGELES J. Singularity analysis of closed-loop kinematic chains[J]. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 1990, 6(3): 281-290.
- [18] ZLATANOV D, BONEV I A, GOSSELIN C M. *Constraint Singularities as C-space Singularities*[M]. *Advances in Robot Kinematics.* Dordrecht: Springer Netherlands, 2002: 183-192.
- [19] SWEENEY M, REDD L, VETTESE T, *et al.* Design and manufacturing considerations for high-performance gimbals used for land, sea, air, and space[J]. *Material Technologies and Applications to Optics, Structures, Components, and Sub-Systems II*, 2015, 9574: 957404.
- [20] CRUZ-REYES A T, ARIAS-MONTIEL M, TAPIA-HERRERA R. Kinematic analysis of a coaxial 3-RRR spherical parallel manipulator based on screw theory[C]. *Mechanism Design for Robotics.* Cham: Springer, 2021: 28-37.
- [21] 赵卫, 冯昂昂, 周宇飞, 等. 共轴球面并联跟踪机构运动学建模与应用[J]. *光学 精密工程*, 2025, 33(13): 2076-2088.
- ZHAO W, FENG A A, ZHOU Y F, *et al.* Kinematic modeling and application of coaxial spherical parallel tracking mechanism [J]. *Opt. Precision Eng.*, 2025, 33(13): 2076-2088. (in Chinese)
- [22] 王娜, 于敏, 张永选, 等. 新型 2URU-2RSS 并联机器人机构运动学分析多目标优化[J]. *机床与液压*, 2024, 52(17): 28-38.
- WANG N, YU M, ZHANG Y X, *et al.* Kinematic analysis and multi-objective optimization of novel 2URU-2RSS parallel robot mechanism [J]. *Ma-*

- chine Tool & Hydraulics, 2024, 52(17): 28-38. (in Chinese)
- [23] LEE J, SONG B W, YANG W. Design of exo-skeleton-type wrist human-machine interface based on over-actuated coaxial spherical parallel mechanism [J]. *Advances in Mechanical Engineering*, 2018, 10(2): 1687814017753896.
- [24] WEI Z M, MA D T, TUO A P, *et al.* Configuration design and performance analysis of a force feedback operating rod based on 3-RRR spherical parallel mechanism[C]. *Proceedings of the 2016 International Conference on Mechatronics Engineering and Information Technology*. August 27-28, 2016. Xi'an, China. Atlantis Press, 2016: 239-250.
- [25] ASADA H, GRANITO J. Kinematic and static characterization of wrist joints and their optimal design[C]. *Proceedings of 1985 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. March 25-28, 1985, St. Louis, MO, USA. IEEE, 2003: 244-250.
- [26] CAVALLO E, MICHELINI R C, FILARETOV V F. Conceptual design of an AUV equipped with a three degrees of freedom vectored thruster [J]. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, 2004, 39(4): 365-391.
- [27] SUDKI B, LAURIA M, NOCA F. Robotic penguin-like propulsor with novel spherical joint [C]. *66th Annual Meeting of the APS Division of Fluid Dynamics*. November 24-26, 2013, Pittsburgh, PA, USA. Espace ÉTS, 2013.
- [28] 周文涛, 谢文洪, 李初晔, 等. 3PRS 并联机构的运动学和误差分析[J]. *制造技术与机床*, 2024(9): 52-57.
- ZHOU W T, XIE W H, LI CH Y, *et al.* Kinematics and error analysis of 3PRS parallel mechanism [J]. *Manufacturing Technology & Machine Tool*, 2024(9): 52-57. (in Chinese)
- [29] WU G L, BAI S P. Design and kinematic analysis of a 3-RRR spherical parallel manipulator reconfigured with four-bar linkages[J]. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, 2019, 56: 55-65.

作者简介:



宗永红(1991—),女,山东临沂人,硕士,助理研究员,2014年于吉林大学获得学士学位,2017年于中国科学院大学获得硕士学位,主要从事光学测量、伺服控制等方面的研究。E-mail: zongyongh16@163.com

通讯作者:



李希宇(1990—),男,山东平度人,硕士,副研究员,2012年于北京航空航天大学获得学士学位,2015年于北京跟踪与通信技术研究所获得硕士学位,主要从事光学探测与成像等技术的研究。E-mail: lixiyu@buaa.edu.cn