

谐波齿轮传动中分析啮合几何学的图解解析法*

文中导出了柔轮齿上的点相对刚轮齿的运动轨迹方程式。按照柔轮和刚轮齿形的相对位置确定了同时啮合的齿数

在1958年于美国取得专利权的谐波齿轮传动中,建议使用直线齿形。同时齿的侧面和轴线之间的角度决定于波数,对两波传动的刚轮等于 $28^{\circ}36'$ 。而对三波传动等于 20° 。

这种建议基于两种情况:第一,在平面座标系中柔轮的弹性线图形在特定的区段(工作区段)上,实际上同直线重合。第二,在整个啮合阶段中柔轮齿形相对刚轮齿以恒定的角速度旋转。如果在大传动比时,第一种情况不引入很大的误差的话,那么,根据第二种情况可以作出关于啮合几何学的错误结论。

目前,提出了很多关于谐波传动发生器和原理图的结构建议。但是,由于没有啮合几何学的分析方法,所以都不能说明它们的优越性。这里所提出的方法是基于求得一个齿轮齿上的点相对另一个齿轮齿的轨迹方程式。此时,谐波传动被看作是具有柔性联系的周转凸轮—齿轮传动中的一种。

图1给出了一般的传动原理图^[1-2]。轮**b**是刚性的,轮**a**是柔性的。柔轮的形状决定于凸轮**k**的形状。为了减小摩擦,在凸轮和柔轮之间配置有滚动体。当刚轮**b**不动和凸轮顺时针旋转时,则沿刚轮滚动的柔轮**a**将反时针旋转。

今给整个系统以角速度旋转,使该角速度同凸轮的角速度大小相等方向相反。在这

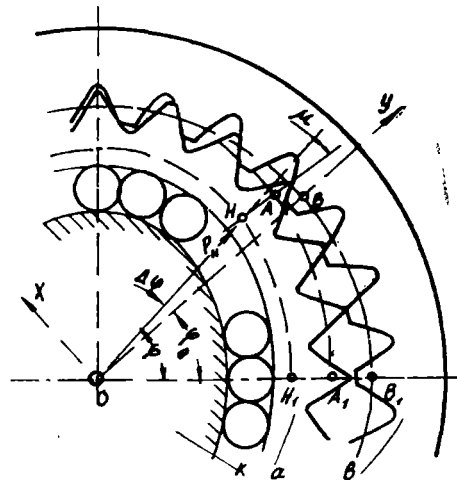


图1

个转换系统中凸轮是不动的,而柔轮和刚轮则反时针旋转。

当假想凸轮不动时,则从轮**a**到轮**b**的传动比是:

$$i_{ab}^k = \frac{n_a - n_k}{n_b - n_k} = \frac{d_b}{d_a} = \frac{z_b}{z_a} \quad (1)$$

在此方程式中取 $n_b = 0$ 或 $n_a = 0$,则可得到刚轮或柔轮不动时的谐波传动的传动比:

★ 作者 С. А. Лувалов

$$\begin{aligned}
 i_{k_a}^b &= \frac{n_k}{n_a} = \frac{d_o}{d_b - d_a} \\
 &= \frac{d_o}{\delta} = -\frac{z_a}{z_b - z_a} \\
 i_{k_b}^a &= \frac{n_b}{n_a} = \frac{d_b}{d_b - d_a} \quad (2) \\
 &= \frac{d_b}{\delta} = \frac{z_b}{z_b - z_a}
 \end{aligned}$$

式中,

n_a, n_b, n_k ——相应的柔轮, 刚轮和凸轮的转数;

$d_o, d_b (z_a, z_b)$ ——相应的柔轮和刚轮的分度圆直径(齿数);

δ ——刚轮和柔轮的分度圆直径之差。

为了分析啮合几何学, 这里列出了相对运动中的 H 和 A 点的轨迹方程式(当凸轮不动时)。动座标系 XOY 与轮 b 一起旋转。 OY 轴与刚轮齿的轴线重合。取 H 点位于中性层上, A 点位于分度圆上, 齿轴线 HA 与柔轮断面重合(图 1) 并位于中性层的法线上。

当刚轮旋转 φ_b 角时, 柔轮齿轴线旋转 φ_a 角, 由 H_1A_1 位置过渡到 HA 位置, 并与向径 ρ_H 构成 μ 角。

在动座标系 XOY 中, H 点的座标可用方程式写出(图 1):

$$\begin{aligned}
 X_H &= \rho_H \sin \Delta\varphi \\
 Y_H &= \rho_H \cos \Delta\varphi \quad (3)
 \end{aligned}$$

对 A 点:

$$\begin{aligned}
 X_A &= X_H + \overline{HA} \sin(\Delta\varphi - \mu) \\
 Y_A &= Y_H + \overline{HA} \cos(\Delta\varphi - \mu) \quad (4)
 \end{aligned}$$

HA 的大小在设计时根据柔轮弯曲强度条件确定, 向径的大小由柔轮中性层的方程式求得。在极坐标系中这个方程式的一般形式表达为:

$$\rho_H = f(\varphi) \quad (5)$$

具体的表达式决定于凸轮的形状(图 1)。例如, 以提摩申柯解法为基础, 在两个力(滚子)作用下变形时, 光滑环的中性层方

程式(图 2)可以提出下列形式。

$$\begin{aligned}
 \rho_H &= 0.5d_H + 1.68035 \\
 &\delta(\cos\varphi + \varphi \sin\varphi - \frac{4}{\pi}) \quad (6)
 \end{aligned}$$

式中,

$d_H = d_o - 2HA$ —— 中性层圆的直径。

由图 1 可以看出, 柔轮和刚轮的齿轴线之间的角度等于:

$$\Delta\varphi = \varphi - \varphi_b \quad (7)$$

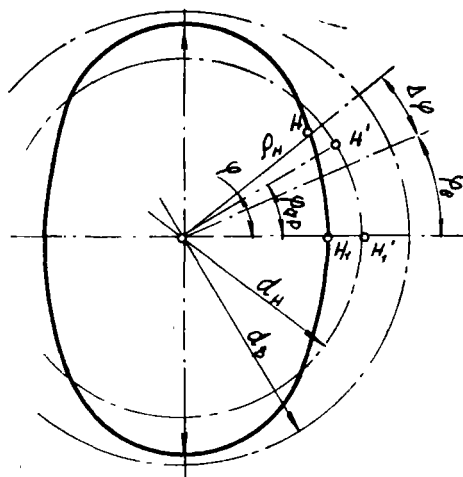


图 2

今通过 φ 角来表示 φ_b 角。在图 2 上用点划线来表示刚轮的分度圆(直径 d_b) 和没变形柔轮的中性层圆(直径 d_H)。在相对运动中, 当刚轮转过 φ_b 角时, 则没变形柔轮上的 H_1' 点转过 φ_{aP} 角并处于 H' 位置。

用转角来代替转数后, 由方程式(1) 可得到:

$$\varphi_b = \varphi_{aP} \frac{i_{k_a}^b}{i_{k_a}^b + 1} \quad (8)$$

但是, 柔轮是变形的, 因而 H_1 点移到 H 点, 该点的位置用两段弧长相等来确定(假定在载荷作用下柔轮沿圆周的拉长可忽略不计):

$$\begin{aligned}
 H_1'H &= H_1H \\
 \text{或 } 0.5d_H\varphi_{aP} &= \int ds \quad (9)
 \end{aligned}$$

在载荷作用下, 柔轮的材料很易变形

时，柔轮的拉长可以在等式(9)中用系数或 φ 角的某一个最简单的函数来考虑。

将 $\varphi_{o,p}$ 代入(8)和(7)中并通过柔轮分度圆直径 d 。来表示 d_H ，则得：

$$\Delta\varphi = \varphi - \frac{2i_{k_a}^b}{(d_a - 2HA)(i_{k_a}^b + 1)} \int ds \quad (10)$$

由微分几何学可知，弧长：

$$\int ds = \int \sqrt{\rho_H^2 + \left(\frac{d\rho_H}{d\varphi}\right)^2} d\varphi \quad (11)$$

当传动比 $i_{k_a}^b$ 大于100时在一阶近似法中可将根号中的第二项忽略。

法线和向径之间的夹角由下式确定：

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{\frac{d\rho_H}{d\varphi}}{\rho_H} \quad (12)$$

这样一来，按照(5)式给定波形并由关系式(10)和(12)确定 $\Delta\varphi$ 和 μ 之后，就可按关系式(3)和(4)求出柔轮齿轴线各点相对刚轮齿轴线的轨迹方程式。同样可以求出柔轮齿廓各点的轨迹。此时应该认为柔轮的齿形同齿轴线是刚性联系的。这里不来引证这些方程式，因为在所叙述的基础上能够容易地得到它们。

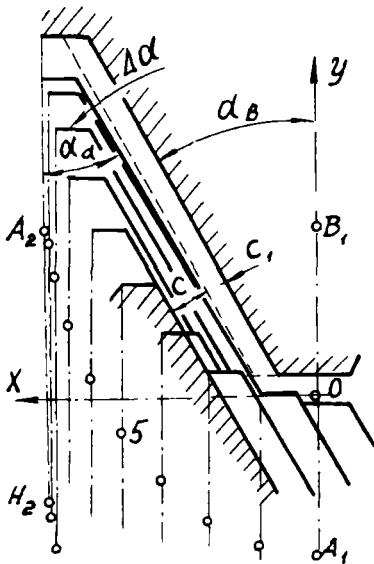


图3

对于多数的凸轮工艺形状和齿形所得到的轨迹方程式(3)和(4)是复杂的，并且难于解析分析。在这种情况下，可以使用下述的图解解析法。

给定柔轮中性层的方程式(5)后，对间隔 $5^\circ(0, 5, 10, \dots)$ 到 90° 的 φ 值按照关系式(10)和(12)来计算 $\Delta\varphi$ 和 μ 的数值。然后，按(3)和(4)求出 H 和 A 点的各坐标值。继之以很大的比例画出刚轮的齿，并按坐标值画出柔轮齿轴线(和齿形)的位置。同时将 Ox 轴转移到直径 d_o 的上面，也就是 Y_H 移动 $0.5d_o$ 。所得到的图形能定性地和定量地表征出凸轮旋转各个角度时的两个齿的啮合状况，或在对应四分之一波的弧上间隔 5° 配置的柔轮和刚轮齿的相对位置。

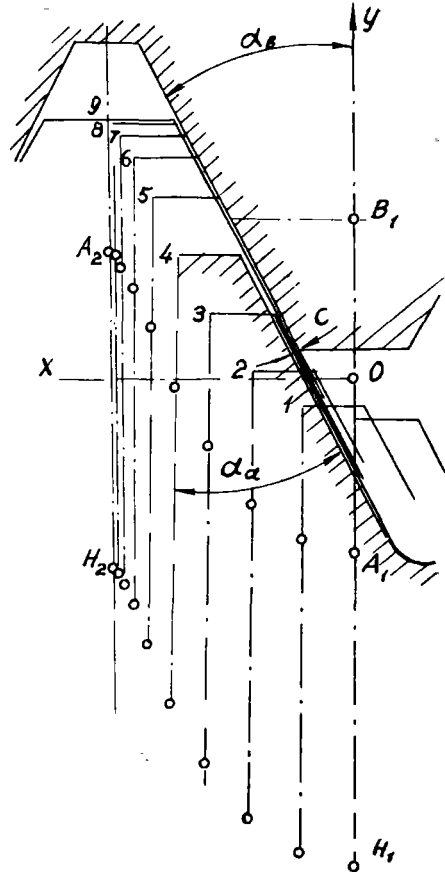


图4

图3表示的是当 $i_{k_0}^b = 100$, $HA = 0.8\delta$ 时, 发生器间隔 10° 旋转的柔轮齿相对刚轮齿的位置。齿形是按推荐^[2]选择的。柔轮的中性层是用方程式(6)描绘的。该方程式符合于用两个力作用的光滑环的拉伸。在图3上刚轮齿 B_1 和柔轮齿的第五个位置画有剖面线。由图可以看出, 在整个啮合期间, 在齿形之间沿法线方向具有等于 $C + C_1$ 的间隙。间隙 C_1 相当于柔轮的自由旋转(游隙)。在选择啮合游隙(间隙 C_1)时, 齿只是在 $\varphi = 90^\circ$ 时, 也就是在波峰处才处于啮合。

间隙 C 存在于其余的齿之间。该间隙变化于0到 $0.25m$ (m —模数)之间。因此, 当齿圈用两个力来变形时, 传动不能控制上述那些属于它自己的特性。

但是, 对于图3上的同一啮合参数, 可

以找到同时啮合齿数多的凸轮工艺廓形(图4)。这里, 间隙是在 $\varphi = 30 \sim 80^\circ$ 的弧上变化于 $0.05m$ 到0之间。

因此, 可以把谐波传动看作是具有柔性联系的凸轮—齿轮传动。上述方法便于啮合的综合。当给定凸轮形状和算出柔轮齿上的点相对刚轮的轨迹后, 便可选择出使多对齿处于啮合的齿形。

也可给定齿形再选择能达到多对齿啮合效果的柔轮的变形形状(凸轮形状)。图解解析法同时还查明了齿的干涉。上述方法对任何波数的传动都是正确的。同时轨迹是画在半个波上。

译自“Известия вузов

машиностроения” №2, 1965.