

断轴层析照相的各种模拟重现方法

简介: 断轴层析照相是一种X射线照相技术,这种技术能给出三维物体的一个孤立的二维截面象。这里先回顾这个技术的基本原理,并给出等价的各种数学公式。描述各种滤波函数产生的象的性质,简短讨论由辐射源的量子统计性质所加予的限制。然后描述实施重现过程的各种光学方法。详细叙述由于采用发散的X射线束而造成的畸变,并说明对光学系统作某些简单更改就可基本上排除它们。

I 引言

普通的X射线照相由于受到一个固有的限制,即象是三维物体的二维投影。而使由点源S发出的X射线,在X射线照片上任一点P处的强度由下式给定:

$$I(P) = I_0 \exp[-\int_S^P \mu(\vec{r}) d\vec{l}] \dots (1.1)$$

其中 $\mu(\vec{r})$ 是X射线线性吸收系数, I_0 是在没有吸收物体时在点P处的强度,这线积分是沿直线从S到P的积分。

于是 $I(P)$ 不是 $\mu(\vec{r})$ 的唯一度量,而是依赖于直线SP的所有点处 $\mu(\vec{r})$ 的值。这个数学关系的实际结果,不仅致使放射线学家不能探测一个结构所处的深度,而且也在于混乱的重迭结构妨碍了首先探测感兴趣的细节。

这个困难导致许多年前的“层析照相”成像方法的发展,这些方法是把人们所要求的平面清晰成像,而把所有其它平面的像弄模糊。这些方法(在下节要简短描述)虽然使问题有所改善,但没完全解决。复盖在平面上的模糊仍然降低对比,并造成判读困难。

在这个领域中新近的和非常戏剧性的进展是“断轴层析照相术”的发展,在这个方法中,把一单个平面孤立成像,并去掉所有其它平面。这个进展已在医学界引起轩然大波,看来确实应该得到一个往往不大妥当的名称——革命。

成熟的数学、数字计算机和明显的医学需要的会合,产生了这个幸运的结果。其中两个方面——数学背景和医学需要对这个令人兴奋的领域的进一步发展是本质的。而数字计算机并不那么关键,这就是本文的论点。不能否认数字技术在未来的断轴层析照相中常常可能是一个实用的工程选择对象,但我们要指出的是所有重要的数学运算也能用模拟方法履行。确实,在费用、速度和简单性是主要考虑的事情时,某一个模拟方法可能是最好的方法。

因为断轴层析照相术的分析基础对许多读者可能不熟习,也由于希望使本文是完整的,我们在第Ⅲ节对断轴层析照相术的数学基础作个较广泛的回顾。接着在第Ⅳ节,讨论几个专门选择的处理算法所产生的像的性质。在模拟处理方案中,这些算法的选择或按它们的应用价值或按它们的效用决定。

有用的X射线成像系统几乎总是受辐射流的量子扰动的限制;因此这些限制的估价是完善系统特性的根本。据此,在第Ⅴ节中回顾目前对断轴层析照相术中量子噪音的认识。

从第Ⅵ节开始讨论模拟处理方法本身的问题,但限于X射线是平行线束的情况。用发散或扇形束时出现的特殊问题,在第Ⅶ节讨论。

II 层析照相系统的分类

在三维X射线成像方面目前研究和发展

的动向主要集中在断轴层析照相术上，在本文的编排和着重点上将反映这一点。然而，通过简短考虑互相竞争的各种层析照相方法，而设法从各方面来看断轴技术，那是有益的。

获得三维X射线照相信息有三种基本方法。最古老的并且在大多数放射学部门仍然最通用的方法，可叫做“运动层析照相术”。如图1所示，这个方法要求源和探测器（通常是胶片）两者按这样的方式同步运动，使得物体中一特定平面的投影相对探测器在曝光期间保持静止。所有其它平面的投影相对探测器移动，因此是模糊的。已采用过许多不同的运动图案，包括：直线的、圆的、椭圆的、螺旋的和内摆线的图案。因为离焦面的点扩散函数是移动图案被缩小了的摹本，则越是复杂的图案提供越是有效的模糊。Peters在最近的一篇论文中对图1所示技术的几个变种作了很好的评述。

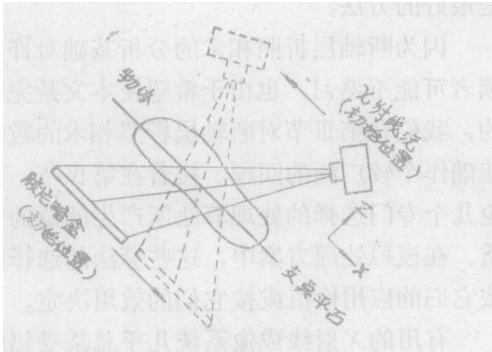


图1 线性运动层析照相的一种可能情形。

第二大类层析照相系统可称做“编码源”或“多重”成像。这个方法是编码孔径技术的一个分枝，编码孔径技术在X射线天文学和核成像中已证明是有用的。和所有其它层析照相技术相反，它不是从X射线的点源或准直源出发。替代它的是辐射成大立体角的大面积源。然而，来自这个源的辐射在空间上不是均匀的，而必须对应于一个仔细选择的编码函数。如图2所示，通过物体上任一点的辐射然后在探测器上产生一个曝光图

案，它就是编码源的缩放且倒置的摹本。这样一来，因为点扩散函数是已知的，在原则上讲，能够完成解卷积运算或滤波运算而求得物体的真实象。

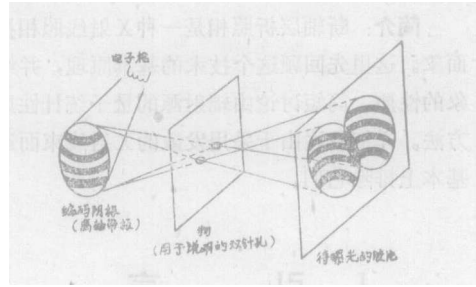


图2 编码源成像的说明。X射线管阳极是由两种材料构成的，其一有效地发射X射线，另一个不发射。X射线没有准直，于是每个物点在胶片上被编码成为源的倒置摹本。此编码象的大小依赖于物点沿Z轴的位置，图中Z轴是水平的。

因为一个点的编码像的尺度依赖于这点的Z坐标，这就造成了这个方法的三维问题。因此，解卷积滤波器的尺度仅对一个特定的Z平面是正确的，所有其它平面的像在解卷积后仍然是模糊的。然而，能以不同尺度因子重复解卷积运算，来重现物体的不同平面。

第三类要考虑的主要类型是断轴层析照相术。以这种方法收集数据的机构示于图3。因为本文余下的大部分内容叙述的都是这个方法，因此图象重现的详细讨论留到下一部分。断轴层析照相和移动或编码源层析照相之间的主要区别，明显地表现在数据收集的几何形式上。在断轴情况中，限制辐射只射到物体的单一平面上，因此重现象必定是这个平面的，而不受来自其它平面的复盖在像面上的模糊所损害。这个事实的一个重要结果是：重现象能够是物体这个平面上的X射线吸收系数的定量图。一个必然的优点是：能用对比增强技术给出吸收系数的很敏锐（ $<1\%$ ）的差别。这个能力足以区别脑中的灰色的和白色的物质，或区别正常的和凝块的血。应用于人的腹部，它使我们看见胰

脏和其它软组织的细节，这些在通常X射线照相中是完全看不见的。

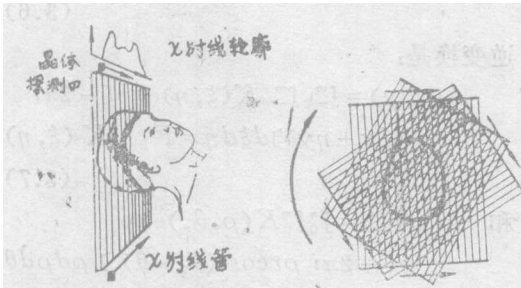


图3 用于断轴层析照相的典型机构图。通过物体的铅垂X射线束，以闪烁晶体和光电倍增器探测。源—探测器集合横向扫描产生一个投影 $f_p(x')$ 。然后把观察角增加并重复这个扫描。按这个方法为重 $\mu(r)$ 所需要的一整套投影数据被合成

虽然在近代医学史上断轴层析照相的临床和商业成就是无与伦比的，但此技术不是没有它的局限性。因为断轴仪器成本高和相当低的空间分辨率，其它层析照相术必然地仍是放射线学家式库中的有用部分。因此，在层析照相系统分类法上作某些努力似乎是值得的。

层析照相方法分类的一个简单基础是层析平面的取向。在医学实践上通常划分为横断面（位于横切病人身体长轴平面），和矢状或冠状面（位于平行身体长轴平面）。这两个主要取向分别引导出“横向”和“纵向”层析照相术。

断轴层析照相明显地是断面层析照相的分支。然而这个分类不是绝对的，因为从邻接的二维断轴薄片可以合成X射线吸收系数的三维图。一旦整个三维信息是可以得到的，把它排列组合成一个所要求的有任一取向的薄片的象便是一个简单的事情。

像我们已经描述的那样，运动层析照相术看来本身就是纵向的，至少在医学应用上是这样，因为使辐射通过整个躯干是不实际的。然而，在图4中给出的图解无疑应称作运动层析照相术，但是还是产生一个横截面

像。适用于图4的术语有点含糊。遗憾的是在较早的著作中已把它叫做断轴层析照相术，在新近的著作和本文中，这个名称指的是图3所示的方法。（对后者来说另一个通俗的术语是计算轴层析照相术，这个术语仅当“计算机”被广泛的了解为能包括光学和模拟计算机时，方是可接受的。）

虽然图3和图4的方法都给出横截面，但还是有本质的差别。图4的方法，由于有许多模糊复盖平面，必定给出一个次等的象。这导致了划分层析照相系统的第二个准则：是把不想要的平面完全排除呢，还是简单地弄模糊？描述这两种情况的术语恐怕没多少实际必要，但我们总可以提议：把前一个情况（排除不想要的平面）叫做“抹去层析照相术”，而把后者叫做“弄暗层析照相术”。

再说一遍，这个分类是不确定的。移动层析照相似乎应属于弄暗类，但Edholm和Chang等人已经提出了至少能部分抹掉不想要平面的图象处理步骤。类似地，编码源象如乞今所实行的那样，无疑是属于弄暗类，但至少存在一些希望：能从编码象中引出一个没受损坏的横截面。

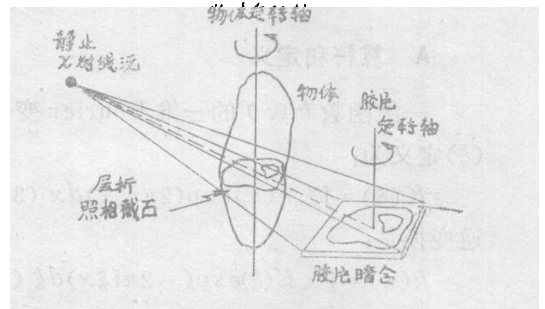


图4 产生一个横断面层析照相截面的移动层析照相系统。胶片暗盒和物体同步旋转，使得层析照相平面中任一点的投影相对胶片保持静止。其它平面中的点被运动弄模糊。

另一分类的方法是从单次曝光中所得到的截面数为依据的。明显地，断轴层析照相是从单套数据中产生单个平面；为获得第二个平面必须完全重复整个过程。图1所示的运动层析照相系统同属此类。然而，这里做些

简单的变更是可能的。例如，用 N 个在 Z 方向间隔开的胶片代替图 1 中的单个胶片，就能同时记录 N 个分离平面。另一个可能是“动态层析照相”技术，其中 N 个分开的胶片顺次对不同位置处的 X 射线源曝光。曝光期间不发生运动。这些所产生的胶片再被涂上适当的相位延迟，使任一要求的平面实现聚焦。这方法有个优点，即层析照相平面的位置是无限可变的，然而场的深度是有限的。有关的各方法也已在“综合层析”的名称下加以描述了。

III 断轴层析照相术的理论基础

在这一节，我们描述用于解决由物体的投影重现物体的各种分析方法。一般来说，物体是 X 射线线性吸收系数的三维分布。我们限于讨论由平面到一直线的投影求该平面吸收系数的特殊情况。如果需要，用堆积邻接平面的方法可得到体分布。这里，我们考虑连续、无噪音数据装置、完善地准直辐射和束高小得可以忽略掉的理想情况。描述各种方法之后，我们将会看到它们之间是等价的。

A 算符和定义

一维函数 $k(x)$ 的一维 Fourier 变换 $K(\xi)$ 定义为：

$$K(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} k(x) \exp(2\pi i \xi x) dx \quad (3.1)$$

逆变换是：

$$k(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(\xi) \exp(-2\pi i \xi x) d\xi \quad (3.2)$$

为了简洁，我们将用算子标符 F_1 和 F_1^{-1} 去描述这两个一维积分变换，即：

$$K(\xi) = F_1 \{k(x)\} \quad (3.3)$$

$$\text{和 } k(x) = F_1^{-1} \{K(\xi)\} \quad (3.4)$$

对于二维函数，在直角坐标系将用下面的 Fourier 变换关系：

$$K(\xi, \eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k(x, y) \exp[2\pi i (\xi x + \eta y)] dx dy = F_2 \{k(x, y)\} \quad (3.5)$$

在极坐标将用：

$$K(\rho, \theta_p) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} k(r, \theta) \exp[2\pi i \rho r \cos(\theta_p - \theta)] r dr d\theta = F_2 \{k(r, \theta)\} \quad (3.6)$$

逆变换是：

$$k(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K(\xi, \eta) \exp[-2\pi i (\xi x + \eta y)] d\xi d\eta = F_2^{-1} \{K(\xi, \eta)\} \quad (3.7)$$

$$\text{和 } k(r, \theta_p) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} K(\rho, \theta_p) \exp[-2\pi i \rho r \cos(\theta_p - \theta)] \rho d\rho d\theta = F_2^{-1} \{K(\rho, \theta_p)\} \quad (3.8)$$

我们将始终运用同一字母的小写和大写去表示 Fourier 变换对。

在感兴趣的 $x-y$ 平面中， X 射线线性吸收系数有一个以 $\mu(\vec{r})$ 表述的空间分布，其中 \vec{r} 是那个平面中的普通二维位置矢量。此外，我们把 $x-y$ 平面绕座标原点反时针旋转 ϕ 角定义为 $x'-y'$ 平面。在两个系统中，我们都能用它的极坐标 (r, θ) 和 (r', θ') 表示矢量 \vec{r} ，其中 $\theta' = \theta - \phi$ ，并且当然有 $r' = r$ 。

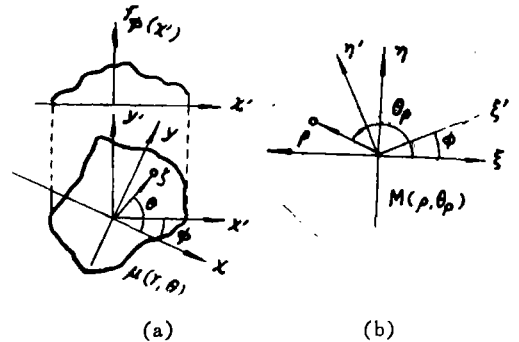


图 5 (a) 物体固定座标是 x, y (直角座标), 或 r, θ (极座标), $f_\phi(x')$ 是投影到 x' 轴上的物体的投影。(b) 在频率座标中, 物体是用它的变换 M 来描述。物体固定座标是 (ξ, η) 和 (ρ, θ_p) , 在旋转了的座标系中是 (ξ', η') 。

B 投影

我们用来重现物体的数据是物体的投影。这些投影是沿 y' 方向取的, 因此是 x' 的一维函数。对于任意给定的投影方向 (用 ϕ 确定), 这个投影用下面线积分表示：

$$f_{\phi}(x') = -I_{\phi} \left(\frac{f}{I_0} \right) = \int_{-\infty}^{\infty} \mu(x', y') dy', \quad (3.9)$$

(见方程(1.1)).

因为实际上, 我们考虑的是空间有限的物体 [在某个边界外 $\mu(\vec{r}) = 0$], $f_{\phi}(x')$ 的范围也是有界的。

图 5 (b) 给出了 Fourier (空间频率) 空间的对应座标, 这里与实际空间座标系 $(x, y), (x', y'), (r, \theta)$ 和 (r', θ') 共轭的量分别应是 $(\xi, \eta), (\xi', \eta'), (\rho, \theta_{\rho})$ 和 (ρ', θ'_{ρ}) 。我们始终采用 $r, r', \rho, \rho' \geq 0$ 的规定。

严格地说, 写上适当的脚标或上标的函数, 即 $\mu(x, y), \mu_r(r, \theta), \mu_{r'}(r', \theta'), \mu_r(\vec{r})$ 等等, 我们应认为是空间分布 μ 的不同函数形式, 为了简洁我们将放弃这个严密的表达, 尤其是因为简单地写作 $\mu(x, y), \mu(r, \theta), \mu(r', \theta')$ 等等, 这样做将不会出现混淆。

C 反投影

另一个普通运用的运算叫做反投影。在一定意义上讲, 这是投影运算的逆转, 因为我们是拿一个 x' 的一维函数, 把它在 y' 方向的整个空间均匀涂布, 来制做一个二维分布函数。如果我们取一维投影 $f_{\phi}(x')$, 则它的反投影就是:

$$b(x', y') = f_{\phi}(x') \quad (3.10)$$

在不旋转的座标中将写成:

$$b(\vec{r}) = b(r, \theta) = f_{\phi}[r \cos(\theta - \phi)] \quad (3.11)$$

图 6 说明了这个运算, 由此可见反投影不是投影的严格逆转, 因为这个过程不能重现产生这个投影的物体。

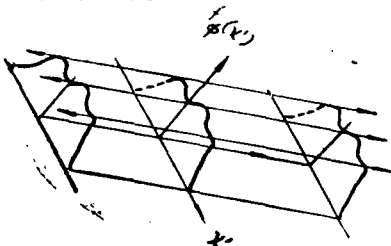


图 6 把一维函数 $f_{\phi}(x')$ 扩展均匀复盖 y' , 去形成二维函数的反投影。

D 和象

把许多反投影组合的过程产生一个新的二维分布叫做和象。用一些离散的有不同投影角 ϕ 的反投影, 则和象就是单个反投影的算术和。在一组连续数据的情况, 我们以积分的形式定义和象:

$$g(\vec{r}) = g(r, \theta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f_{\phi}(x') d\phi \\ = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f_{\phi}[r \cos(\theta - \phi)] d\phi \quad (3.12)$$

ϕ 的积分限范围是 π , 而不是 2π , 因为在投影中所包含的所有可利用的信息, 取自一个半圆弧上。图 7 给出(纵使对几个离散投影)一个力图说明这个求和的过程。许多作者对(3.11)式定义的反投影运算和(3.12)式的和象运算不加区别, 宁原把(3.12)式表达的运算叫做“反投影”而称 $g(\vec{r})$ 为“反投影象”。有时也把 $g(\vec{r})$ 称为“分层图”。

看看和象 $g(\vec{r})$ 和初始分布 $\mu(\vec{r})$ 是怎样联系的, 那是有益的。考虑 $\mu(\vec{r})$ 的特殊情况(例如置于原点处的一个点)是方便的。因此, $\mu(x', y')$ 用 $\mu^{\delta}(x', y') = \delta(x') \delta(y')$ 给出, $\delta(\)$ 是 Dirac δ 函数。 $g(\vec{r})$ 的最终表达式就是点扩散函数 $P_{\mu}(\vec{r})$, 这里脚标 μ 表示未滤波的象。因为系统是线性和位移不变的, 因此这个方法是成立的。

由(3.9)和(3.12)我们能写出:

$$g(\vec{r}) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} d\phi \int_{-\infty}^{\infty} dy' \mu(x', y') \quad (3.13)$$

对点吸收体的特殊情况, 我们求得:

$$P_{\mu}(\vec{r}) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \delta(x') d\phi = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \delta[r \cos(\theta - \phi)] d\phi \quad (3.14)$$

为求此积分值, 我们用下式:

$$\delta[y(x)] = |\partial y / \partial x|^{-1} \delta(x - x_0) \\ \text{这里 } y(x_0) = 0 \quad (3.15)$$

用 Taylor 展开上面的式子是容易证明的。因为在区间 $0 < \phi \leq \pi$ 中有且仅有一个根, 我们立刻得到:

$$P_{\mu}(\vec{r}) = (\pi r)^{-1} \quad (3.16)$$

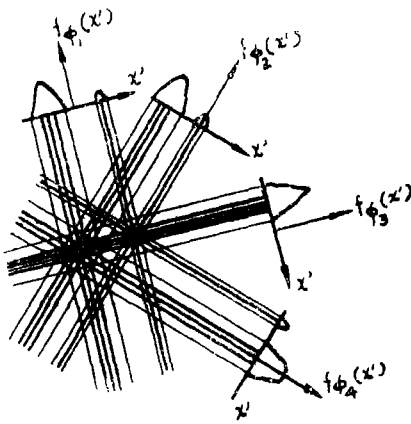


图7 表示和象是怎样形成的。给出的仅是从角 ϕ_1 到 ϕ_4 四个反投影的贡献。通常应该运用大量的连续的反投影。

考虑由中心 δ 函数(见图8)的有限个反投影形成的和象,人们能够从图形上领会这个结果。在这个图案中“表示”的密度,代表点扩散函数,并算出分布为 $1/r$ 。

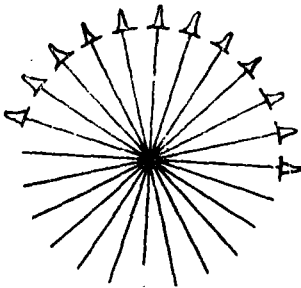


图8 这里给出的是中心 δ 函数的大量反投影产生的点扩散函数。反投影连续的极限给出点扩散函数,用 $P_*(r) \propto r^{-1}$ 表示。

这个结果是很重要的,因为它表明由 μ 投影形成的和象是紧密联系于 μ 本身的。在事实上,对一般的吸收分布我们能写出:

$$g(\vec{r}) = \mu(r, \theta) ** P_*(\vec{r}) = \mu(r, \theta) ** \left(\frac{1}{\pi r}\right) \quad (3.17)$$

(我们用记号**表示二维卷积)。由于 $1/r$ 函数的伸展边缘,由(3.17)给定的 $g(\vec{r})$ 将是物体分布的很模糊的表述。好几个作者报导过这种类型的重现。

然而,由(3.17)提供的启示直接提示了

几个获得不太模糊的象的方法,这节剩下部分专门研究这些方法。

E 滤波和像

刚才我们已经看到和象等于物体和点扩散函数 $1/r$ 的卷积。可见,适当地滤波和象就能改善重现象的质量。这个滤波可在真实空间也可在频率空间进行。首先我们看频率空间滤波。

取前面的结果(3.17)式的Fourier变换,因为 $F\{r^{-1}\} = \rho^{-1}$,得到:

$$G(\vec{\rho}) = F_2\{g(\vec{r})\} = M(\vec{\rho})/\pi\rho \quad (3.18)$$

其中 $g(\vec{r})$ 是由(3.12)式确定的未滤波的和象, $M(\vec{\rho})$ 是 $\mu(\vec{r})$ 的变换。由(3.18)看出,合适的滤波器具有如下形式:

$$H_2(\vec{\rho}) = \pi\rho A_2(\rho) \quad (3.19)$$

其中 $A_2(\rho)$ 是用于基本“ ρ -滤波器”的缓慢变化的切趾函数。 $H_2(\vec{\rho})$ 和 $A_2(\rho)$ 的脚标用于强调这函数是二维的,脚标上的差别在III一节将变得重要起来。

滤波像的变换 $\hat{M}(\vec{\rho})$ 由下式给出:

$$\hat{M}(\vec{\rho}) = F_2\{\hat{\mu}(\vec{r})\} = H_2(\vec{\rho})G(\vec{\rho}) = M(\vec{\rho})A_2(\rho) \quad (3.20)$$

两边都取变换,我们得到重现象 $\hat{\mu}(\vec{r})$:

$$\hat{\mu}(\vec{r}) = \mu(\vec{r}) ** a_2(\vec{r}) \quad (3.21)$$

因此能看出:量 $a_2(\vec{r})$ 是系统的点扩散函数 $P(\vec{r})$ 。为了更明显,我们可写成:

$$P(\vec{r}) = a_2(\vec{r}) = F_2^{-1}\{H_2(\vec{\rho})/\pi\rho\} = F_2^{-1}\{A_2(\rho)\} \quad (3.22)$$

因此,在原则上讲可以做出任意完美的重现象。例如,如果把 $A_2(\rho)$ 选作宽度趋于 ∞ 的Gaussian形,将会产生完美的重现象;这时 $a_2(\vec{r})$ 趋于代表完美重现的 δ 函数(见第四节)。

这个滤波也可以在实际空间中进行,用 $g(\vec{r})$ 和处理函数 $h_2(\vec{r})$ 卷积,产生重现象 $\hat{\mu}(\vec{r})$:

$$\hat{\mu}(\vec{r}) = g(\vec{r}) ** h_2(\vec{r}) \quad (3.23)$$

借助(3.17)把它重新写为:

注:图9不清省略。

$$\hat{\mu}(\vec{r}) = \mu(\vec{r}) ** \frac{1}{\pi r} ** h_2(\vec{r}) \equiv \mu(\vec{r}) ** P(\vec{r}) \quad (3.24)$$

我们看到, 重现象的点扩散函数 $P(\vec{r})$ 由下式给出:

$$P(\vec{r}) = h_2(\vec{r}) ** \frac{1}{\pi r} \quad (3.25)$$

方程(3.25)就是(3.22)的重述。

F 由滤波反投影产生和象

前节讨论了滤波反投影形成的和象的重现问题。因为求和及滤波都是线性运算, 我们就可以颠倒次序, 在形成和象之前滤波这个投影。我们会看到, 把适当的滤波器用于这些投影(在没噪音的情况下)能使和象任意接近初始物体。

先看实际空间的滤波。投影 $f_\phi(x')$ 和滤波器函数 $h_1(x')$ 卷积产生 $\tilde{f}_\phi(x')$:

$$\tilde{f}_\phi(x') = \int_{-\infty}^{\infty} f_\phi(x'_0) h_1(x' - x'_0) dx'_0 \equiv f_\phi(x') * h_1(x') \quad (3.26)$$

就是用这个滤波后的投影 $\tilde{f}_\phi(x')$, 把它反

投影并求和, 产生物体的新的估价 $\hat{\mu}(\vec{r})$:

$$\hat{\mu}(\vec{r}) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \tilde{f}_\phi(x') d\phi = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\phi \int_{-\infty}^{\infty} dx'_0 f_\phi(x'_0) h_1[r \cos(\theta - \phi) - x'_0] \quad (3.27)$$

运用(3.9)和(3.27)我们得到:

$$\hat{\mu}(\vec{r}) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\phi \int_{-\infty}^{\infty} dy' \int_{-\infty}^{\infty} dx'_0 \mu(x'_0, y'_0) h_1[r \cos(\theta - \phi) - x'_0] \quad (3.28)$$

为求点扩散函数的值, 我们还是用点物体: $\mu(x', y') = \mu^0 = \delta(x') \delta(y')$ 。把 $\mu(x', y')$ 的值代入(3.28)中, 直接找到点扩散函数:

$$P(\vec{r}) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi h_1[r \cos(\theta - \phi)] d\phi \quad (3.29)$$

换句话说, 点扩散函数就是一维滤波器函数的和象。这是个重要的结论, 在第IV节要用到它。

用(3.26)和(3.23)式表达的一维和二维滤波运算之间存在着一个联系。为弄清这个

联系, 我们用一个定理(引自附录A):

$$\int_0^\pi h_1(x') d\phi = F_2^{-1} \{ [H_1(\xi') / |\xi'|] |_{\xi'=0} \} \quad (3.30)$$

其中, $H_1(\xi')$ 是 ξ' 的偶函数, 且为 $h_1(x')$ 的Fourier变换。如果现在我们使 $H_1(\xi')$ 形式上和“ $|\xi'|$ ”滤波器与一个切趾函数〔类似于(3.19)的“ ρ ”滤波器〕的乘积相等, 即:

$$H_1(\xi') = \pi |\xi'| A_1(\xi') \quad (3.31)$$

得到:

$$P(\vec{r}) = F_2^{-1} \{ [A(\xi')] |_{\xi'=0} \} \quad (3.32)$$

和(3.22)式加以比较, 看出它们是等价的。如果一维卷积滤波器的变换 $H_1(\xi')$, 具有和二维卷积滤波器的变换 $H_2(\rho)$ 同样的函数形式, 则这两个滤波运算会产生相等的点扩散函数。

G Fourier综合

有另一种方法, 它不用反投影技术。我们从物体在角 ϕ 方向的单个投影表达式出发:

$$f_\phi(x') = \int_{-\infty}^{\infty} \mu(x', y') dy' \quad (3.33)$$

此式的一维变换 $F_\phi(\xi')$ 用下式给出:

$$F_\phi(\xi') = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mu(x', y') \exp(2\pi i \xi' x') dx' dy' \quad (3.34)$$

能把这方程写作:

$$F_\phi(\xi') = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mu(x', y') \exp[2\pi i (\xi' x' + \eta' y')] dx' dy' |_{\eta'=0} \quad (3.35)$$

我们能把它认为是: 物体 μ 的二维变换沿线 $\eta' = 0$ 取值。因此, 投影的一维变换是等于物体二维变换的一个截面(沿 ξ' 轴的那个截面), 这就是中心切片理论。

为了说明这个中心切片理论, 考虑一个单一余弦结构分布的物体〔见图10(a)〕。事实上, 这物体必须是无限大(违反我们的有界物体的前提, 但并不损伤说明的本质)。只有当投影方向垂直于波时, 做出的投影才不是常数值。对那个特殊的方向来说, 整个余弦分布都投影到 x' 轴上。这个投影的变换

示于相邻的图 10(b)中。如果我们现在考虑由许多不同的相位, 振幅和方向的波迭加构成的物体, 可看出: 仅平行于先前考虑的那些波才在 ξ' 轴上有它们的变换, 并且只有那些波能改变 $f_{\phi}(x')$ 的形状。于是我们看到为什么投影的变换是等同于全二维变换中对应的切片的。

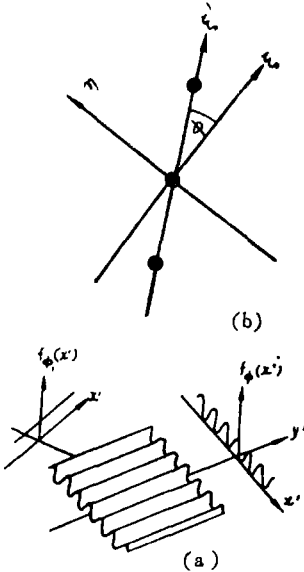


图10* (a) 对于单一余弦分布结构的物体, 仅有一个方向 ϕ , 其投影 $f_{\phi}(x')$ 是空间变化函数。对所有其它 $\phi = \phi_i$ 方向, 投影就是个常数值。(b) 这物体的 Fourier 变换 (由图示) 限定在 ξ' 轴上。

与一维变换 $F_{\phi}(\xi')$ 对应的二维函数, 在频率空间是 $F_{\phi}(\xi')\delta(\eta')$, 其中 ϕ 看来也始终主要地依赖于旋转后的频率座标 ξ' 和 η' 。因此, 如果我们集合全部 ϕ 值 ($0 < \phi \leq \pi$) 的一维变换, 就得到二维函数:

$$G(\vec{\rho}) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} F_{\phi}(\xi') \delta(\eta') d\phi \quad (3.36)$$

为补偿采样密度随半径的变化, 用因子 ρ 乘 (3.36) 式, 再用任一要求的切趾函数 $A(\rho)$ 乘 (3.36) 式, 并作逆二维变换就得到像 $\hat{\mu}(\vec{r})$:

$$\hat{\mu}(\vec{r}) = \frac{1}{\pi} F_2^{-1} \{ \rho A(\rho) \int_0^{\pi} F_{\phi}(\xi') \delta(\eta') d\phi \} \quad (3.37)$$

这个表达式形式上是等值于早先讨论的卷积方法, 证明步骤如下, 方程 (3.37) 可写为:

$$\hat{\mu}(\vec{r}) = \frac{1}{\pi} \iiint \exp[-2\pi i(x\xi + y\eta)] \rho A(\rho) F_{\phi}(\xi') \delta(\eta') d\eta' d\xi' d\phi \quad (3.38)$$

现在把 ξ, η 上的积分变成 ξ', η' 上的积分, 得到:

$$\hat{\mu}(\vec{r}) = \frac{1}{\pi} \iint \exp[-2\pi i(\xi'x' + \eta'y')] [\xi'^2 + \eta'^2]^{1/2} A[(\xi'^2 + \eta'^2)^{1/2}] \cdot F_{\phi}(\xi') \delta(\eta') d\eta' d\xi' d\phi \quad (3.39)$$

借助 δ 函数是容易求 η' 积分的, 得到:

$$\hat{\mu}(\vec{r}) = \frac{1}{\pi} \iint \exp(-2\pi i x' \xi') |\xi'| A(\xi') F_{\phi}(\xi') d\xi' d\phi \quad (3.40)$$

现在 ξ' 的积分是乘积 $|\xi'| A(\xi') F_{\phi}(\xi')$ 的一维变换。因此能写成:

$$\hat{\mu}(\vec{r}) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [h(x') * f_{\phi}(x')] d\phi \quad (3.41)$$

其中 $h(x') = F_1^{-1} \{ |\xi'| A(\xi') \}$, 它是等同于在 (3.26) 和 (3.27) 中表达的滤波后的反投影运算。

H Radon变换

至此, 我们已经讨论了由物体的无限多个投影数据重现物体的五种等价的方法, 并概要的示于图11中。在无噪音连续数据的理想情况下, 适当选择切趾函数能做出任意完美的重现。Radon 第一个给出了完美重现的解析形式, 叫做二维逆Radon变换:

$$\hat{\mu}(\vec{r}) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\pi} d\phi \int_{-\infty}^{\infty} dx' \frac{\partial f_{\phi}(x') / \partial x'}{r \cos(\phi - \theta) - x'} \quad (3.42)$$

其中对 x' 的积分, 是作为主值处理的。

这个方程在结构上与 (3.27) 式有某些类似, 因为它包括一个在 ϕ 积分之后对 x' 的卷积积分。一个表面上的差别是 $\partial f_{\phi} / \partial x'$ 替代了积分中的 f_{ϕ} 。然而, 在第四节我们要证明: 如果适当选择切趾函数, 则 (3.42) 式就是 (3.27) 式的极限形式。

* 原文图与说明不对应一译者。

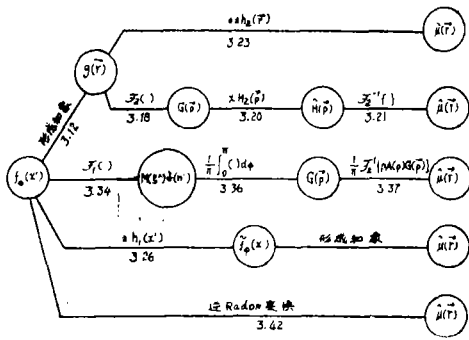


图11 流程图展示了许多不同的方法，用这些方法可以把二维物体 $\mu(r, \theta)$ 的一维投影 $f_\phi(x')$ 处理成那个物体的重现象。脚标1和2系指一和二维运算或函数，其中适当的系数指文中给出的有关方程程序数。注意，也还有把方程(3.26)的卷积用它的等值Fourier变换运算替代给出另一种方法的可能性。

IV 特殊的滤波函数

在前节我们建立了由物体的一系列投影 $f_\phi(x')$ 重现 $\mu(r)$ 的几个等价的方法。我们对滤波方法，如：用投影数据的一维滤波器，或用和象的二维滤波器，给予相当的注意。在频率域中，两情况的滤波器的一般特性是同样的，即为线性频率跳跃乘以切趾函数 A 。切趾函数在产生象时起着重要的作用，因为已经说明点扩散函数就是 $A(\rho)$ 的Fourier变换。如果我们把投影和重现的整个过程看作为一个成像系统， $\mu(r)$ 作为输入物体， $\hat{\mu}(r)$ 作为输出像，则 $A(\rho)$ 就是整个系统的传递函数。

尽管它很重要，我们对切趾函数或等价的空间域滤波函数的具体函数形式远没有多讲。在这一节将补救这个缺欠。

为了方便，我们从前节得到的组合到一块的几个重要结果开始。如果考虑的情况是：反投影之前滤波过的一维数据，我们已证明点扩散函数由下式给定：

$$P(\vec{r}) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi h_1[r \cos(\theta - \phi)] d\phi \quad (4.1)$$

因为 h_1 是偶函数， $P(\vec{r})$ 必定是回转对称的，

因此可写成：

$$P(\vec{r}) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi h_1[r \cos \phi] d\phi \quad (4.2)$$

此外，点扩散函数可以用切趾函数 $A(\rho)$ 表达：

$$P(\vec{r}) = F_2^{-1}\{A(\rho)\} \quad (4.3)$$

如在第Ⅲ节讨论的那样，切趾函数对一维和二维滤波具有同样的形式，以至于在那节用的脚标现在成为多余的了。因此我们可以写出：

$$h(x') = \pi F_1^{-1}\{|\xi'| A(\xi')\} \quad (4.4)$$

$$A(\rho) = (\pi\rho)^{-1} F\{h(x')\}_{|\xi'|=\rho} \quad (4.5)$$

方程(4.2)至(4.5)，提供了从 $h(x')$ 或从 $A(\rho)$ 的表达式出发计算点扩散函数，进而计算整个系统像的方法，在这一节我们将说明这些公式对选定的几个特殊滤波器函数的应用，选择考虑到分析易于处理和启发应用的价值。

先考虑以下式定义的突然截止 ρ -滤波器：

$$A_s(\rho) = \text{rect}(\rho/2\rho_m) = \begin{cases} 1 & \text{如 } \rho \leq \rho_m \\ 0 & \text{如 } \rho > \rho_m \end{cases} \quad (4.6)$$

从(4.4)式得到对应的一维滤波器函数应是：

$$\begin{aligned} h_s(x') &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(2\pi i \xi' x') |\xi'| A(\xi') d\xi' \\ &= 2\pi \int_0^{\rho_m} \cos(2\pi \xi' x') \xi' d\xi' \\ &= 2\pi \rho_m^2 \left[\frac{\cos u - 1}{u^2} + \frac{\sin u}{u} \right] \end{aligned} \quad (4.7)$$

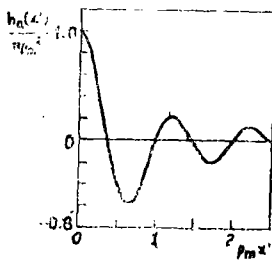
$$\text{其中 } u \equiv 2\pi \rho_m x' \quad (4.8)$$

由(4.3)式最容易求得点扩散函数。因为 $A(\rho)$ 具有圆对称性，则二维Fourier变换简化成Hankel变换，因此有：

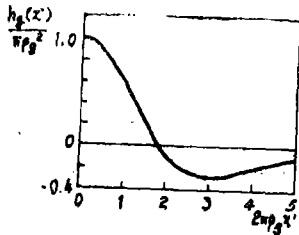
$$\begin{aligned} P_s(\vec{r}) &= 2\pi \int_0^{\rho_m} J_0(2\pi \rho r) \rho d\rho = \pi \rho_m^2 \\ &\quad \frac{2J_1(2\pi \rho_m r)}{2\pi \rho_m r} \end{aligned} \quad (4.9)$$

在图12画出了方程(4.7)和(4.9)的曲线。

方程(4.9)具有和圆光瞳相干光学系统同样形式的点扩散函数。如果函数 $\mu(r)$ 是带限的，其赋值区间是半径 ρ_m 圆的域或较 ρ^m



(a)



(b)

图12 和突然截止 ρ -滤波器相联系的归化一维滤波函数 $h_n(x')$ 。函数形式由文中(4.7)式给出。(b)突然截止 ρ -滤波器的归化点扩散函数, 函数形式由(4.9)式给出。

小些的圆域, 则 $\hat{\mu}(\vec{r})$ 是 $\mu(\vec{r})$ 的精确摹本 (忽略掉噪音)。然而, 如果 $\mu(\vec{r})$ 包含大体比 ρ_n 还高的频率, 则 $P(\vec{r})$ 中的负叶在锐边缘处将产生讨厌的环。在这情况中, 平滑的切趾函数比(4.6)更可取。例如采用 Gaussian 包络, 特别是由:

$$A_s(\rho) = \exp(-\rho^2/\rho_s^2) \quad (4.10)$$

给出的点扩散函数也是 Gaussian 包络:

$$P_s(\vec{r}) = \pi\rho_s^2 [\exp(-\pi^2 r^2 \rho_s^2)] \quad (4.11)$$

对应的一维滤波函数用下面 Fourier 积分给出:

$$h_s(x') = 2\pi \int_0^\infty \cos(2\pi\xi' x') \exp(-\xi_s^2/\rho_s^2) \xi' d\xi' \quad (4.12)$$

对这个函数给出严密解似乎是不可能的, 但它的级数解是:

$$h_s(x') = \pi\rho_s^2 - \pi\rho_s^2 \sum_{K=0}^{\infty} \frac{(-1)^K K!}{2(2K+1)!} (2\pi x' \rho_s)^{2K+2} \quad (4.13)$$

在图13中给出了方程(4.13)的曲线。

消除负侧叶的另一种形式的切趾函数是简单的指数形式:

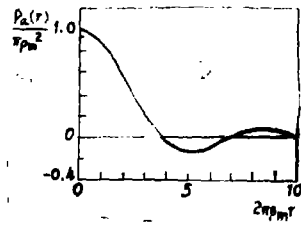


图13 如(4.13)式给出的那样, 曲线是具有 Gaussian 切趾 ρ -滤波器的归化一维滤波函数。

$$A_s(\rho) = e^{-\alpha\rho} \quad (4.14)$$

这函数有个附带的优点, 让 α 趋于另, 能容易地推导出逆 Radon 变换(3.42)。

这个指数切趾函数的点扩散函数是:

$$P_s(\vec{r}) = 2\pi \int_0^\infty e^{-\alpha\rho} J_0(2\pi\rho r) \rho d\rho = \frac{2\pi\alpha}{[\alpha^2 + (2\pi r)^2]^{3/2}} \quad (4.15)$$

然而, 感兴趣的是一维滤波函数:

$$h_s(x') = 2\pi \int_0^\infty \xi' e^{-\alpha\xi'} \cos(2\pi x' \xi') d\xi' = \frac{-2\pi}{(2\pi x')^2 + \alpha^2} + \frac{4\pi\alpha^2}{[(2\pi x')^2 + \alpha^2]^2} \quad (4.16)$$

这个方程的第一项, 随 α 趋于零而趋于一个负常数除以 $(x')^2$; 第二项变成比例于 Dirac δ 函数 (见图14)。也能方便地把方程(4.16)写成:

$$h_s(x') = \frac{-1}{2\pi} \frac{d}{dx'} \left[\frac{4\pi^2 x'}{(2\pi x')^2 + \alpha^2} \right] \quad (4.17)$$

如果 $\alpha \rightarrow 0$, 在方括弧中的量可看作是 $\left(\frac{1}{x'}\right)$

的主值表示, 因为:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \left[\frac{4\pi^2 x'}{(2\pi x')^2 + \alpha^2} \right] = \begin{cases} 1/x' & \text{如 } x' \neq 0 \\ 0 & \text{如 } x' = 0 \end{cases} \quad (4.18)$$

因此, (4.17) 变成:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} h(x') = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dx'} \left[P\left(\frac{1}{x'}\right) \right] \quad (4.19)$$

其中 P 表示主值。用这个滤波函数, 我们的重现估算此时变成:

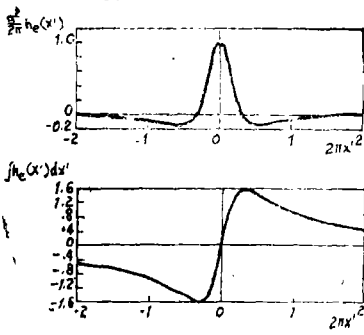


图14 分别由(4.16)和(4.17)式作出的指数切趾滤波函数(顶上)和它的无限积分(底下)曲线。对于这些曲线,参量 α^2 取0.1的数值。随 $\alpha \rightarrow 0$,下面的曲线趋于 $1/x'$ 的主值,这在Radon变换的推导中是有用的。

$$\begin{aligned} & \lim_{\alpha \rightarrow 0} \hat{\mu}_\alpha(\vec{r}) \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\phi [h_\alpha(x') * f_\alpha(x')]_{x'} \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi d\phi \left\{ f_\alpha(x') * \frac{d}{dx'} P\left(\frac{1}{x'}\right) \right\}_{x'} \end{aligned} \quad (4.20)$$

用分部积分法,于是给出:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \hat{\mu}_\alpha(\vec{r}) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi d\phi \left\{ \frac{df_\alpha(x')}{dx'} * P\left(\frac{1}{x'}\right) \right\}_{x' = r \cos(\theta - \phi)} \quad (4.21)$$

它和(3.42)有同样形式。然而逆Radon变换是个精确的重现方法;为了证明这个是对的,我们必须证明(4.21)式给出的 $\hat{\mu}(\vec{r})$ 实际上是等于 $\mu(\vec{r})$ 的。对此,我们仅知道(4.21)式等价于[参考(3.24)]:

$$\hat{\mu}_\alpha(\vec{r}) = \mu(\vec{r}) ** P_\alpha(\vec{r}) \quad (4.22)$$

其中, $P_\alpha(\vec{r})$ 是由(4.15)式给定的。然而容易看出:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} P_\alpha(\vec{r}) = \delta(\vec{r}) \quad (4.23)$$

因此,在这个极限情况下我们的确有:

$$\hat{\mu}_\alpha(\vec{r}) \rightarrow \mu(\vec{r}) ** \delta(\vec{r}) = \mu(\vec{r}) \quad (4.24)$$

对这种Radon变换方法的一个有意义的或许是有用的变化是:为 $h(x')$ 选择不连续函数,这个函数也可适当地解释为 $P\left(\frac{1}{x'}\right)$

的导数。这个函数是:

$$h_\alpha(x') = \begin{cases} \frac{1}{2} \varepsilon & \text{如 } |x'| \leq \varepsilon \\ -\frac{\varepsilon}{2x'^2} & \text{如 } |x'| > \varepsilon \end{cases} \quad (4.25)$$

我们定义一个辅助函数 $g_\alpha(x')$,要求它满足:

$$h_\alpha(x') = \frac{d}{dx'} g_\alpha(x') \quad (4.26)$$

于是容易证明:

$$g_\alpha(x') = \begin{cases} x'/2\varepsilon & \text{如 } |x'| \leq \varepsilon \\ \varepsilon/2x' & \text{如 } |x'| > \varepsilon \end{cases} \quad (4.27)$$

和

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\varepsilon}\right) g_\alpha(x') = P\left(\frac{1}{x'}\right) \quad (4.28)$$

函数 $h_\alpha(x')$ 和 $g_\alpha(x')$ 已画在图15中。注意 $g_\alpha(x')$ 是连续的。

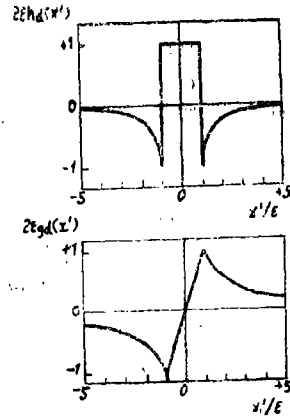


图15 分别由(4.25)和(4.27)式作出的函数 $h_\alpha(x')$ 和 $g_\alpha(x')$ 的曲线。像图14那样,下面曲线是上面曲线的无限积分,并且当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时它趋于 $P\left(\frac{1}{x'}\right)$ 。

直接应用(4.2)看出,这种滤波器的点扩散函数是:

$$P_\alpha(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{1}{2} \varepsilon & \text{如 } r \leq \varepsilon \\ \frac{1}{\pi \varepsilon} \sin^{-1} \frac{\varepsilon}{r} - \frac{[r^2 - \varepsilon^2]^{1/2}}{\pi r^2} & \text{如 } r > \varepsilon \end{cases} \quad (4.29)$$

注意:对于 $r > \varepsilon$, $P_\alpha(\vec{r})$ 中的两项都近似等于 $(\pi r)^{-1}$,这样,当 $r \gg \varepsilon$ 时,它们就趋于相

互抵消。如图16所示，当 r 稍微比 ε 大一点时，实际上已经完全相互抵消。 ε 很小的极限情况下， $P(\vec{r})$ 近似于 δ 函数，且 $\mu(\vec{r}) \rightarrow \hat{\mu}(\vec{r})$ 。依据在讨论 (4.21) 时所用的同样理由，还可以再次建立逆 Radon 变换关系。

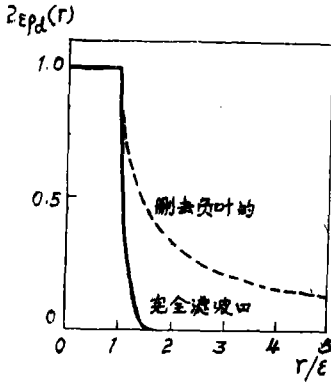


图16 由图15的不连续滤波函数找到的点扩散函数 (实线) [见 (4.29)]。虚线是删除滤波器负侧叶的点扩散函数，或是基本上没滤波的反投影。

至今讨论的所有滤波器有两个共同特性：(1) 每个 $h(x')$ 是由一个中心正峰和两个邻接的负侧叶组成的；(2) 负的侧叶延伸到 $\pm\infty$ 。因为第二个特性在任一实际系统中必须存在，在结束这部分之前我们要研究，能把第二个特性限制放宽到什么程度。

先假设 $h(x')$ 是突然截断的，正如在一个实际系统中要求的那样。于是有效滤波函数是：

$$ht(x') = \begin{cases} h(x') & \text{如 } |x'| < x_m \\ 0 & \text{如 } |x'| > x_m \end{cases} \quad (4.30)$$

这里，能把任何一个前面讨论的形式用于右边的 $h(x')$ 。于是表达点扩散函数的 (4.2) 式变成：

$$P(\vec{r}) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi h_1(r \cos \phi) d\phi = \frac{1}{\pi} \int_{\cos^{-1}(x_m/r)}^{\cos^{-1}(-x_m/r)} h(r \cos \phi) d\phi \quad (4.31)$$

其中 $r > x_m$ 。因此，截断这滤波器是等价于改变这个角积分的积分限。一个相似的情形，最近 Bracewell 和 Wernecke 已详细地作过讨论。

再进一步假设并要求： $h(x')$ 不仅是很细密的 (小的 x_m)，而且在它的非另区域是双向值的。即我们要求 $h(x')$ 满足：

$$h_b(x') = \begin{cases} A & \text{如 } |x'| \leq \varepsilon \\ -B & \text{如 } \varepsilon < |x'| \leq x_m \\ 0 & \text{如 } |x'| > x_m \end{cases} \quad (4.32)$$

当我们在下面讨论模拟处理方法时，将会明白这个要求的优点。

这个滤波器的点扩散函数的形式，是容易找到的。例如，若 $\varepsilon < r \leq x_m$ ，我们有：

$$P_b(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi h_b(r \cos \phi) d\phi = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} h_b(r \sin \phi) d\phi \\ = \frac{A}{\pi} \int_{-\sin^{-1}(\varepsilon/r)}^{\sin^{-1}(\varepsilon/r)} d\phi - \frac{2B}{\pi} \int_{\sin^{-1}(\varepsilon/r)}^{\pi/2} d\phi \quad (4.33)$$

把这个过程用于三个区域，且实施上面的积分，产生：

$$P_b(r) = \begin{cases} \frac{2(A+B)}{\pi} \sin^{-1} \frac{\varepsilon}{r} - B & \text{如 } r < \varepsilon \\ \frac{2(A+B)}{\pi} \sin^{-1} \frac{\varepsilon}{r} - \frac{2B}{\pi} \sin^{-1} \frac{x_m}{r} & \text{如 } \varepsilon < r < x_m \\ \frac{x_m}{r} & \text{如 } r > x_m \end{cases} \quad (4.34)$$

由于第 III 部分中讨论的理由，我们应该回避 $P_b(r)$ 尾部的 $\frac{1}{r}$ 。如果 r 大得足以使 \sin^{-1}

$(\frac{\varepsilon}{r})$ 和 $\sin^{-1}(x_m/r)$ 可以用它的宗量来代替，则：

$$P_b(r) \approx \frac{2\varepsilon(A+B) - 2Bx_m}{\pi r} \quad (4.35)$$

如果 $\varepsilon A = (x_m - \varepsilon)B$ (4.36)

则这个函数将变成零，就是说， $h(x')$ 应该有零平均值。自然，由这个条件，同样的要求也能得到：在 $\xi' = 0$ 处 $H(\xi')$ 也必定趋于零。

一旦选定 x_m 和 ϵ ，则 A/B 比值就由 (4.36) 式乘积确定了。但 A 和 B 的绝对值，除在 $P(r)$ 中是个常数外没有重要意义，而 ϵ 通常由系统分辨率要求确定。因此，唯一的自由参量是 x_m 。对 x_m/ϵ 的三种不同选择产生的点扩散函数，示于图17。可以看到 x_m 取得太小会产生大的负侧叶，而取得太大会产生讨厌的正翅。一个适当的妥协，似乎应该是 $x_m/\epsilon \sim 3$ 到 5。

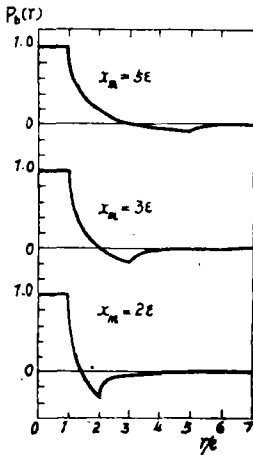


图17 用 (4.32) 式指定的双向削波滤波器，对 x_m/ϵ 的三个比值找到的点扩散函数。这些曲线的函数形式由 (4.34) 式给定。

V 断轴层析照相的统计限制

任何很好设计的 x 射线成像系统的性能，最终将会受到 x 射线的量子颗粒性质的限制。这个称作“量子噪音”，在断轴层析照相术范畴内已由许多作者加以讨论了。

Shapp和Logan 说明噪音是怎样通过卷积和反投影步骤而传播的，为后来的工作者指出了解决这个问题的方法。然而，他们在接近信噪比(SNR)的绝对计算，或对一给定分辨率和密度分辨率所要求的辐射剂量之绝对计算时，就停住了。Chesler 弥补了这个不足，他给出SNR的一个简单表示，并且

得到了重要的结果，即对一给定的SNR来说，所要求的剂量随分辨率的负四次幂变化。后面的这个结果，也被 Barrett 等人独立地证实了。他也得到了适用于任一滤波函数和任一物体的SNR的一般表示。用最近文献中的符号，这表达式为：

$$SNR = \frac{\left(\frac{M}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^\pi d\phi \int_{-\infty}^{\infty} dx' h(r \cos(\theta - \phi))}{\left\{ \int_0^\pi d\phi \int_{-\infty}^{\infty} dx' \left[h(r \cos(\theta - \phi)) \ln\left(\frac{\bar{n}_0}{\bar{n}_\phi(x')}\right) - x' \right]^2 \frac{1}{\bar{n}_\phi(x')} \right\}^{1/2}} \quad (5.1)$$

其中 M 是用于重现的离散投影的数目， $\bar{n}_\phi(x')$ 是按角 ϕ 投影的 x' 点处线性光子密度（光子数/厘米）的平均值， \bar{n}_0 是在无吸收物体时的同一个量。作为一个好的近似，分子的对数恰是 $f_\phi(x')$ 的平均值，作为一个整体，分子表示一个平均像 $\langle \hat{\mu}(r) \rangle$ 。

(5.1) 式的分母（噪音部分）在一个重要方面不同于分子（或信号部分）。分母积分一定是正的，而分子含有双极函数 h 。最先Genna和Pang注意到：这个具有产生非位置噪音场的作用，在场中噪音扩展会超出重现像 $\hat{\mu}(r)$ 的范围。

除SNR而外，辐射剂量（每单位质量吸收能）也是重要的。剂量的计算，要求对物体 $\mu(r)$ 作某些具体假设。对于浸在水中低对比物体的情况，如同某些商品化断轴层析照相中那样，Barrett 等人求得物体中心剂量由下式给出：

$$D_{\text{中心}} = \frac{2.26 E_x (SNR)^2 f_x}{\rho \mu_{a0} \eta e^{\delta t}} \exp\left(\mu_{a0} \frac{d}{2}\right) \quad (5.2)$$

其中 E_x 是 x 射线能， ρ 是密度， μ_{a0} 是 $\mu(r)$ 的平均值， ϵ 是分辨距离，它被定义为点扩散函数的半极大处的全宽度， d 是物的直径， t 是 x 射线束的厚度， η 是探测器的量子效

率, f_c 是在 0.1 和 1 之间变化的因子, 它说明 Compton 散射辐射从成象层的逸出。方程 (5.2) 是用 (4.6) 和 (4.7) 式定义的突然截止 ρ -滤波器导出的, 其它滤波函数将给出稍微不同的数字因子的值。

由中心处剂量可以推算表面剂量:

$$D_{\text{表面}} = D_{\text{中心}} \cdot I_0 \left(\mu_{\text{a}} \frac{d}{2} \right) \quad (5.3)$$

其中 $I_0(\)$ 是修正的另级 Bessel 函数。

方程 (5.2) 和 (5.3) 的曲线画在图 18 中。对这些曲线用的 SNR 值是 257, 相当于百分之 99, 这使我们确信在一个分辨格子中 μ 的 1% 的改变在统计上都将是重要的。如在文献中详细讨论的那样, 这似乎是商业化仪器性能好坏的一个合理的估价。

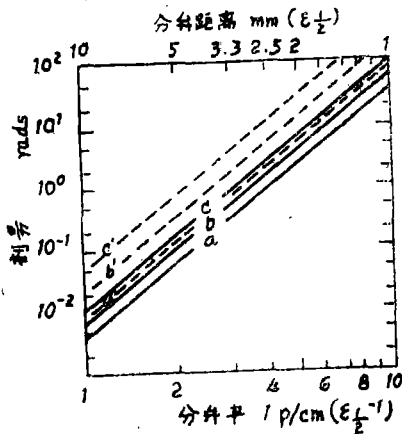


图 18 对浸在水中, 平均密度为 $1g_{\text{cm}}/cm^3$ 的均匀圆柱物体的剂量、空间分辨率与物体的直径之间关系的说明。由文中 (5.2) 式画的实线, 代表物体中心处剂量。虚线代表由 (5.3) 式计算的表面剂量。曲线 a 和 a' 是对于直径 $d = 20cm$ 物体作的; b' 和 b 是 $d = 25cm$ 和 c、c' 是 $d = 30cm$ 。其中用的其它参量: $\mu_{\text{a}} = 0.2cm^{-1}$, $\rho = 1$, $E_s = 70KV$, $SNR = 257$, $f_c = 0.2$, $\eta = 1$ 和 $t = 3e_{1/2}$ 。把 PSF (点扩散函数) 半极大处全宽度定义为分辨距离 $e_{1/2}$ 。假设用的是突然截止 ρ -滤波器。

IV 记录和重现的各种模拟装置

如在引言中提到的那样, 几乎所有由物体的投影重现物体的努力, 都涉及到片状采样, 数字化和数据的 (数字) 计算机简化等

部分。这里我们报告几个已发展了好几年的直接模拟方法。讨论限于断轴层析照相术, 并把这些装置分成两类: 其中一类基本上不做滤波, 另一类要仔细地做某些滤波。据说, 因为非滤波重现方法的质量差, 尽管卅多年前就报告了, 但直到对数据使用滤波算法 (或它们的等价方法) 之后, 断轴层析照相放射线学才得到广泛应用。

一个最早对断轴记录系统的描述是在美国专利中发现的。1940 年发行的一本专利给出一个用于记录截面像的装置。图 19 给出这个方法图解。胶片台和物体是同步旋转的, 使投影的反投影, 连续地记录在一胶片上。除由于扇形束导入的畸变外, 在这一步, 系统产生一个未滤波的和象。这个未滤波的像, 似乎是物体截面和 $1/r$ 型的扩展点扩散函数之卷积。

1942 年发表的 Frank 的专利中给出一个装置, 在这装置中, 把投影记录在感光胶片上作为中间阶段。为了方便, 可把这胶片卷在一个鼓轮上, 如图 20 (a) 所示。在重现过程中, 用一个缝和一个点源挑选出每个投影, 然后用一柱透镜将其反投影到感光胶片上 (图 20 (b))。感光胶片和进行投影记录的鼓轮以同步速率旋转。如前面提到的装置那样, 这个装置只产生未滤波的和象。

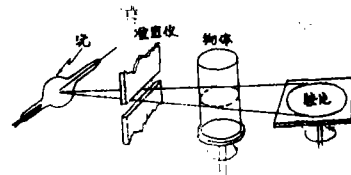


图 19 一步处理产生未滤波和象的一个早期装置的说明。物体和胶片同步旋转。可以把这系统看作是图 4 系统的极限情况, 即当源位于胶片平面的情况。

Peters 描述一个类似于 Frank 所描述的记录未滤波和象的方法。在这一著作中, 他描述了一个用相干光学技术滤波和象的方法, 即在相干光学图像处理器的 Fourier 变

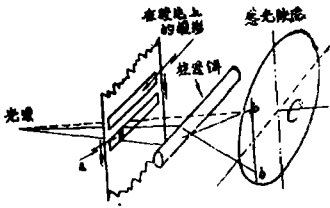
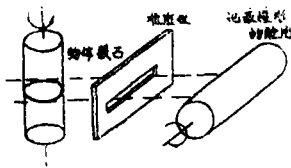


图20 采用的图是由Frank给出的，(a)投影到卷在鼓轮的胶片上的记录。两个投影间隔处增加鼓轮的旋转速率；(b)准直仪（没示出）限制照明光束呈窄扇形束，它通过给定投影，然后用一柱透镜把它扩散开来落到记录胶片上。在投影中，每个单元a被反投影在胶片平面中，成线b—b。把每个投影，依次反投影到正以适当数量旋转着的记录胶片上，因此提供了和象的曝光量。此处显现的如最初引证的那样，这系统适用假设忽略胶片内漫射散射的基础上做运算的。

换平面中放一个 ρ -滤波器。

最近，Gordon和Barrett报告了一个非相干光学装置。此处要详细的描述它。数学上它是执行(3.27)式表达的运算的。以简单的变量变换(3.27)式变成：

$$\hat{\mu}(r, \theta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} f_{\phi}(r \cos(\theta - \phi) - x') h_1(x') dx' \quad (6.1)$$

其中，和前面一样， (r, θ) 是那个待重现物体中一点的极坐标， $f_{\phi}(x')$ 是按角 ϕ 的一维投影， $h_1(x')$ 是双极处理函数。

为了重现象中每个点，那么必须实现如下步骤：

- 1) 把每个投影 f_{ϕ} 移动 $r \cos(\theta - \phi)$ 的数量；
- 2) 乘以双极处理函数 $h(x')$ ；
- 3) 在 x' 上积分；
- 4) 把上面的结果对整个投影角求和。

如果把数据以一个合适的形式记录下

来，那么在光学上简洁地完成这些运算是可能的。特别是每个投影作为一个窄条记录在胶片上，它直接记录在前面投影角形成的窄条的下面。用简单的机械布置可以容易地得到这个数据形式，在那里，胶片暗盒在垂直于一维数据方向上平移，它作为相对旋转的物体而出现（见图21）。我们看到单个物点投影在移动胶片上成为一个正弦曲线，它的振幅依赖于物点的旋转半径，它的位相依赖于物点的方位位置。对于一个点的集合，所有曲线的周期是相同的，并且只依赖于物体转一圈后胶片平移的数量。集合中的每个点，被变换成唯一的一个正弦曲线，它的振幅和位相直接依赖于物点的 (r, θ) 座标。把这个方式记录投影数据的胶片叫做正弦图(Sinogram)。

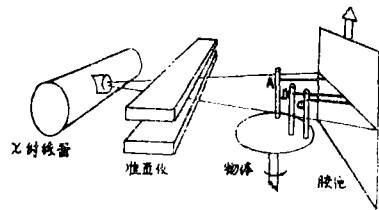


图21 用三个吸收杆A、B和C构成的物体所记录的正弦图。在这截面上，它们作为点出现。点A和B离转轴是同样距离的，而点B和C是沿同一半径线的。

现在把正弦图缠绕在一水平放置，端面照明的圆柱体上，圆柱的圆周恰是正弦曲线的一个周期。为了看第一步运算是怎样实现的，现考虑单个点吸收体产生的曲线。当圆柱体绕自轴旋转时，正弦曲线的两个零点可位于圆柱体的顶端和底端（图22）。当圆柱体绕垂直轴转某个角度 ψ 时，这曲线看起来应呈一直线。在这个观察位置上，重现点 (r, θ) 需要的全部投影 f_{ϕ} 以正确的位移加以排列，于是实现了第一步。即把位于 $x' = r \cos(\theta - \phi)$ 的各点用这个观察图形变换成一条直线。几何上能把这个看作是：画出一平面和一圆柱的交线。对由三个点吸收体构成

的物体，记录和观察正弦图的过程示于图22(a)–(e)。

然而要注意，滤波器透过率要求是双极的（见第四节）。为了执行一个双极函数，必须用一分束器把这个鼓轮成象到两个掩模上。一个掩模代表滤波器的正部分，另一个代表负的部分。两个光探测器分别去度量通过每个掩模的光。在差分放大器中，把从正掩模来的信号减去负掩模的信号，就产生了

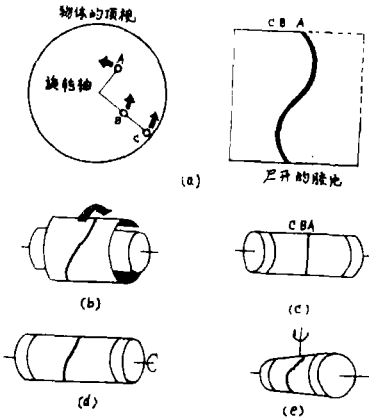


图22 (a) 在展开的胶片上三个点物已经产生了三个正弦曲线，标记为A、B、C。注意：在物上的点A和B产生等振幅和不同相位的正弦曲线，因为它们是等半径的，差别仅在方位位置上。点B和C产生具有同样相位，但不同振幅的曲线。(b) 数据处理，由把展开的胶片缠绕在端面照明的圆柱体上开始。(c) 如果从一适当的方向上观察鼓轮，某一正弦曲线（本图是A）看去可呈一直线。(d) 把圆柱绕它的轴旋转使曲线B（在方位上与A不同）呈一直线。因此，把圆柱体绕自轴旋转是对应于改变待重现物点的方位角。(e) 绕垂直轴转圆柱体使曲线C看来呈一直线，因此这个旋转对应于改变待重现物点的半径。

所要求的双极输出。我们现在已完成了对重现单个点要求的四个步骤，亦即上面表列的四步。图23简单地表示出这个系统。

数据收集和重现步骤已引出一系列的座标系的变换。初始物体上的各点用物体上的

极座标 (r, θ) 定位。数据收集步骤把每个物点一一对应地变换成一正弦曲线 $r \sin(\theta - \phi)$ ，它的振幅和位相直接对应于初始物点的座标，为了重现而观察鼓轮时，用分别

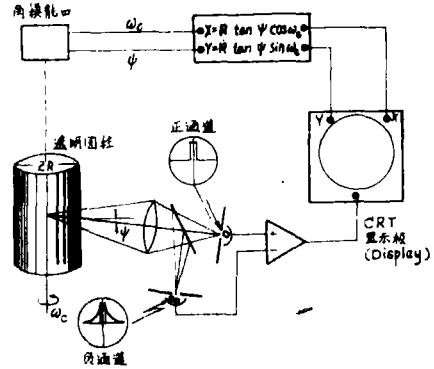


图23 有个角 ψ 和 ω_c 的组合，在这组合处每个正弦曲线A、B或C可被完全成象到正通道的直缝上。负通道用于排除正弦图中邻接的正弦曲线的贡献。因为 ψ 和 ω_c 唯一地与物点各自的半径和方位相联系，比例于这些角的信号能用来给出显示偏析。适应 ω_c 急速变化和 ψ 缓慢变化的显示是螺旋网栅。

绕两个轴旋转鼓轮的方法把一给定物点的正弦曲线变换成直线。鼓轮绕自轴旋转（角 ω_c ）改变待重现点的方位角，鼓轮绕垂直轴转个角（角 ψ ）则改变重现点的半径。对于直径R的鼓轮这个关系是 $r = R \tan \psi$ ， $\theta = \omega_c t$ 。这又是个一一对应的变换。因此，有次序地改变鼓轮的角 ω_c 和 ψ 时，整个物体可以被重现。有次序地变换座标的最方便的方法是把鼓轮绕自轴急速地旋转（角 ω_c ）。在重现现象中这跟踪出一个圆。现在 ψ 的缓慢扫描改变圆的半径，于是跟踪出一条螺旋线。差分放大器的输出，控制阴极射线管(CRT)的亮度，CRT扫描束按一螺旋网栅状偏析电子束来显示这个输出。对于1800转/分速度旋转的圆柱体，重现整个象约需5~10秒钟。整个读出系统示于图23。

典型的装置能显示出落差1~2%的密度分辨率和2~3 mm的空间分辨率。在这些

初始试验中,为机构方便运用了旋转对称的物体。

对于模拟重现的另一方法,是作者目前正在研究的方法。这个系统要求按正弦图形式采集投影数据,并且这里是按 2π 正弦图描述的,即正弦图中的一个投影数据是在物体(相应的)转一周时收集的。因 ϕ 在 $-\pi$ 到 π 区域上对称分布,因此投影数据被扩展到正弦图的整个长度 L 上。因此,在 x' 上正弦图的 l 座标形式是:

$$\phi = \frac{l2\pi}{L}, \quad -\frac{L}{2} < l \leq \frac{L}{2} \quad (6.2)$$

在重现过程中,把正弦图展开平固定,且通过两个透镜成象到移动的胶片上,胶片的透过率按照预定的处理函数变化。探测通过每个成象通道的光而得到一输出信号,它正比于在两个通道中的光通量之差。这两个通道是用来模拟所要求的双极透过率函数。整个系统按模拟方式执行(3.27)式给定的重现算法。如刚才在鼓轮处理器中描述的那样,重现物体是把显示输出信号显示在螺旋网栅上而得到的。图24给出这个系统的草图。

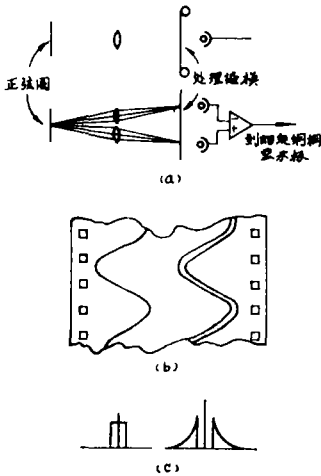


图24 (a) 用于处理正弦图模拟装置的侧视和顶视图。为明了起见,光源和照明光学系统省掉了。文中较详细描述的处理掩模,示于(b)中。在左边的正弦波和在右边的双正弦波,给出示于(c)的透过率分布中心位置。象在第七节说明的那样,那几个不同透过率函数中的任何一个都可采用。

移动的胶片(我们把它叫做处理掩模)取长条形式,为了简单,我们将描述一个能用来重现物体的掩模,这里的正弦图是以平行辐射束得到的。还是为了简单,我们将假设透镜的光学放大率是1。

在掩模座标系 (x'_m, l_m) 中, l_m 是沿胶片的长度且平行于正弦图的 l 轴的。沿任一 l_m 等于常数的截面,在掩模的正通道中,存在一个比例于所要求的滤波器函数 h 的正部分的透过率变化。然而,这个分布的中心在 l_m 方向上是按余弦方式变化的,余弦的振幅缓慢的、且均匀的从零增加到某个极大值,这个极大值是在大量的周数 N 上予定的。极大振幅 X 等于包含物体的场的半径。如我们将看到的那样, N 等于在螺旋网栅显示中整转的转数,余弦函数的周期等于正弦图的周期 L (见图25)。负的通道带有一个相似的移动了的透过率函数,它类似于所要求的滤波器函数的负叶,由于电学相减,整个掩模模拟了一个双叶滤波器函数,它具有用下式给出的透过率:

$$T(x'_m, l'_m) = h_1(x'_m - (Xl'_m/NL)\cos(2\pi l'_m/L)) \quad (6.3)$$

在任一瞬间,输出信号将由下式给定:

$$I \propto \iint \text{正弦图 } f_\phi(x') T(x'_m, l'_m) dl dx' \quad (6.4)$$

然而,这个掩模正以 v 匀速移动,使得掩模的座标 x'_m, l'_m , 按如下关系变换成正弦图的轴 x', l :

$$x'_m = -x' \quad (6.5a)$$

$$l'_m = vt - l \quad (6.5b)$$

因此,把(6.2), (6.3)和(6.5)式代入(6.4)式中,得到:

$$I(t) \propto \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \int_{-x}^x dx' f_\phi(x') \cdot h_1 \{ [X(vt - \phi L/2\pi)/NL] \cos((2\pi vt/L) - \phi) - x' \} \quad (6.6)$$

为了证明(6.6)式确实具有要求的形式,即(3.27)的形式,我们必须论证,在

上面表示式中量 $[X(vt - \phi L/2\pi)/NL]$ 在 ϕ 积分的积分限上,是十分近似于常数的,并且它可以用平均值 $[X(vt/NL)]$ 代替。这等于说,在处理掩模上余弦位移的振幅在(余弦的)一个周期上是个常数。对于足够大的 N ,这个近似是明显正确的。我们还引用符号:

$$\theta(t) = (2\pi\nu/L)t \quad (6.7)$$

$$\text{和 } r(t) = (Xv/NL)t \quad (6.8)$$

使得方程(6.6)变成:

$$I(t) \propto \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \int_{-x}^x dx' f_{\phi}(x') h(r(t) \cos(\theta(t) - \phi) - x') \quad (6.9)$$

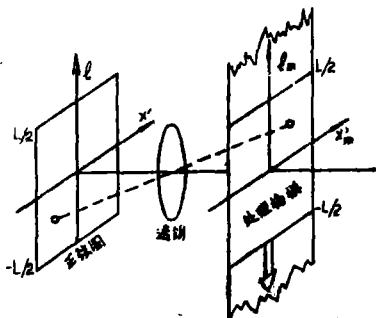


图25 表示正弦图座标 (l, s) , 和处理掩模座标 (l_m, x'_m) 间的关系。在此和下面的三个图中,在记录过程中正弦图的剖面视图画在图的左边,正视图画在右边。

由于以 ϕ 为变量的函数的对称性,第一个积分的下限只能用零代替,因为物体被限制在一个有限的区域上,第二个积分的积分限可取做 $\pm\infty$ 。因为 $\theta(t)$ 和 $r(t)$ 都比例于 t ,可以把它们作为极坐标使用,即在螺旋网栅显示上的所谓方位和矢径座标。于是(6.9)式现在变成:

$$I(t) \propto \int_0^{\pi} d\phi \int_{-\infty}^{\infty} dx' f_{\phi}(x') h(r(t) \cos(\theta(t) - x') - x') \quad (6.10)$$

这里,由(6.9)和(6.8)式, $r(t) = X\theta(t)/2\pi N$ 。这个是和所要求的处理算法(3.27)式(其中 $\mu(r, \theta)$ 是沿螺旋网栅求值的)精确地一致。

刚才描述的系统比早先描述的旋转鼓轮处理器优越,因为在这个系统中,数据处理

运算期间胶片是平的。于是由胶片到光学系统的所有光线此时近乎垂直入射通过这个胶片。另一方面,在鼓轮处理器中,光线从鼓轮顶部和底部穿过胶片时,近乎掠射入射,使胶片表观透射率大大地降低。这意味着, $\theta - \phi$ 近乎是 $\pm\pi/2$ 的那部分正弦图对重现象的贡献,和 $\theta - \phi$ 近乎是零的那部分的贡献相比,成比例地减小。由于鼓轮的 Lambertian 发射特性,这个影响被进一步加重。这个问题严重到何种程度有待于研究,但如果需要的话,平胶片处理器确实提供了一个解决办法。

在结束这部分之前,我们介绍几个把胶片作为探测器的评论,因为这是上面讨论的所有模拟处理机制的共同要素。首先,我们实际上不主张仅仅运用胶片,按照标准的放射性作业和把胶片夹在两个萤光增强屏之间可得到高得多的灵敏度,两个屏吸收 x 射线且发光,然后这个光曝光胶片。

这样的胶片——屏组合,基本上是量子极限探测器,具有20~50% (依赖于 x 射线能量和屏的材料)的量子效率。和具有近乎100%效率的闪烁探测器比较,要获得同样的SNR [见(5.2)],那么,胶片——屏系统要求剂量至少增加两倍。

在另一方面,胶片——屏系统,比用可获得的以空间分辨率表达的任一种离散探测器,具有更大的优点。据作者所知,没出现或主张,断轴层析照相采用多于300个离散探测器的,14吋 X 射线胶片,在效果上相当于上面数目五倍以上的探测器。如果要求象的分辨率仅是3~4mm,这个优点就没什么大用途。但力图坚持增加普通放射线的分辨率,就使人们得出结论,增加断轴层析照相的分辨率在医学上将是有用的。

固然,增加分辨率就要增加剂量或减少SNR (见图18),但这个折衷方法至少用胶片探测器是可以获得的。一个很有吸引力的选择可能是两次成像过程——一次具有高分辨率(比如说1mm),一次具有高SNR或密度

分辨率。这个方法用胶片探测器和模拟处理是很平常的，而用离散探测器是完全不可能的，因为此处的真实分辨距离从来不能小于探测器直径。

胶片的另一个优点，是从 I/I_0 到 $f_p(x')$ 所要求的对数变换运算能自动完成〔见(1.1)和(3.9)]，至少在一有限动态范围内是这样。透过率对曝光量对数的曲线，对典型的胶片——屏组合给出一个线性部分，这个线性部分至少扩至2.5比1的曝光量范围。低对比显影液很容易把这个范围扩展至10比1。

VII 扇形束记录的重现

在前一节中，我们描述了由正弦图重现物体的几个方法。仅考虑了以平行准直辐射形成的正弦图。平行辐射的优点是：通过物体的投影，按一特别方便的方式有序地排列成正弦图。如果我们定义一个投影：它离 x 轴的方位角为 ϕ_p ，离原点的足矢量为 r_p ，由图26能看到 (r_p, ϕ_p) 和 (l, s) 间的变换如下：

$$\phi_p = 2\pi l/L \quad (7.1)$$

$$\text{和 } r_p = s \quad (7.2)$$

这里为了避免混乱，我们在正弦图中已经建立了一个新的座标 s ，它平行于物体上的 x' 方向。因此，当它被（滤波或没滤波的）反投影时，在一给定方位处的所有投影，可在正弦图中沿 l 等于常数的直线上找到，并且可以用一装置，例如一直缝，把它分离出来。还有，因为 $r_p = s$ ，数据被正确地分开，并且在反投影运算前不需要进行再排列。

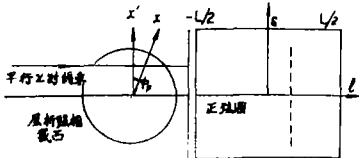


图26 平行照明时，通过在给定方位角 ϕ_p 处物体的整个投影在正弦图上是沿一条直线（……）排列的。

不幸的是，平行的 X 射线束在实际中是

难以实现，最好能用一个在一维准直的，近似点源发出的扇形束来替换，这至少对于同时记录几个投影是有益的。在这一节，我们从实验上研究，如何记录数据和如何对新的顺序排列数据进行补偿。我们将说明在许多情况下，对第VI节所描述的各方法做简单修改，几乎可完全去掉由重排序所造成的问题，并且可做出简单精确的重现。

为了实现反投影，我们需要认出所有按某一给定角 ϕ_p 通过物体的那些投影。由图27能看到所要求的系统是：

$$S = D \tan(\phi - \phi_p) \quad (7.3)$$

$$= \tan(2\pi l/L - \phi_p) \quad (7.4)$$

现在把投影数据在 (s, l) 空间中沿正切曲线展开，而不是沿一直线进行排列。如果，由源看物体的最大张角保持相当小，那么对反投影所需要的数据，即 $\phi_p = \text{常数}$ ，仍然可以用适当狭缝（相对于 l' 轴它的斜率是 $2\pi D/L$ ）来选取。这个事实（最先被Edholm认识到），代表一个重新编排在扇形束记录过程中被弄混乱的投影数据的优雅的方法。因为 r_p 不再直接比例于 S ，因而也不再比例于沿缝方向度量的距离，所以在数据中还有畸变出现。事实上，由图27看到：

$$r_p = d \sin(\phi - \phi_p) \quad (7.5)$$

如果用(7.4)除之，得到：

$$S = r_p \cdot \frac{P}{d \cos(\phi - \phi_p)} \quad (7.6)$$

反投影之前，这个畸变应该消除。Edholm用可控制象差的柱透镜进行反投影，并同时消除畸变。

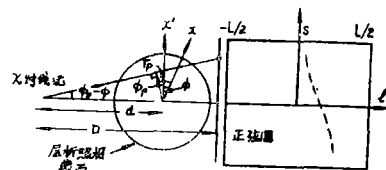


图27 以扇形束按一给定方位角 ϕ_p 方向通过物体的各投影，在正弦图上变成用 $S = \tan(\phi_p - 2\pi l/L)$ 给定的曲线（……）分布。

此处我们注意到，对记录装置作一个相

当简单的变更,可完全排除第一个问题,且可把第二个问题减低到可忽略的水平。

考虑放在一个圆柱表面上的记录胶片,它的整个曲率中心置于离射线源距离 d' 处(见图28)。在重现过程中,胶片保持平展。有两个 d' 值,例如 $d' = 0$ 和 $d' = D/2$, 对此代替 (7.3) 式有:

$$S = D(\phi - \phi_r) \quad (7.7)$$

就第一个问题而论,现在没有限制物体的角范围。通过物体按 ϕ_r 方向的所有投影,被记录在过点 ($S = 0, l = \phi_r, L/2\pi$) 和斜率为 $2\pi d/L$ 的直线上。

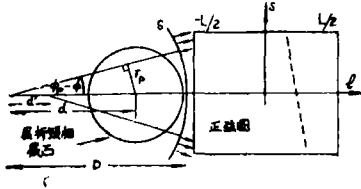


图28 记录过程中,弯曲胶片呈一圆柱形之前,具有公共 ϕ_r , 投影的位置被改变。当 $d' = 0$ 时,即绕射线源弯曲胶片时,重现处理期间胶片展平后,投影位置精确的是一条直线。

由 (7.6) 式表示的畸变也被轻易地减低了。现在有:

$$S = r_r \frac{D}{d} \cdot \frac{\phi - \phi_r}{\sin(\phi - \phi_r)} \quad (7.8)$$

令 $\Delta\phi = \phi - \phi_r$, 且用小角表示式,则 (7.6) 式变成:

$$S = r_r \cdot (D/d)(1 + \Delta\phi^2/2) \quad (7.9)$$

而 (7.8) 式给出:

$$S = r_r \cdot (D/d)(1 + \Delta\phi^2/6) \quad (7.10)$$

畸变被减小三倍。人们要问,是否能把胶片弯曲呈某个半径,而把畸变全消除? 回答是:不能。如果我们把畸变的一般表达式写作:

$$D(\phi) = 1 + a\Delta\phi^2 \quad (7.11)$$

就可证明

$$\alpha = \frac{1}{6} + \frac{d'(2d' - D)}{6(D - d')^2} \quad (7.12)$$

在 $d' = D/3$ 处,它有个最小值为 $1/8$ 。此值比 (7.10) 式中的 $1/6$ 仅稍微好些。以牺牲产

生 (7.7) 式的几何形式有关的简单变换的方便,而使畸变稍微减小,这或许是不值得的。

现在我们看,如假设正弦图上 S 和物体中 r_r 是线性关系所发生的定位不准的量。这个问题将表明在反投影和(或)滤波之前是否有必要进一步重排投影数据。在附录 B 中,我们推导出下面的表示式:

$$\overline{\Delta S}/S_{max} = 0.025\phi_{max}^2 \quad (7.13)$$

$$\Delta S_{max}/S_{max} = \sqrt{7} \overline{\Delta S} \quad (7.14)$$

$\overline{\Delta S}$ 是 S 偏离于 S 和 r_r 之间最小均方配准的最佳直线的均方根偏差, ϕ_{max} 是物体上的最大张角, ΔS_{max} 是偏离于线性配准的最大值(它出现在象场的边缘处)。

对于 14 吋宽的胶片 $S_{max} = 7''$, 对于 $\phi_{max} = 0.2$ (整个扇形角为 23°), 偏离最佳配准的均方根偏差是 0.007, 这时有最大偏差 0.018 吋。扇形角扩展二倍到 46° (0.8 弧度), 均方根偏差增至 0.028 吋, 具有最大误差为 0.074 吋。

重要的结论是:运用 x 射线扇形束,在许多情况下,特别是当胶片在记录过程中被适当地弯曲时,不妨碍随后对模拟记录的处理。因为平行投影是一些直线,并且可以用稍微倾斜的简单直缝把它选录出来作反投影,所以投影数据按特别方便的方式排列。

很明显,这个倾斜缝的原理能按各种不同方法实现。例如,在记录过程中有一个倾斜缝(即相对缝的法线方向倾斜 α 角度来传输胶片)可能更方便。见图29。对于小角度,可以证明 $\alpha = L/(2\pi D)$ 。相似地,在前节描述的移动胶片处理器中,使处理掩模的 S_m, l_m 座标有适当数量的倾斜,就可以不做这个倾

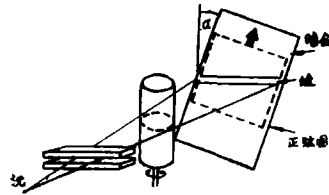


图29 在记录过程中,用胶片暗盒在它自己的平面中的旋转安装,可实现现在正弦图上的投影记录。

斜。

况且，我们已看到投影足距离 r_p 与在正弦图中度量的距离 S 有十分近似于线性的关系，并且在处理中的误差对于许多目的来说，可以忽略掉。因此在缝的方向上不必再重排数据。这也意味着：用于反投影之前或之后的数据的滤波运算，以静止（即位置不变）滤波器都能够完成。

附录A

本附录我们给出第三节中 (3.30) 式的证明。我们要求的量是：

$$P(\vec{r}) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi h_1(x') d\phi = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi h_1(r \cos(\theta - \phi)) d\phi \quad (A \cdot 1)$$

因为积分限是从 0 到 π ，且 h_1 是偶函数，容易看出 $P(\vec{r})$ 是回转对称的。对 $\theta = 0$ 求它的值并不失一般性。

第一步是把 $h_1(x')$ 用它的一维 Fourier 变换来表达：

$$h_1(x') = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi H_1(\xi) \exp(-2\pi i \xi x') \quad (A \cdot 2)$$

于是方程 (A·1) 变成：

$$P(\vec{r}) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\phi \int_{-\infty}^{\infty} d\xi H_1(\xi) \exp(-2\pi i \xi r \cos\phi) \quad (A \cdot 3)$$

做 ϕ 积分后给出：

$$P(\vec{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} H_1(\xi) J_0(2\pi \xi r) d\xi \quad (A \cdot 4)$$

如果 $H_1(\xi) = H_1(-\xi)$ ($h(x)$ 将是实的和偶函数)，上式变成：

$$P(\vec{r}) = 2 \int_0^\infty J_0(2\pi \xi r) [H_1(\xi)/|\xi|] |\xi| d\xi \quad (A \cdot 5)$$

可看出它是 $H_1(\xi)/|\xi|$ 的 Hankel 变换。因为回转对称函数的二维 Fourier 变换是 Hankel 变换，在形式上我们有：

$$P(\vec{r}) = \frac{1}{\pi} F_2^{-1} \{ [H_1(\xi)/|\xi|]_{|\xi| \rightarrow \rho} \} \quad (A \cdot 6)$$

证毕

这方程解释时必须注意，即是说，必须把一维函数 $H_1(\xi)/|\xi|$ ，或在第三节中的 $A_1(\xi)$ ，重新解释为二维的回转对称的以 ρ 替换 $|\xi|$ 形式的函数，然后把得出的二维函数看作是在 (A·1) 式指定的那个角积分的二维 Fourier 变换。

附录B

在弯曲胶片的情况下（见图28） S 和 r ，间正确关系用方程 (7.7) 式给出：

$$S = D(\phi - \phi_p) = D \sin^{-1}(r_p/d) \quad (B \cdot 1)$$

如果忽略掉 r_p/d 的四次幂以上的项，我们得到：

$$S = m r_p (1 + \frac{1}{6} (r_p/d)^2) \quad (B \cdot 2)$$

其中 $m = D/d$ 。我们要求的是在范围 $0 < r < r_{max}$ 上 (B·2) 和直线：

$$S = k r_p \quad (B \cdot 3)$$

间的最小均方配准。因此，我们企望使差值方程的均方值最小（相对 k 而言）。差值方程是：

$$\Delta S = r_p(m - k) + \beta \gamma^3 \quad (B \cdot 4)$$

其中 $\beta = m/6d^2$ ，所要求的 k 值用解下面方程给定：

$$\frac{\partial}{\partial k} \left\{ \frac{1}{r_{max}} \int_0^{r_{max}} \Delta S^2 dr_p \right\} = 0 \quad (B \cdot 5)$$

要先求下面的积分：

$$I = \frac{1}{r_{max}} \int_0^{r_{max}} [(m - k)^2 r_p^2 + 2\beta(m - k) r_p^4 + \beta^2 r_p^6] dr_p \quad (B \cdot 6)$$

$$= r_{max}^2 (m - k)^2 / 3 + 2\beta(m - k) r_{max}^4 / 5 + \beta^2 r_{max}^6 / 7 \quad (B \cdot 7)$$

对 k 微分我们得到：

$$\partial I / \partial k = (2r_{max}^2/3)k - 2mr_{max}^2/3 - 2\beta r_{max}^4/5$$

求 $\partial I / \partial k = 0$ 的值给出要求的 k 值：

$$k = m + 3\beta^2 r_{max}^2 / 5 \quad (B \cdot 8)$$

最小均方根定位不准误差 $\overline{\Delta S}$ 由 (B·8) 代入 (B·7) 并取平方根给出：

$$\overline{\Delta S} = \sqrt{I} = \beta r_{max}^3 \frac{4}{10\sqrt{7}} = m r_{max}^3 /$$

(下转第72页)

结 语

在最近五年里，系统和元件的多样性得到了发展，即光学数据连接，集成光学和液体晶体显示器。这些光学新概念要求改善的涂层和滤光片并且发展了复杂的测量仪器。对于希望在1980年实现设想的传感器需要上

述的滤光片和涂层。在这个领域过去发展的基础上，上述技术规格说明在1980年左右出现将是十分自然的事情。

译自“Optical Coatings Applications
and Utilization”

Vol.50, P209—213, 1974.

(齐钰译，袁幼心校。)

(上接第61页)

$$(15 \cdot \sqrt{7} \cdot d^2) \quad (B \cdot 9)$$

借助物体(在源处)所张的最大角 ϕ_{max} ，
(B·9)变成：

$$\overline{\Delta S} = D \sin^{-1} \phi_{max} / 15 \sqrt{7} \quad (B \cdot 10)$$

如果现在我们为简化假设， $\sin \phi_{max} = \phi_{max}$ ，得到：

$$\overline{\Delta S} = 0.025 \delta_{max} \phi_{max}^2 \quad (B \cdot 11)$$

自然，其中 ϕ 是弧度， S_{max} 是正弦图中对应

的最大尺度。这就是均方根偏差。

最大偏差是在 $S = S_{max}$ 处，由 (B·4) 和 (B·8) 得到它的值为：

$$\Delta S_{max} = 2\beta r_{max}^3 / 5 \quad (B \cdot 12)$$

它超过均方根偏差 $\sqrt{7}$ ($= 2.65$) 信，于是：

$$\Delta S_{max} = 0.067 S_{max} \quad (B \cdot 13)$$

金友译
遼小靖校