

相干光学计算机中的广义线性 信息处理机

摘要——广义光学信息处理机是根据这样一个观点来进行研究的，就是为了推导一个系统的方法，以便确定相干光学系统可以完成的线性运算。这篇论文介绍了一般的 n 面信息处理机的研究方法，它通过普通线性处理模型来表示所得到的系统。应用得到的广义积分核描述了目前充分了解的相干线性信息处理机，它是更为一般的 n 个面的信息处理机的一个简单例子。

说明了2个面的信息处理机相当于简单透镜的付里叶变换运算，而3个面信息处理机就是和卷积或相关运算有联系的了。4个面系统的核类似于模糊度函数，并且，当做出了关于一个光学平面的复数振幅透射函数的合理假设的时候，它表示矩形变换器的一个倾斜面。更为一般的 n 个面的核用积分形式表示，它的简单的物理实现仍在发展之中。

I. 前言

相干和非相干光学处理机广泛应用到模拟数据处理问题上。然而，当描述光学信息处理机所实现的运算的时候混合了各种术语。专门名词“光学信息处理机”和“光学计算机”可以同许多种系统和设备联系起来。不同的光学处理系统能完成的运算，可以从数学上描述为线性或非线性的，以及空间可变或空间不变的运算。主要的信息处理机可以是相干的或非相干的。在远景设想的广泛基础上，这篇论文局限于相干信息处理机完成线性运算的范围。

大多数线性处理模型本质上是形式上进行模拟。这个模拟结构通常可以用下面的积分方程表示：

$$\hat{f}(u, v) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) k(x, y; u, v) dx dy \quad (1)$$

函数 $f(x, y)$ 表示已知的输入函数，而函数 $k(x, y; u, v)$ 是表示特征的核，这个核是与有意义的专门处理运算相联系的。输出函数 $\hat{f}(u, v)$ 可以称为 $f(x, y)$ 的积分变换，卷积函数，相关函数，平滑估算量，预先估算量，等等，这取决于核的函数形式和下面所出现的处理问题。积分域有限的一些问题可

以通过定义一个合理光瞳函数，而把它吸收到核函数当中去。这个核函数也可称为格林函数，脉冲响应或点扩散函数，这取决于下文当中所出现的处理问题。

如图(1)所描述的从屏幕面上的孔径到空间点 P 的传播的迭加积分与等式(1)相类似，这极大地启发我们对光学计算方法的考虑。这个传播积分，即瑞利—索末菲积分由下式给出：

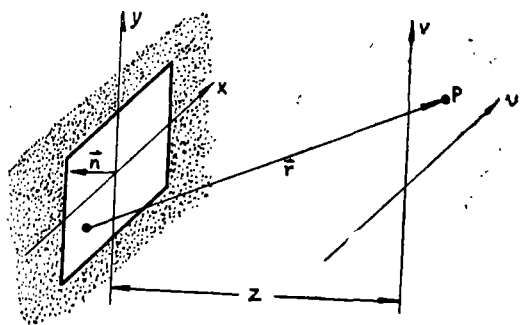


图1 在屏幕面上的孔径

$$e_2(u, v) = \frac{1}{j\lambda} \iint_{-\infty}^{\infty} e_1(x, y) (|r|)^{-1} \exp \{jk|r|\} \cos(n, r) dx dy \quad (2)$$

其中 $e_2(u, v)$ 表示图(1)中 $u-v$ 平面上的点 $P(u, v)$ 的标量场， $e_1(x, y)$ 是孔径面上的激发标量场， r 是从点 (x, y) 到点 P 的矢量， $|r|$ 是矢量的模， n 是孔径面的垂直矢量， $\cos(n, r)$ 是 n 与 r 的夹角的余弦， λ 是相干



场的波长, 而 k 是波数 $2\pi/\lambda$ 。如果适当的输入函数可以通过输入场来实现, 并且合成了与专门的数据处理运算相对应的核, 那末就可以在光学计算机上用模拟方法实现这个专门运算。这个核函数的合成一般要涉及使用位相和振幅掩模, 以及描述光学场传播的术语。那末输出函数就是输出面上的场。

有人作了相当大努力发展了上述范围内的各种各样的专门光学模拟信息处理机。然而, 建立一个体系或方法论方面几乎没有做出什么, 在这样的体系中取等式 (1) 形式的任意算子都是可以形成的。这一体系的存在从本质上讲就构成了光学计算机的程序设计方法。关于这一点, 除万德朗特 (Vander Lugt) 的工作外, 甚至连上述程序设计方法论的存在问题还基本上没有研究。本文讲述了为规划各种各样光学计算操作的方法论的推导问题。方法论显然依赖于所考虑的核的类型。为了简化所产生的核以及通过一般的光学元件所作的模索实现, 引进了改进型的万德朗特运算表示法。

II. 基 础

很多的光学系统完全可以用傍轴近似来表示, 这个近似把等式 (2) 简化成菲涅尔带积分:

$$e_2(u, v) = \frac{\exp\{jkz\}}{j\lambda z} \iint_{-\infty}^{+\infty} e_1(x, y) \cdot \exp\left\{j\frac{k}{2z}[(x-u)^2 + (y-v)^2]\right\} dx dy \quad (3)$$

对于文中所讨论的系统, 假定 (3) 式足以描述这个问题。

相干光学的基本假设是假设平面的或接近平面的光学元件, 如透镜, 孔径、摄影底片等等可以用复数振幅透射函数 (CATF) 来描述, 其特性是离开上述元件的场是入射场与特定的 CATF 的乘积。依照这个假设,

假定在每个面上都具有合适的 CATF, 从输出面向后一直到输入面相继书写等式 (3), 就可以对多面光学系统进行分析。为了合成所要求的核函数; 假设在任一个面上都可以放置任意的 CATF, 即使上述元件的实际实现是非常困难的。这个方法导致了对所考虑的光学信息处理机系统的基本限制的表述。

III 运算的表示法

根据万德朗特的文章, 函数 $\psi(x, y; s)$ 可以定义为:

$$\psi(x, y; s) \equiv \exp\left[\frac{jk}{2}s(x^2 + y^2)\right] \quad (4)$$

在这种情形下这个定义已推广, 以致允许 s 为复数值, 并仍然有长度倒数的量纲。这个复变量长度的定义类似于 Felsen 在其波束表示中所用的那样。简单的一维情形, $\psi(x; s)$ 就是 $\psi(x, 0; s)$ 。表 I 列出了函数 $\psi(x, y; s)$ 的性质。这个摘要很多方面与代数学类似, 而能够对函数 ψ 进行计算。这些计算通常用在光学系统分析和合成上。当假设 s 为不同的实数值时, 函数 ψ 可以解释为平面波, 球面波, 点信号沉, 线信号沉, 球面透镜, 或柱面镜。 s 为复数值时, 函数 ψ 的解释要涉及到高斯型波束和带有高斯型切趾的透镜。应用函数符 ψ , 等式 (3) 可以表示成:

$$e_2(u, v) = \frac{\exp\{jkz\}}{j\lambda} s \psi(u, v; s) \iint_{-\infty}^{+\infty} e_1(x, y) \psi(x, y; s) \cdot \exp\{-jks(ux + vy)\} dx dy \quad (5)$$

其中

$$s = z^{-1} \quad (6)$$

借助 (5) 式与表 I, 很多古典光学的问题可以通过较为机械的手法而得到解决和简化。举例来说, 我们考虑图 (2) 中 3 个面的光学系统, 其中第 2 个面上有一个焦距为 F 的正透镜。这个透镜的 CATF = $\psi(\xi, \eta, -f)$,

- 1) $\bar{\psi}(x, y; s) = \psi(x, y; -\bar{s})$
- 2) $\psi(-x, -y; s) = \psi(x, y; s)$
- 3) $\psi(x, y; s_1) \psi(x, y; s_2) = \psi(x, y; s_1 + s_2)$
- 4) $\psi(x, y; s_1) \bar{\psi}(x, y; s_2) = \psi(x, y; s_1 - \bar{s}_2)$
- 5) $\psi(cx, cy; s) = \psi(x, y; c^2 s)$
- 6) $\psi(x; s_1) \psi(x, y; s_2) = \psi(x; s_1 + s_2) \psi(y; s_2)$
- 7) $\psi(x, y; s) = \psi(y, x; s)$
- 8) $\psi(x-u, y-v; s) = \psi(x, y; s) \psi(u, v; s) \exp\{-jks(xu+yv)\}$
- 9) $\psi(x, y; s) = \psi(x; s) \psi(y; s)$
- 10) $\lim_{s \rightarrow 0} s \psi(x, y; s) = 0$
- 11) $\lim_{s \rightarrow 0} \psi(x, y; s) = 1$
- 12) $\lim_{s \rightarrow -\infty} \left(\frac{s}{j\lambda}\right)^{1/2} \psi(x; s) = \delta(x)$; 其中 $\{s\} \geq 0$
- 13) $\lim_{s \rightarrow 0} \left(-\frac{s}{j\lambda}\right) \psi(x, y; s) = {}^2\delta(x, y)$; 其中 $\{s\} \geq 0$
- 14) $\iint_{-\infty}^{\infty} \psi(x; s_1) \exp\{-jks_2 xu\} dx = \left(\frac{j\lambda}{s_1}\right)^{1/2} \psi\left(u; -\frac{s_2^2}{s_1}\right)$; 其中 $\{s\} \geq 0$
- 15) $\iint_{-\infty}^{\infty} \psi(x, y; s_1) \exp\{-jks_2(xu+yv)\} dx dy = \left(\frac{j\lambda}{s_1}\right) \cdot \psi\left(u, v; -\frac{s_2^2}{s_1}\right)$; 其中 $\{s\} \geq 0$

注: 上面带横线的为复数共轭; $k=2\pi/\lambda$

$f=F^{-1}$ 。从输出面到透镜, 接着从透镜面到输入面相继书写传播积分(5)式, 可以得出输出面上的场 $e_2(u, v)$:

$$\begin{aligned}
 e_2(u, v) = & \left(-\frac{s_2}{j\lambda}\right) \exp\{jks_2 z_2\} \\
 & \psi(u, v; s_2) \iint_{-\infty}^{\infty} \psi(\xi, \eta; -f) \\
 & \cdot \left[\left(-\frac{s_1}{j\lambda}\right) \exp\{jks_1 z_1\} \right. \\
 & \psi(\xi, \eta; s_1) \iint_{-\infty}^{\infty} e_1(x, y) \\
 & \cdot \psi(x, y; s_1) \exp\{-jks_1(\xi x \\
 & + \eta y)\} dx dy \\
 & \cdot \psi(\xi, \eta; s_2) \exp\{-jks_2(\xi u \\
 & + \eta v)\} d\xi d\eta \quad (7)
 \end{aligned}$$

其中, $e_1(x, y)$ 仍表示输入面的场, $z_1 = s_1^{-1}$ 是输入面与透镜面之间的距离, $z_2 = s_2^{-1}$ 是透

镜面与输出面之间的距离。通过对这个表达式的简单计算, 以及利用表 I 的性质, 万德朗特导出了成象条件:

$$s_1 + s_2 - f = 0 \longleftrightarrow \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{1}{F} \quad (8)$$

以及付里叶变换条件:

$$s_2 = f \longleftrightarrow z_2 = F \quad (9)$$

他也指出如果

$$s_1 = f \longleftrightarrow z_1 = F \quad (10)$$

变换面的位相误差可以消除。

(8)、(9)和(10)式的结果当然是熟知的,

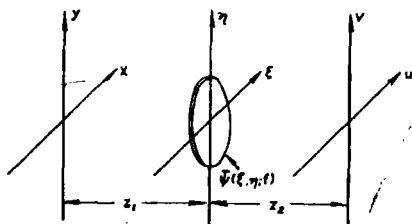


图2 3个面的单透镜光学系统

但相当重要的事实是, 它们可以通过对(7)式的机械的计算和应用表 I 的性质来获得。

IV. 广义 n 面核的介绍

上述例子的光学系统是三个光学面的非常特殊的系统, 并假定第二个面的 CATF 为透镜的 CATF。如果允许每个面的 CATF 是该面空间坐标的任意函数, 就得到了非常普遍的光学系统, 而如果增加包含光学元件的总面数, 光学系统就更带有普遍意义了。图(3)表示含有 n 个面的这种普遍光学系统。第 i 面的任意的 CATF 函数用 $h_i(x_i, y_i)$ 来表示。一个任意的 CATF 实际上可以不是物理上所能实现的, 然而, 这个假设可以对广义光学系统的基本限制进行研究。这个分析超出了用目前技术实现这一元件的可能性。

变量 x_i, y_i 是第 i 面的空间坐标, 第 i 面与第 $i+1$ 面之间的距离是 $z_i = s_i^{-1}$ 。输入面上的入射场用 $e_1(x_1, y_1)$ 表示, 而从输出面出来的场用 $e_n(x_n, y_n)$ 表示。在傍轴的假设下, 对每个面到下一面的传播用等式(5)进行描述, 并且运用离开第 i 面的场是入射场与 h_i 的乘积这样一个事实, 可以对图(3)的光学系统用数学方式进行描述。按照这个方法, 经过一些计算, 得到的是:

$$\begin{aligned}
 e_n(x_n, y_n) = & \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} e_1(x_1, y_1) \{ h_1(x_1, y_1) \\
 & \psi(x_1, y_1; s_1) h_n(x_n, y_n) \\
 & \cdot \psi(x_n, y_n; s_{n-1}) \\
 & [\prod_{i=1}^{n-1} (j\lambda z_i)^{-1} \exp(jkz_i)] \\
 & [\prod_{m=2}^{n-1} h_m(x_m, y_m) \psi(x_m, y_m; \\
 & s_{m-1} + s_m)] \\
 & [\prod_{p=1}^{n-1} \exp[-js_p(x_p x_{p+1} \\
 & + y_p y_{p+1})]] dx_2 dy_2 \cdots \\
 & dx_{n-1} dy_{n-1} \} dx_1 dy_1
 \end{aligned} \quad (11)$$

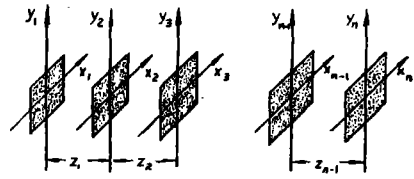


图3 n 个面光学系统

这可与普通的处理积分(1)相比较。(11)式的入射场 $e_1(x_1, y_1)$ 相当于(1)式的输入函数 f , 而(11)式的剩余项表示 n 面光学系统的核。于是, 所得到的 n 个面的光学系统的核 $kg_n(x_1, y_1; x_n, y_n)$ 的一般形式为

$$\begin{aligned}
 & kg_n(x_1, y_1; x_n, y_n) \\
 = & \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} h_1(x_1, y_1) \psi(x_1, y_1; s_1) \\
 & \cdot h_n(x_n, y_n) \psi(x_n, y_n; s_{n-1}) \\
 & [\prod_{i=1}^{n-1} (j\lambda z_i)^{-1} \exp(jkz_i)] \\
 & \cdot [\prod_{m=2}^{n-1} h_m(x_m, y_m) \psi(x_m, y_m; s_{m-1} + s_m)] \\
 & \cdot [\prod_{p=1}^{n-1} \exp[-js_p(x_p x_{p+1} + y_p y_{p+1})]] \\
 & \cdot dx_2 dy_2 \cdots dx_{n-1} dy_{n-1}
 \end{aligned} \quad (12)$$

这个一般核就称为广义 n 面核。依据实现它们所要求的最少面数, 对核进行讨论和分类是很方便的。至少要求 m 个面来执行的函数形式的核将称为 m 面最小核。

再考虑(12)式, 注意, 因为每个 h_i 是任意的, 在这里, 函数符 ψ 并不象在上一节的例子中一样是有帮助的。而引入了另一种符号:

$$A_n = \prod_{i=1}^{n-1} (j\lambda z_i^{-1})^{-1} \exp\{jkz_i\} \quad (13a)$$

$$k_l^{(n)} = \begin{cases} h_1(x_1, y_1) \psi(x_1, y_1; s_1), & l=1 \\ h_l(x_l, y_l) \psi(x_l, y_l; s_{l-1} + s_l), & l=2, n \\ h_n(x_n, y_n) \psi(x_n, y_n; s_{n-1}), & l=n \end{cases} \quad (13b)$$

及

$$\begin{aligned}
 K_l^{(n)}(\xi, \eta) = & \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} k_l^{(n)}(x_1, y_1) \exp \\
 & \{-jk(x_1 \xi + y_1 \eta)\} dx_1 dy_1
 \end{aligned} \quad (13c)$$

这是(12)式的简化形式。(13b)式的上标表明了·这个定义适用于广义 n 面核,而(13c)式同样。据观察这个上标可以略去,因为在后面的任何方程中不会有含糊不清的结果。(13c)式是一个付里叶变换,只不过变量进行一下换算。其逆变换的公式是

$$k_l(x_l, y_l) = \lambda^{-2} \iint_{-\infty}^{\infty} K_l(\xi, \eta) \exp\{jk(\xi x_l + \eta y_l)\} d\xi d\eta \quad (13d)$$

这个符号与函数符 ψ 一样,没有多大必要,它未必能简化描述光学传播的积分。虽然如此,它的确简化了广义 n 面核的表面复杂性,并提供了一个能更容易从数学上进行分析和计算的核的形式。运用(13)式的符号,对于含有偶数个光学面的光学系统,可知(12)式成为:

$$\begin{aligned} & kg_{2n}(x_1, y_1; x_{2n}, y_{2n}) \\ &= A_{2n} k_1(x_1, y_1) k_{2n}(x_{2n}, y_{2n}) \\ &\cdot \iint_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{l=1}^{n-1} K_{2l}(s_{2l-1}x_{2l-1} \\ &+ s_{2l}x_{2l+1}, s_{2l-1}y_{2l-1} + s_{2l}y_{2l+1}) \\ &\cdot k_{2l+1}(x_{2l+1}, y_{2l+1})] \exp \\ &\{-jks_{2n-1}(x_{2n-1}x_{2n} + y_{2n-1}y_{2n})\} \\ &\cdot dx_3 dy_3 dx_5 dy_5 \dots dx_{2n-1} dy_{2n-1} \quad (14a) \end{aligned}$$

为了符号的一致性,其中 $\prod_{l=1}^0$ 取作单位1。对于含有奇数个光学面的系统,(12)式成为:

$$\begin{aligned} & kg_{2n+1}(x_1, y_1; x_{2n+1}, y_{2n+1}) \\ &= A_{2n+1} k_1(x_1, y_1) k_{2n+1}(x_{2n+1}, y_{2n+1}) \\ &\cdot \iint_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{l=1}^n K_{2l}(s_{2l-1}x_{2l-1} \\ &+ s_{2l}x_{2l+1}, s_{2l-1}y_{2l-1} + s_{2l}y_{2l+1})] \\ &\cdot \left[\prod_{m=1}^{n-1} k_{2m+1}(x_{2m+1}, y_{2m+1}) \right] dx_3 dy_3 dx_5 dy_5 \\ &\dots dx_{2n-1} dy_{2n-1} \quad (14b) \end{aligned}$$

其中 $\prod_{m=1}^0$ 又取作单位1。

为了合成核函数, k_i 以及 K_i 都可以认为是任意的,这是因为每个 h_i 是任意的。在上述的两个等式中,广义核含有这样一些

因子,例如非序列常数,输入面坐标的任意函数,以及输出面坐标的任意函数。因此,不同的核实际上是用(14)式的积分来表示其特性的,2个面与3个面的情形除外,它们不是积分。依据这些表达式对广义核可进行充分的讨论。若一个广义 n 面核具有从全 $\mathcal{D}$ 广义核中分析出的公共因子,它将称为广义 n 面核的特征 $\mathcal{D}$ 分,并用 $k_{c,n}(x_1, y_1; x_n, y_n)$ 表示。

在描述相干光学系统的核时,关于(14)式的普遍性应做一些有价值的评注。另一些关于光学系统的数学表示可以导致从表面上看比广义 n 面核的形式更为普遍的形式。例如, Bryngdahl 和其它人描述过的完成几何畸变的光学系统;以及 Dean 等人描述过的使用体积全息图完成空间可变运算的光学系统。虽然描述这些系统的核比面数相同的光学系统的广义 n 面核更为普遍,但一般的事实是上述系统所用的数学描述仅仅对某些带宽乘积是成立的,它要比通常相干光学系统的带宽乘积小得多。要使其更简化,一个描述虽不如对传播过程所作的那样严格,但已足够了,这时可以期望其形式比(14)式更带普遍性的核是可以实现的。另一个值得注意的是,虽然对带有反馈的相干光学系统已有了一些兴趣,但方程(14)不能充分描述这种系统。

V. 广义2面核和3面核

有意义的是,在光学系统中经常迁到的广义 n 面核是2面最小核和3面最小核。而实际上,这些核更经常的是出现在大于2个面和3个面的光学系统中。

因为2个面的情形不是积分,广义2面核是由(14a)得到的。

$$\begin{aligned} & kg_2(x_1, y_1; x_2, y_2) \\ &= A_2 k_1(x_1, y_1) k_2(x_2, y_2) \exp \\ &\{-jks_1(x_1x_2 + y_1y_2)\} \quad (15a) \end{aligned}$$

这个广义核的特征 $\mathcal{D}$ 分是



30097540S

$$k_{e2}(x_1, y_1; x_2, y_2)$$

$$= \exp\{-jks_1(x_1x_2 + y_1y_2)\} \quad (15b)$$

这显然是二维付里叶变换核。如果希望对入射场作付里叶变换，就必须迫使函数 k_1 和 k_2 为单位1。根据(13b)式和表 I 中的第(3)和第(10)个性质，如果

$$h_1(x_1, y_1) = \bar{\psi}(x_1, y_1; s_1) \quad (16a)$$

$$\text{和 } h_2(x_2, y_2) = \bar{\psi}(x_2, y_2; s_1) \quad (16b)$$

则函数 k_1, k_2 为单位1。可以认为这就是焦距为 S_1^{-1} 的透镜。

于是2面最小核是付里叶变换核，并证明了相干光学系统具有熟知的付里叶变换的能力。当然，可以选择与上面所指出的那些不相同的 h_1 和 h_2 ，用来改进 h_1 和 h_2 以及整个核。

值得注意的是，虽然这个形式的确描述了相干光学系统所能产生的核的函数形式，但是它并没有使这种核的实际实现简化。特别指出的是，上述2个面的付里叶变换器要求相应于式(16)的两个透镜。象第Ⅲ节所讨论的那样这个透镜实际上非常容易实现。然而，在第Ⅲ节所描述的光学系统是3个面的系统。这个2个面的系统可以看成是3个面系统的退化情形，其中 h_1 所描述的变换透镜可以被移动到输入面上，即图(2)中的距离 z_1 变为0。于是要求另一个透镜 h_2 消除输出面上产生的相位误差。

广义3面核由(14b)得出：

$$\begin{aligned} & kg_3(x_1, y_1; x_3, y_3) \\ &= A_3 k_1(x_1, y_1) k_3(x_3, y_3) \\ &\cdot K_2(s_1 x_1 + s_2 x_3, s_1 y_1 + s_2 y_3) \end{aligned} \quad (17a)$$

这个广义核的特征方程是

$$\begin{aligned} & k_{e3}(x_1, y_1; x_3, y_3) \\ &= K_2(s_1 x_1 + s_2 x_3, s_1 y_1 + s_2 y_3) \end{aligned} \quad (17b)$$

这是基本的相关类型的核。简单地重新确定输入（输出）面变量的正方向，这个核将成为卷积形式。具有卷积核的时间系统称作时间不变的。相类似，带有相关/卷积核的光学系统称作空间不变的。任一个非常有意义的数据处理模型可以用相关/卷积形式的核来描

述。相干光学处理问题最初所关注的一些成果就是基于对相干光学系统能够完成相关/卷积运算的认识。至今，大多数线性相关处理运算仍是这种基本形式。带有附加因子的相关/卷积类型的核，输入面变量的任意函数和输出面变量的任意函数，都没有表现出附加概念的复杂性。虽然这样的核是3面最小核，但在3个面这样少的系统中，能够实现这些核或通常的相关/卷积核的系统实际上是很少的。

作为利用这些想法的一个例子，考虑核：

$$k(x, y; u, v) = \frac{\delta(y-v)}{\pi(u-x)} \quad (18)$$

这明显是3面最小核，且相应于线性处理积分；

$$\hat{f}(u, v) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x, v)}{x-u} dx \quad (19)$$

这可以与函数 f 的 Hilbert 变换 $\hat{f}_H$ 相比较：

$$\hat{f}_H(u) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-u} dx \quad (20)$$

显然，(19)式的处理作了函数 $f(x, v)$ 的 Hilbert 变换。对每个 v 值来说，它是不同的函数，这说明相干光学系统具有实现一维处理运算的多通道或并行处理的能力。做下述关系：

$$(x_1, y_1) \longleftrightarrow (-x, -y) \quad (21a)$$

$$(x_3, y_3) \longleftrightarrow (u, v) \quad (21b)$$

$$\text{及 } e_1(x_1, y_1) \longleftrightarrow f(-x, -y) \quad (21c)$$

前面的核成为

$$\begin{aligned} & kg_3(x_1, y_1; x_3, y_3) \\ &= \frac{\delta(y_1 + y_3)}{\pi(x_1 + x_3)} \end{aligned} \quad (22)$$

所要求的处理积分成为：

$$e_3(x_3, y_3) \propto \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e_1(-x_1, y_3)}{x_1 + x_3} dx_1 \quad (23)$$

这里，可以忽略比例常数，因为它们仅对结

果的振幅换算了一下。比较 (22) 式与 (17) 式, 就很清楚实现 Hilbert 处理机所要求的函数关系式是:

$$k_1(x_1, y_1) = \text{常数} \quad (24a)$$

$$k_3(x_3, y_3) = \text{常数} \quad (24b)$$

$$K_2(s_1 x_1 + s_2 x_3, s_1 y_1 + s_2 y_3) \propto \frac{\delta(y_1 + y_3)}{x_1 + x_3} \quad (24c)$$

这里又忽略了比例常数。根据 (13b) 式, 如果

$$h_1(x_1, y_1) = \bar{\psi}(x_1, y_1; s_1) \quad (25a)$$

$$h_3(x_3, y_3) = \bar{\psi}(x_3, y_3; s_2) \quad (25b)$$

则 (24a), (24b) 是满足的。

据观察, 显然只有当

$$s_1 = s_2 \quad (25c)$$

(24c) 式才可能满足。如果这个等式被满足, 由 (13b), (13d) 推出

$$h_2(x_2, y_2) = \bar{\psi}(x_2, y_2; 2s_1) \operatorname{sgn}(x_2) \quad (25d)$$

其中

$$\operatorname{sgn} x \equiv \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases} \quad (26)$$

(25) 式描述了实现 Hilbert 变换所必须的三个面的相干光学系统。然而, 可以找到与 (25) 式所描述的运算等价的其他系统。(25) 式所描述的系数由图 (4) 表示出来。

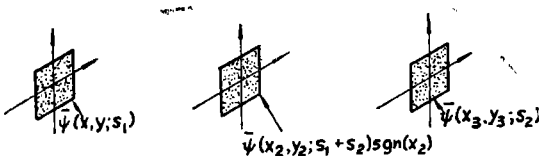


图 4 3 个面的 Hilbert 变换

这个例子证明在光学系统中核的合成方面, 广义 n 面核的方法的潜在有效性。由 (18) 式给出的核函数, 第一步是识别出 3 面最小核, 然后通过光学系统的变量重新写出这个核。其次是确定 k_1 , K_2 和 k_3 的函数形式, 由此再确定 h_1 , h_2 和 h_3 , 这给出了实现处理要求的光学系统的描述。因为对所讨论的一类光学相关器我们是了解的, 所以这些

程序式的审查, 对于这个例子没有多大意义。然而, 它们确实指出了一个很适用的基本方法论, 甚至对最小面数增加的情况也是适用的。利用这个方法企图合成形式非常复杂的核的问题, 困难在于如何确定所给定的核能否在光学上实现, 在于如何确定对于实现所要求的最小光学面数。

VI. 一个 4 面核的例子

分别是 2 面最小核和 3 面最小核的光学付里叶变换系统和相关/卷积系统早就用在各种应用方面了。然而, 广义核的表达式 (14) 指出这个核的势函数随面数的增加而更复杂了, 而这些更加复杂的核基本上没有探索利用。其原因, 正如上节的结尾所指出的那样, 缺乏一定的技术来确定核是否可在光学上实现, 以及确定所要求的光学面数。任意给定的核对于某些特殊的 m 值, 或者是在光学上实现的 m 面最小核, 或者是不能实现的, 这一核的分类法似乎是所希望的。

能够证明, 在 (14) 式的描述中可以获得异常的光学核。要做到这一点, 将相当详细地研究一个可能的 4 面最小核的一个例子。

4 面最小核当然是下一个合乎逻辑的研究步骤。根据 (14a) 式, 广义 4 面核有这样的形式:

$$\begin{aligned} & kg_4(x_1, y_1; x_4, y_4) \\ &= A_4 k_1(x_1, y_1) k_4(x_4, y_4) \\ & \iint_{-\infty}^{\infty} K_2(s_1 x_1 + s_2 x_3, s_1 y_1 + s_2 y_3) \\ & \cdot k_3(x_3, y_3) \exp\{-jks_3(x_3 x_4 \\ & + y_3 y_4)\} dx_3 dy_3 \end{aligned} \quad (27a)$$

这个核的特征下分是

$$\begin{aligned} & k_{c,4}(x_1, y_1; x_4, y_4) \\ &= \iint_{-\infty}^{\infty} K_2(s_1 x_1 + s_2 x_3, s_1 y_1 + s_2 y_3) \\ & \cdot k_3(x_3, y_3) \cdot \exp\{-jks_3(x_3 x_4 \\ & + y_3 y_4)\} dx_3 dy_3 \end{aligned} \quad (27b)$$

雷达模糊度函数 $\chi(\tau, \phi)$ 定义作

$$\chi(\tau, \phi) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \bar{u}(t+\tau) \exp\{-j2\pi\phi t\} dt \quad (28)$$

其中上边的横线仍表示复数共轭。因此，4 维交叉模糊函数 $\chi_{uv}(\tau_1, \tau_2, \phi_1, \phi_2)$ 可以定义为

$$\begin{aligned} \chi_{uv}(\tau_1, \tau_2, \phi_1, \phi_2) &\equiv \iint_{-\infty}^{\infty} u(t_1, t_2) \bar{v}(t_1 + \tau_1, t_2 + \tau_2) \exp\{-j2\pi(\phi_1 t_1 + \phi_2 t_2)\} dt_1 dt_2 \end{aligned} \quad (29)$$

在 (27b) 式和 (29) 式之间作出这样一些联系：

$$u(\xi, \eta) \rightarrow k_3(\xi_1, \eta) \quad (30a)$$

$$\bar{v}(\xi, \eta) \rightarrow K_2(s_2 \xi, s_2 \eta) \quad (30b)$$

$$(t_1, t_2) \rightarrow (x_3, y_3) \quad (30c)$$

$$(\tau_1, \tau_2) \rightarrow (s_1 x_1/s_2, s_1 y_1/s_2) \quad (30d)$$

$$(\phi_1, \phi_2) \rightarrow (s_3 x_4/\lambda, s_3 y_4/\lambda) \quad (30e)$$

显然 k_{uv} 是上面介绍的交叉模糊度函数的正确形式。

详细叙述这样一个例子，其第二面的 CATF 为一个特殊函数。具体讲，要求

$$h_2(x_2, y_2) = \exp\left\{-j\frac{k}{2}(fx_2^2 + gy_2^2 + 2hx_2y_2)\right\} \quad (31a)$$

其中， f, g, h 是常量。CATF 的选择多少带点任意性。这是很平常的，因为所要求的计算十分简单，不过在这个约束内可以完成的运算有些新奇。稍微做一些计算，(31a) 可以写成：

$$\begin{aligned} h_2(x_2, y_2) &= \bar{\psi}(x_2/\sqrt{2} + y_2/\sqrt{2}; 2h) \\ &\cdot \bar{\psi}[x_2; (f-h)] \bar{\psi}[y_2; (g-h)] \end{aligned} \quad (31b)$$

上面的第二和第三个 ψ 函数可以认为是分别与焦距 $(f-h)^{-1}$ ， $(g-h)^{-1}$ 的柱面镜相对应的函数，而且分别是沿 x_2 轴， y_2 轴弯曲的。第一项是焦距为 $(2h)^{-1}$ 的柱面镜。若注意到，当从 x_2 轴反时针旋转 45° 得出 x 轴，CATF $\bar{\psi}(x_2; 2h)$ 就成为 (x_2, y_2) 坐标系的 $\bar{\psi}(x_2/\sqrt{2} + y_2/\sqrt{2}, 2h)$ ，就证实了这一

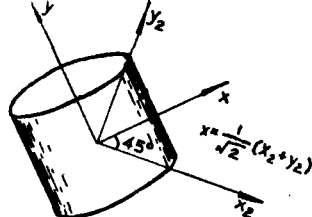


图5 坐标系旋转引起的柱面镜旋转

点，如图(5)所示。于是上述形式的 CATF 可以想象为具有指定焦距，以及在 (x_2, y_2) 面上具有指定方向的三个柱面镜的合成。

从 (31a)，(31b) 及表 I 中的第(3)，第(9)个性质，推得：

$$k_2(x_2, y_2) = \bar{\psi}(x_2; r) \bar{\psi}(y_2; s) \exp\{-jkt x_2 y_2\} \quad (32)$$

$$\text{其中 } r = f - s_1 - s_2 \quad (33a)$$

$$s = g - s_1 - s_2 \quad (33b)$$

$$t = h \quad (33c)$$

那么根据 (13c) 及两次运用表 I 中的第(14)个性质，可以证明：

$$\begin{aligned} K_2(\xi, \eta) &= (j\lambda)(rs \\ &- t^2)^{-1/2} \bar{\psi}\left(\xi, \frac{s}{rs-t^2}\right) \bar{\psi}\left(\eta, \frac{r}{rs-t^2}\right) \exp \\ &\left\{-jk\left(\frac{t}{rs-t^2}\right)\xi\eta\right\} \end{aligned} \quad (34)$$

这个例子的核用 $ke(x_1, y_1; x_4, y_4)$ 表示，可以用上面的表达式(27a)把它简化。为此，首先引进一些符号是有益的。

$$\begin{aligned} \tilde{k}_1(x_1, y_1) &= k_1(x_1, y_1) \exp\left\{\frac{jk s_1^2}{2(rs-t^2)}(sx_1^2 + ry_1^2 \right. \\ &\left. - 2tx_1y_1)\right\} \end{aligned} \quad (35a)$$

$$\begin{aligned} \tilde{k}_3(x_3, y_3) &= k_3(x_3, y_3) \exp\left\{\frac{jk s_2^2}{2(rs-t^2)}(sx_3^2 + ry_3^2 \right. \\ &\left. - 2tx_3y_3)\right\} \end{aligned} \quad (35b)$$

$$a_1 = s_1 s_2 [s_3(rs-t^2)]^{-1}(-s, t) \quad (35c)$$

$$a_2 = s_1 s_2 [s_3(rs-t^2)]^{-1}(t, -r) \quad (35d)$$

$$r_1 = (x_1, y_1) \quad (35e)$$

$$B = A_4(j\lambda)(rs - t^2)^{-1/2} \quad (35f)$$

并假定 $\tilde{k}_3$, K_3 可通过(13c)和(13d)式互相联系起来。经过一些冗长的但直接了当的计算之后, 就知道这个例子的核成为:

$$\begin{aligned} & ke(x_1, y_1; x_4, y_4) \\ &= B\tilde{k}_1(x_1, y_1)k_4(x_4, y_4) \\ &\cdot \tilde{K}_3[s_3(a_1r_1 + x_4), s_3(a_2r_1 + y_4)] \end{aligned} \quad (36a)$$

函数 $\tilde{k}_1, k_4, \tilde{K}_3$ 可以认为是任意的, 因为它们最终总需要依赖于分别和 h_1, h_4, h_3 相联系的任意的 CATF。因此, k_3 的前三个因子可以认为是一般的常数, 输入面坐标的任意函数和输出面坐标的任意函数。这个例子当中有意义的一项明显是:

$$\begin{aligned} & \tilde{k}_e(x_1, y_1; x_4, y_4) \\ &= \tilde{K}_3[s_3(a_1r_1 + x_4), s_3(a_2r_1 + y_4)] \end{aligned} \quad (36b)$$

这一项类似于相关/卷积类型的核, 它是 3 面最小核的特征下分 (见(17b))。然而, 这种情形是由 a_1 和 a_2 确定的输入面变量的线性组合与输出面变量之间的卷积/相关。如果 a_1 和 a_2 是正交的, 旋转输入面坐标, 其中一个坐标也许要作一些比例缩放, 使得这个核的形式本质上与广义 3 面核是恒等的。这个核的有意义的方面是这样的, 对于以倾斜坐标给出的数据的相关/卷积类型的处理提供了以直角坐标显示的输出。

我们假定有一个数据, 本来是由倾斜坐标的函数表示的, 这个坐标系与图(6)中 (ξ, η) 相类似, 而且希望作相关型处理。这就是说, 假定所要求的核是这样的形式:

$$\begin{aligned} & k(\xi, \eta; x_4, y_4) \\ &= k(\xi + x_4, \eta + y_4) \end{aligned} \quad (37)$$

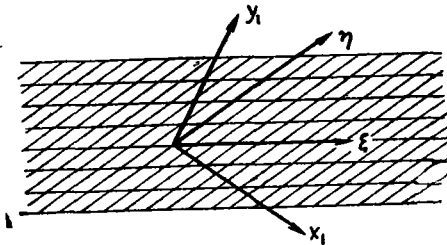


图 6 输入面上的倾斜坐标系

为方便起见, 输出变量是用 x_4, y_4 表示的。这里予先说明输出面是直角坐标。

再考虑(36b)式的 $\tilde{k}_e$, 注意, 只要把 r_1 写成:

$$r_1 = \xi\hat{\xi} + \eta\hat{\eta} \quad (38)$$

其中 $\hat{\xi}, \hat{\eta}$ 分别为 ξ, η 方向的单位矢量, $\tilde{k}_e$ 就可以用输入面坐标 ξ, η 来表示。于是这个例子的核可重写为

$$\begin{aligned} & \tilde{k}_e(\xi, \eta; x_4, y_4) \\ &= \tilde{K}_3[s_3(\xi a_1 \cdot \hat{\xi} + \eta a_1 \cdot \hat{\eta} + x_4), s_3(\xi a_2 \cdot \hat{\xi} + \eta a_2 \cdot \hat{\eta} + y_4)] \end{aligned} \quad (39)$$

这个核与(37)式相比较, 我们可以看到, 如果下面四个等式

$$a_1 \cdot \hat{\xi} = 1 \quad (40a)$$

$$a_1 \cdot \hat{\eta} = 0 \quad (40b)$$

$$a_2 \cdot \hat{\xi} = 0 \quad (40c)$$

$$a_2 \cdot \hat{\eta} = 1 \quad (40d)$$

都满足, 则(37)式的核是可以实现的。这意味着向量 $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{\xi}, \hat{\eta}$ 必然有图(7)所示的相互关系。如果 α 是 ξ, η 间的夹角, 由图(7)可以看到, 如果

$$|a_1| = \csc \alpha \quad (41a)$$

$$|a_2| = \csc \alpha \quad (41b)$$

$$a_1 \cdot a_2 = \csc \alpha \cot \alpha \quad (41c)$$

则(40)式是满足的。利用确定 a_1, a_2 的参数 $-r, s, t, s_1, s_2$ 及 s_3 , 上述等式的这些约束成为

$$r = s \quad (42a)$$

$$t = s[\sec \alpha \pm \tan \alpha] \quad (42b)$$

$$\begin{aligned} & s_1 s_2 (s^2 + t^2)^{1/2} [s_3 (s^2 - t^2)]^{-1} \\ &= \csc \alpha \end{aligned} \quad (42c)$$

这些等式是在(35c)和(35d)上应用约束(41)式而产生的。总是可以选择参数, 以致满足等式(42)。于是在这个例子的 4 面光学系统中, 如下形式的核

$$\begin{aligned} & \tilde{k}_e(\xi, \eta; x_4, y_4) \\ &= \tilde{K}_3[s_3(\xi + x_4), s_3(\eta + y_4)] \end{aligned} \quad (43)$$

可以用倾斜坐标 ξ, η 来实现。

为了对这个例子作更深入一些说明, 假定希望合成一个核

$$k(\xi_1 \eta_1, x_4, y_4) \propto {}^2\delta(\xi + x_4, \eta + y_4) \quad (44a)$$

其中 ${}^2\delta$ 是两维狄拉克 δ 函数。利用这个核可以使数据恰当地倾斜变形,也可使普通目标倾斜变形,如图(8)所示。在这个例子中实现这个核,除了(44)式要满足之外,还要求:

$$\tilde{K}_3[s_3(\xi + x_4), s_3(\eta + y_4)] \propto {}^2\delta(\xi + x_4, \eta + y_4) \quad (44b)$$

运用(13b), (13d) 和(35d), 如果第三个面的CATF由下式给出:

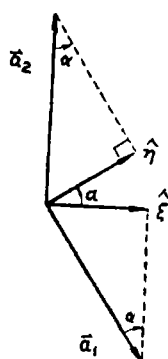


图7 $a_1, a_2, \hat{\xi}, \hat{\eta}$ 间的几何关系

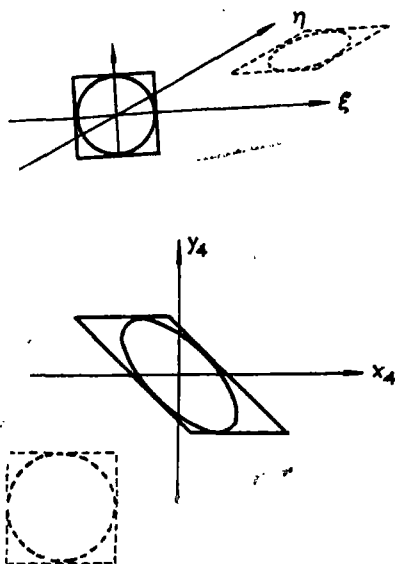


图8 两个类似目标的4面核
 $\delta(\xi + x_4, \eta + y_4)$ 的运算

$$h_3(x_3, y_3)$$

$$= \exp \left\{ -\frac{jk}{2} \left[\left(\frac{s_2^2 s}{rs - t^2} - s_2 - s_3 \right) x_3^2 + \left(\frac{s_2^2 r}{rs - t^2} - s_2 - s_3 \right) y_3^2 - \left(\frac{2s_2^2 s}{rs - t^2} \right) x_3 y_3 \right] \right\} \quad (45a)$$

则可以证明(44b)式是满足的。这在形式上与 h_2 等价,它是第二个面的CATF,已在(31a)式中给出。因此可以认为这个CATF是由三个柱面镜的合理组合产生的。

这个例子当然不能构成对广义4面核进行的彻底讨论,因为第二个面的CATF是特殊形式的函数。虽然,对广义 n 面核来说,其中 n 大于3,这个处理有些困难,但这个例子的确说明了这些更复杂的系统似乎可以把光学上能完成的各种处理运算加以扩充。因此,对这些广义 n 面核作更深入的研究看来是有理由的。

Ⅶ 结 论

我们已研究了光学合成广义线性处理机元件的方法。这个方法的推导涉及到一个能导出模拟数据处理方程的任意 n 面核的普通方法论。因为人们必然受到物理法则的限制,此法则影响光学传播的表示方法,所以一般方法实现任意的核是不可能的。尽管如此,还是非常成功地利用了一些很简单的广义 n 面核,这是很清楚的。本文推导和说明的这个方法论确实指出了更完善的线性处理系统可以用现在通行的光学元件研制出来。通过矩形面翻转倾斜的4面核的例子及更广泛的交叉模糊函数类型的核的例子就了解这一点。

在企图扩充光学计算机原理时,看来需要发展几个有密切关系的领域。首先,要求一个解释广义 n 面核的物理及分析含义的最直接了当的方法。其次,对于确定特殊核的可实现问题,必须有一套系统的技术。最后,假定核是可实现的,需要一个确定适当

的光学系统的合理方法。

描述光学系统所存在的一个问题是传播积分的非常麻烦的自然特性。万德朗特的符号表示法确实有助于这些积分的计算，并且有时这项技术在核的合成方面是很有用的。然而，在人们想要考虑一个不是简单的 ψ 函数所表示的CATF时，这个表示法的功能减少了，特别是作为合成核的工具来说更是如此。看来更为普遍的 ψ 函数，它类似于本文所提出的模型，将是积分形式的。然而这个概念有待更进一步的研究。

在(13b)，(13c)及(13d)中介绍的 k_n ， K_n 函数有助于获得一个合理的广义 n 面核

的简单表示。然而，这些核的特征 π 分，至少在这个符号表示法中，由于其积分形式，它是很难作物理解释的。也许用一些辅助的或不同的符号表示法，这些核的解释就不太困难了，而且允许对5面和更高阶的系统做一些现成的研究。在这一点上，似乎更深入的分析简化不是马上能做到的，人们必须用(14)式给出的形式继续研究。

在任何情形下，广义 n 面核的更进一步的研究将导致广义光学计算机的程序设计技术。这的确将使人们能进一步的利用光学数据处理机的巨大潜力。

(赵宝庆 译 速小靖 校)