

# 关于具有不对称的扩散函数的光学系统成像特性的讨论

朱 延 彬

**提要** 文中对具有不对称的扩散函数的光学系统成的直线像及锐边像的能量分布函数进行了推导之后做了一些讨论。

## 一、具有不对称的扩散函数的光学系统成的直线像

前面对直线像的能量分布函数的表示式的推导是建立在光学系统的线扩散函数是对称的基础上得到的,这是因为在描写光学系统的线扩散函数时,无论是对一个简单的光学镜头还是对由若干个参与成像的诸环节,均是采用:对称分布的高斯函数。但是,对于一个实际应用的光学系统,往往因为下述原因使得这个光学系统具有不对称的线扩散函数:<sup>[1][2]</sup>

(1) 光学系统有不对称的像差,特别是轴外慧差;

(2) 即使光学镜头的扩散函数是对称的,但是由于参与成像的诸环节中有一个或几个环节的线扩散函数是不对称的(例如有非线性的像移存在),则整个系统的扩散函数亦将变得不对称。

对于这样一个具有不对称的线扩散函数的光学系统成的直线像的能量分布函数经常因为函数过于复杂而使得卷积积分较难进行,因此,如能把此种不对称的线扩散函数分解或展开为两个或更多个简单的函数的代数和,那么问题的解决就要容易得多。假定不对称的线扩散函数 $y(x)$ 为

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x), \quad (1)$$

它和物面函数的 $B(\xi)$ 的卷积积分为

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} y(x-\xi) \cdot B(\xi) d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [y_1(x-\xi) + y_2(x-\xi)] \cdot B(\xi) \cdot d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} y_1(x-\xi) \cdot B(\xi) \cdot d\xi \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} y_2(x-\xi) \cdot B(\xi) \cdot d\xi. \quad (2) \end{aligned}$$

(2) 式的物理意义可以理解为:如果把光学系统的扩散函数展开或分解为两个(或者更多个)函数的代数和,则像的能量分布函数相当于由此两个(或者更多个)函数所表征的光学系统成的像的能量分布函数的代数和。

Roland V. Shack 曾把一个不对称的线扩散函数分解为奇函数和偶函数两部分(图1所示),<sup>[1]</sup> Kenro Miyamoto 则把不

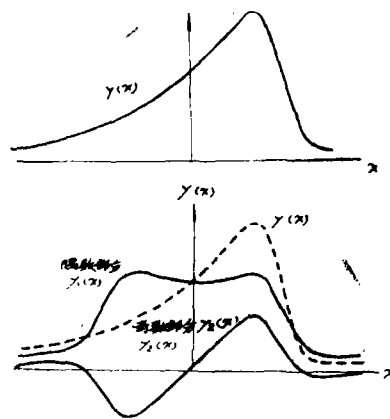


图 1

对称的线扩散函数用两个高斯函数的代数和来表示 (图 2 所示)。<sup>[2]</sup>

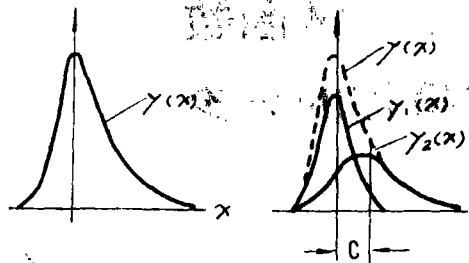


图 2

假定光学系统的线扩散函数的表示式为

$$y(x) = A_1 e^{-x^2/2\sigma_1'^2} + A_2 e^{-(x-c)^2/2\sigma_2'^2} \quad (3)$$

显然, (3) 式中, 当  $c=0$  时, 表明此扩散函数  $y(x)$  仍是对称的, 它是由两部分组成, 第一部分是弥散元盘的中心, 它的能量较为集中, 另一部分是弥散元的晕元 (图 3 所示);  $c>0$  或  $c<0$  时即可表示各种不同形式的不对称型的扩散函数。

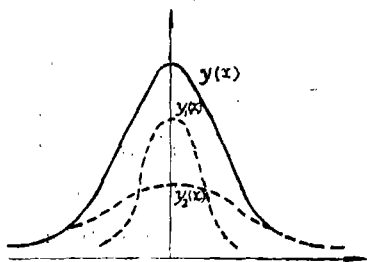


图 3

此光学系统对物面线宽为  $2a$ , 亮度为  $\beta$  的直线像的能量分布函数表示为:

$$f_1(x) = C_1 \left\{ 2 - \Phi\left(\frac{x+\beta a}{\sqrt{2}\sigma_1'}\right) + \Phi\left(\frac{x-\beta a}{\sqrt{2}\sigma_1'}\right) \right\} + C_2 \left\{ 2 - \Phi\left(\frac{x+\beta a-c}{\sqrt{2}\sigma_2'}\right) + \Phi\left(\frac{x-\beta a-c}{\sqrt{2}\sigma_2'}\right) \right\} \quad (4)$$

对于物面为等间距  $d$  的  $n$  条刻线的像面能量分布函数为

$$f_n(x) = C_1 \left\{ 2 + \sum_{N=0}^{N=n-1} \right.$$

$$\Phi\left[\frac{x-\beta(Nd+a)}{\sqrt{2}\sigma_1'}\right] - \sum_{N=0}^{N=n-1} \Phi\left[\frac{x-\beta(Nd-a)}{\sqrt{2}\sigma_1'}\right] + C_2 \left\{ 2 + \sum_{N=0}^{N=n-1} \Phi\left[\frac{x-\beta(Nd+a)-c}{\sqrt{2}\sigma_2'}\right] - \sum_{N=0}^{N=n-1} \Phi\left[\frac{x-\beta(Nd-a)-c}{\sqrt{2}\sigma_2'}\right] \right\} \quad (5)$$

(4)(5) 两式中,  $\Phi$  为拉普拉斯函数,  $C_1$  和  $C_2$  均为常数:

$$C_1 = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \cdot B \cdot \sigma_1' \cdot A_1 \quad C_2 = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \cdot B \cdot \sigma_2' \cdot A_2$$

由 (4) 及 (5) 式再次可见, 如果把光学系统的扩散函数展开或分解为两个 (或者更多个) 函数的代数和, 像的能量分布函数可以由这两个 (或者更多个) 函数所表征的光学系统成的像的能量分布函数的代数和。

(4) 式及 (5) 式亦清楚表明, 具有不对称的扩散函数的光学系统将使几何像变形, 使得本来是对称的直线像扭曲变得不对称, 如图 4 所示。应该指出, 在光学系统是线性不变的条件下, 由于上述这种直线像的变形效应对物面上的若干直线均是相同的, 如以每一直线像的能量分布曲线的峰值做为度量该直线像的中心的标志时, 则这种变形效应对直线的间隔并不发生变化, 因此这个光学系统用于测量系统时将不产生系统误差。

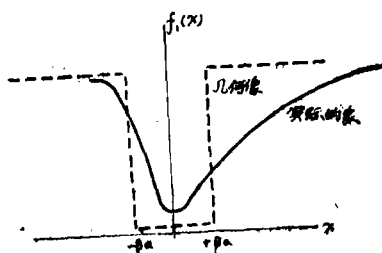


图 4

## 二、对阶跃函数的响应

具有不对称的扩散函数的光学系统对物

面为阶跃函数成的像（即锐边像）有一些重要的特性。此光学系统对物面函数

$$B_1(\xi) = \begin{cases} B, & \xi \leq 0 \text{ 时} \\ 0, & \xi > 0 \text{ 时} \end{cases}$$

成的像的表示式为

$$\varphi_1(x) = C_1 \left\{ 1 - \Phi \left( \frac{x}{\sqrt{\frac{c}{2}} \sigma_1'} \right) \right\} + C_2 \left\{ 1 - \Phi \left( \frac{x-c}{\sqrt{\frac{c}{2}} \sigma_2'} \right) \right\}. \dots\dots(6)$$

而它对物面函数

$$B_2(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi < 0 \text{ 时} \\ B, & \xi \geq 0 \text{ 时} \end{cases}$$

成的像的表示式却为：

$$\varphi_2(x) = C_1 \left\{ 1 + \Phi \left( \frac{x}{\sqrt{\frac{c}{2}} \sigma_1'} \right) \right\} + C_2 \left\{ 1 + \Phi \left( \frac{x-c}{\sqrt{\frac{c}{2}} \sigma_2'} \right) \right\}. \dots\dots(7)$$

由（6）式及（7）式可见，它们形式上的对称却由于有C的存在，实际上并不对称，同一个光学系统对于物面的阶跃函数由B→0或由0→B的阶跃方向发生变化时，像的不对称性将明显地由于扩散函数的不对称性而显示起来，如图5所示。由图5可见，物面的阶跃函数由于阶跃方向不同，不仅像的能量分布曲线不同，而且由0→B和由B→0的像的能量分布曲线的交点x<sub>0</sub>亦将由此光学系统的扩散函数不对称性所决定，比

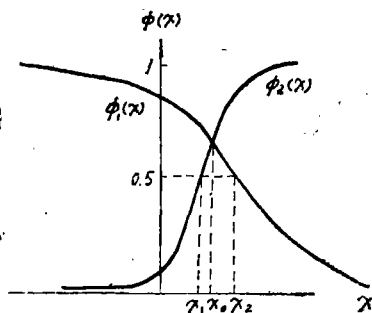


图 5

较（6）式及（7）式，x<sub>0</sub>值可由公式

$$C_1 \Phi \left( \frac{x_0}{\sqrt{\frac{c}{2}} \sigma_1'} \right) + C_2 \Phi \left( \frac{x_0 - c}{\sqrt{\frac{c}{2}} \sigma_2'} \right) = 0 \dots\dots(8)$$

完全决定。

对（8）式可进行如下一些讨论：

（1）当C=0时，x<sub>0</sub>=0表明具有对称的扩散函数的光学系统，即使晕元很大（σ<sub>2</sub>

很大），对物面的阶跃函数所成的像的能量分布函数都是对称的，不因阶跃方向由0→B或由B→0而改变，所以两曲线的交点x<sub>0</sub>=0。

（2）光学系统的扩散函数的不对称性越大，则x<sub>0</sub>值亦越大。例如，当C<sub>1</sub>=C<sub>2</sub>时，由（8）式可求得x<sub>0</sub>= $\frac{C\sigma_1'\sigma_2'}{\sigma_1'+\sigma_2'}$ 。就清楚看出上述结果。

如果定义刀口函数最大能量的一半处为对应物面阶跃函数发生阶跃的坐标（即物面的锐边在像面的表现位置），由图5还可清楚地看出，锐边像的表现位置不仅随光学系统的扩散函数的不对称性而变化，而且，即使是同一光学系统，锐边像的表现位置还随此锐边能量分布的阶跃函数的阶跃方向是由B→0还是由0→B而变化。

上面这些讨论说明了阶跃函数的阶跃方向对于像面能量分布函数的影响。从这个意义上说，和具有对称的扩散函数不同，任何采用刀口函数（即采用对阶跃函数的响应）来描写或测量具有不对称的扩散函数的光学系统的性能都是有缺陷的，是片面的。

### 三、结 束 语

非相干照明条件下，光学系统如具有对称形式的扩散函数，它的直线像和锐边像的位置是没有位移的；而对于具有不对称形式的扩散函数而言，就将产生位移，而且会使对称的物体的像变形为不对称，因此，对于这类型光学系统的研究及讨论是较为复杂的，也是尚须深入进行的。

本文承蒙薛鸣球、蒋筑英、韩昌元等同志校阅并提出了宝贵的意见，特致衷心的感谢。

#### 参 考 文 献

- [1] Roland V. Shack, Proceedings of the Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers, Vol. 46, Image Assessment and Specification, p. 39
- [2] Kenrō Miyamoto, JOSA, 774, 1957.