

波面变形传播

向 才 新

Kingslake 在波差测量中,曾注意到波面变形传播的影响^[1]。我们曾利用这种观点来计算Fizeau干涉仪的系统误差,与他种方法所得的结果相同^[1]。然而这一现象并未引起广泛的注意,以致不能正确处理某些光学测试等有关问题。

本文首先讨论波面变形传播的一般性质,然后用所得结果修正那些我们感兴趣的某些光学公式,使其具有比较普遍的意义,从而指出某些光学检测中的合理方法。

根据惠更斯原理,波面沿其法线方向传播,各处的波面彼此平行。设波面位于O处时,第一、二曲率分别为 K_1 、 K_2 。则波面传播至O'处的第一、二曲率分别为^[1]:

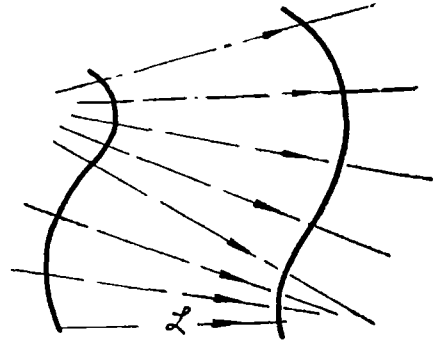
$$K'_1 = \frac{\epsilon(K_1 - 2LK_2)}{1 - LK_1 + L^2K_2}; \quad (1)$$

$$K'_2 = \frac{K_2}{1 - LK_1 + L^2K_2}。 \quad (2)$$

其中,L为O、O'两处的波面间距, $\epsilon = \pm 1$ 。(文中所有L与图一、二中的 ϱ 等同)

(1)、(2)式表明: K_1 、 K_2 为常数时, K'_1 、 K'_2 亦为常数。即无像差的球面波或平面波将保持原波面面形无像差地传播。否则,若波面有像差,即 K_1 、 K_2 不为常数,则 K'_1 、 K'_2 亦不为常数,且与 K_1 、 K_2 之比也不为常数。这意谓着:像差波面在传播过程中,波面面形将逐渐变形,与原波面相比,即不相同,也不相似,正如(图一)所表明的那样。

(图二)中,OB为一实际波面,O'B'为OB传播一段距离L后的实际波面。OA、



图(一)

O'A'分别为OB、O'B'的两个同心参考球面,其间距亦为L;AA''C为参考球面OA、O'A'的法线,ABB'为OB、O'B'的B、B'点处的几何光线,两者的夹角为 θ 。

θ 即为光线ABB'的角像差,由(图二)有:

$$BA' + A'B' = BB' = L \quad (3)$$

$$[AB + BA' - \Delta f(L, \theta)] \cos \theta = AA'' = L. \quad (4)$$

$$(4) \text{式中} \Delta f(L, \theta) = [(R - L)$$

$$- \sqrt{(R - L)^2 - (L\theta)^2}] \cdot \sec \theta \text{ 为}$$

参考球面A'点至参考球面A''点切线的距离。AB = W₁、A'B' = W₂分别为光线ABB'在B、B'处的光程差。由(3)、(4)式之差,得到波面传播距离L后的波面像差改变量为:

$$\Delta W = W'_2 - W_1$$

$$= L \left(1 - \frac{1}{\cos \theta}\right) - \Delta f(L, \theta)。 \quad (5)$$

当 $(R - L) \gg L\theta$ 时, $\Delta f(L, \theta) \rightarrow 0$,

(5)式简化为:

$$\Delta W = \frac{1}{2} L \theta^2$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W_1^1}{\partial \rho} \right)^2 \quad (6)$$

(6)式中 ρ 为光线在O处的高度。(这里假定光波在空气中传播)。

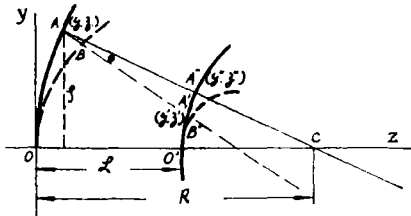
仅考虑初级波像差或轴上球面波差时，(6)式变为〔附录〕：

$$\Delta W_{\text{初}} = \frac{1}{2} L \left(\frac{\sum_{n=2}^4 n W_n}{\rho} \right)^2, \quad (7)$$

$$\Delta W_{\text{轴球}} = 8L \left(\frac{W_4}{\rho} \right)^4. \quad (8)$$

无像差时，设光线上两点的位置坐标分别为 (y, z) ； (y'', z'') 。如(图二)所示。则当 $z \ll R$ 时，曲率半径为 R 的球面的法线方程为：

$$y'' = \frac{L-R}{R} y. \quad (9)$$



(图二)

(9)式中， y, y'' 为间距为 L 的两点处的光线高度。无像差时，在 L 处光线的高度 y' 随 y 作线性变化。当波面有像差时， L 处的光线高度为：

$$y' = y'' + L\theta. \quad (10)$$

由(9)及(10)式，在 L 处，像差所引起的光线高度变化量 Δy 为其垂轴几何像差所决定：

$$\Delta y = L \left(\frac{\partial W_1^1}{\partial \rho} \right). \quad (11)$$

仅考虑初级波面像差或轴上球面波差时，(11)式改变为：

$$\Delta y_{\text{初}} = L \left(\frac{\sum_{n=2}^4 n W_n}{\rho} \right), \quad (12)$$

$$\Delta y_{\text{轴球}} = L \left(\frac{4W_4}{\rho} \right), \quad (13)$$

由于 W_1^1, W_n 为 $y^2, y^3, y^4 \dots$ 的函数，故 L 处光线高度改变量 $\Delta y, \Delta y_{\text{初}}, \Delta y_{\text{轴球}}$ 不是 y 的线性函数。

根据(7)、(8)式和(12)、(13)式，分

别计算了不同波差值的波面 $W_1^1 = \sum_{n=2}^4 n W_n$

传播至不同距离 L 处， $\rho=1$ 时的波像差改变量和光线高度的非线性变化量。

表 1

W_2	$3(\lambda)$	2	1	0.5	0.1				
W_3	$3(\lambda)$	2	1	0.5	0.1				
W_4	$5(\lambda)$	4	3	2	1	0.5	0.1	0.05	0.01
$\sum_{n=2}^4 n W_n$	$32(\lambda)$	24	16	10	4.4	2	0.4	0.2	0.04
L									

50(mm)	12.8(λ)	8.0(λ)	3.2(λ)	1.2(λ)	0.2(λ)				
300	76.0	44.0	19.2	7.2	1.2				
500	128.0	76.0	32.0	12.4	2.0				
1000			64.0	24.8	4.4	2.0			
1500				37.2	6.4	3.2			
2000					8.8	4.0	0.08	0.02	8×10^{-4}
3000							0.12	0.03	12×10^{-4}
5000							0.20	0.05	20×10^{-4}

(表一)

$$\Delta W_{初} = \frac{1}{2} L \left(\frac{\sum_{n=2}^4 n W_n}{\rho} \right)^2 \quad \text{计算值}$$

表 2

W_2	3(λ)	2	1	0.5	0.1				
W^3	3(λ)	2	1	0.5	0.1				
W^4	5(λ)	4	3	2	1	0.5	0.1	0.05	0.01
$\sum_{n=2}^4 n W_n$	32(λ)	24	16	10	4.4	2	0.4	0.2	0.04
L									
50(mm)	0.8(mm)	0.6(mm)	0.4(mm)	0.2(mm)	0.12 (mm)	0.06 (mm)	0.02 (mm)		
300	4.8	3.6	2.4	1.5	0.66	0.26	0.06	0.04 (mm)	
500	8.0	6.0	4.0	2.4	1.10	0.50	0.10	0.06	
1000	16.0	12.0	8.0	4.8	2.20	1.00	0.20	0.10	0.02 (mm)
1500		18.0	12.0	7.2	3.40	1.70	0.40	0.20	0.04
2000			16.0	9.6	4.40	2.00	0.60	0.40	0.08
3000					9.60	3.00	0.80	0.40	0.08
5000					11.00	5.00	1.00	0.60	0.12

(表二)

$$\Delta y_{初} = L \left(\frac{\sum_{n=2}^4 n W_n}{\rho} \right) \quad \text{计算值}$$

上述结果指出：波面传播时，只有当其波面像差足够小或传播距离足够小，该波面的传播才可能近似地视为非变形的。

下面把波面变形传播结果贯彻到我们感兴趣的光学公式与检测方法中去。

(一) 波面传播方程和全息摄影

通常的传播方程为：

$$\vec{a}(x \cdot y) = a(x \cdot y) \cdot \exp[-j\phi(x \cdot y)]. \quad (14)$$

以及由此所表写的全息板处的干涉方程为〔IV〕：

$$\varphi(x \cdot y) = |\vec{A}(x \cdot y)|^2 + |\vec{a}(x \cdot y)|^2 + 2A(x \cdot y), a(x \cdot y) \cos[\varphi(x \cdot y) - \phi(x \cdot y)]. \quad (15)$$

(14)、(15)式中， $\vec{a}(x \cdot y)$ 、 $\phi(x \cdot y)$ 分别为物体波 $\vec{a}(x \cdot y)$ 的振幅和位相。 $\vec{A}(x \cdot y)$ 、 $\varphi(x \cdot y)$ 分别为参考波 $\vec{A}(x \cdot y)$ 的振幅和位相。由于 (14)、(15) 式中没有明显包含波面变形传播影响的函数值，于是似乎可以得到这样的结果，观测物像或全息的再现现象，其对焦位置可以是任意的。事实并不如此。为了表明这一事实，(14)、(15) 式中应包含有波面变形传播的函数值。根据 (6)、(11) 式以及〔附录〕(A10)∞(A12) 式，(14)、(15) 式应修改为：

$$\vec{a}'(x, y) = a \left(y - L \frac{\sum_{n=1}^{\infty} n\phi_n}{y} \right) \cdot \exp \left\{ -j \left[\phi(y) + \frac{1}{2} L \left(\frac{\sum_{n=1}^{\infty} n\phi_n(y)}{y} \right)^2 \right] \right\}. \quad (16)$$

$$\varphi'(n \cdot y) = \left| \vec{A} \left(y - L \frac{\sum_{n=1}^{\infty} n\phi_n}{y} \right) \right|^2 + \left| \vec{a} \left(y - L \frac{\sum_{n=1}^{\infty} n\phi_n}{y} \right) \right|^2$$

$$+ 2A \left(y - L \frac{\sum_{n=1}^{\infty} n\phi_n}{y} \right) \cdot$$

$$a \left(y - L \frac{\sum_{n=1}^{\infty} n\phi_n}{y} \right) \cdot$$

$$\cos \left\{ \varphi(n \cdot y) - \phi(x \cdot y) \right\}$$

$$+ \frac{1}{2} L \left\{ \left(\frac{\sum_{n=1}^{\infty} n\phi_n(y)}{y} \right)^2 \right.$$

$$\left. - \left(\frac{\sum_{n=1}^{\infty} n\phi_n(y)}{y} \right)^2 \right\} \quad (17)$$

为简略计，(16)、(17) 式中的 a 、 \vec{a} 、 A 、 \vec{A} 只写为 y 的函数。

(二) 波面像 (光程) 差相加公式

通常的光学系统的波像差相加公式为：

$$W = \sum_{i=1}^m W_i'. \quad (18)$$

(18) 式中， W_i' 为每个镜面所产生的波面像差。在这个公式中，没有计及像差波面由前镜面传播至后镜面的波差改变量。正如 Hopkings 所提及，这个公式是不严格的。从严格的波面变形传播观点，根据 (6)、(7)、(8) 式，(18) 式应修改为：

$$W_{\text{总}} = \sum_{i=1}^m \left\{ W_i' + \frac{1}{2} L_i \left(\frac{\partial W_i'}{\partial \rho_i} \right)^2 \right\} = W + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m L_i \left(\frac{\partial W_i'}{\partial \rho_i} \right)^2. \quad (19)$$

当 W_i' 为初级波像差或轴上初级波面球差时，(19) 式简化为：

$$W_{\text{总}} = W + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m L_i \left(\frac{\sum_{n=2}^i n W_n'}{\rho_i} \right)^2. \quad (20)$$

$$W_{\text{轴球}} = W + 8 \sum_{i=1}^m L_i \left(\frac{W_i}{\rho} \right)^2. \quad (21)$$

(19)、(20)、(21) 式表明：1, 检测望远、照相系统时，平行光管物镜应尽可能靠近被测镜头；2, 自准检测法中，平面反射镜应靠近被测镜头。

(三) 干涉方程和干涉图的摄取

通常的双光束干涉方程的一般公式为^[7]：(符号的意义见^[7])。

$$I = I_1 + I_2 + 2(I_1 I_2)^{\frac{1}{2}} |\gamma_{12}| \cdot \cos \frac{1}{2} C \cos \left\{ \alpha_{12} - 2\pi \nu \tau - K \left[\vec{t} \cdot \vec{v} + \frac{v^2 \cdot \Delta y}{2y_2} - W_1 + W_2 \right] \right\} \quad (22)$$

(22) 式中， W_1 、 W_2 分别为被测系统和参考面的波像差。 $\vec{t} \cdot \vec{v}$ 、 $\frac{v^2 \Delta y}{2y_2}$ 分别为被测波面与参考波面相互倾斜和纵向分离时两者间的波像差。这两项可归并于被测系统波像差中。因之 (22) 式可以简写成：

$$I = I_1 + I_2 + 2(I_1 I_2)^{\frac{1}{2}} |\gamma_{12}| \cos \frac{1}{2} C \cdot \cos \left\{ \alpha_{12} - 2\pi \bar{\nu} \tau - k \left[W_2 - W_1 \right] \right\}. \quad (23)$$

(22)、(23) 式没有考虑到波面变形传播的影响，因而此式不能解释干涉仪的两种干涉图摄取方法的可能性。这两种方法是：1, 照相机对准被测面（如面形检测）或被测镜头出瞳面上（如测定镜头波像差）^[8]；2, 不用照相机，把干涉图直接投影在摄影底片上^[9]。为此，必须按波面变形传播观点，根据 (6)、(7)、(8) 式，给予修正，如下式：

$$I_{\text{★}} = I_1 + I_2 + 2(I_1 I_2)^{\frac{1}{2}} |\gamma_{12}| \cos \frac{1}{2} C \cdot \cos \left\{ \alpha_{12} - 2\pi \bar{\nu} \tau - k \left[W_2 - W_1 \right] \right\}$$

$$\left. \left. \left. \frac{L_2}{2} \left(\frac{\partial W_2}{\partial \rho_2} \right)^2 - \frac{L_1}{2} \left(\frac{\partial W_1}{\partial \rho_1} \right)^2 \right] \right\} \right\} \quad (24)$$

仅考虑初级波像差或轴上初级球面波差时，(24) 式简化为：

$$I_{\text{初}} = I_1 + I_2 + 2(I_1 I_2)^{\frac{1}{2}} |\gamma_{12}| \cos \frac{1}{2} C \cos \left\{ \alpha_{12} - 2\pi \bar{\nu} \tau - k \left[W_2 - W_1 + \frac{L_2}{2} \left(\frac{\sum_{n=2}^4 n W_{2 \cdot n}}{\rho_2} \right)^2 - \frac{L_1}{2} \left(\frac{\sum_{n=2}^4 n W_{1 \cdot n}}{\rho_1} \right)^2 \right] \right\}, \quad (25)$$

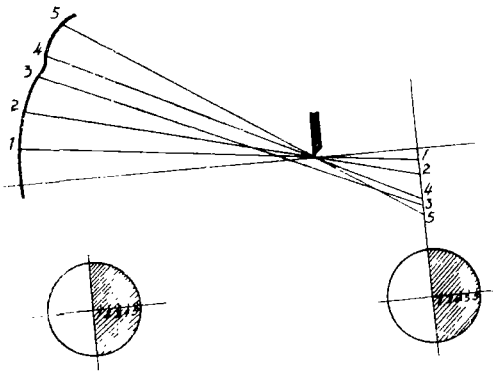
$$I_{\text{轴球}} = I_1 + I_2 + 2(I_1 I_2)^{\frac{1}{2}} |\gamma_{12}| \cos \frac{1}{2} C \cos \left\{ \alpha_{12} - 2\pi \bar{\nu} \tau - K \left[W_2 - W_1 + 8L \left(\frac{W_{2 \cdot 4}}{\rho} \right)^2 - 8L_1 \left(\frac{W_{1 \cdot 4}}{\rho_1} \right)^2 \right] \right\}. \quad (26)$$

(24)、(25)、(26) 指出：原则上，摄取干涉图，照相机应对焦于被测物面或被测镜头出瞳面上。只有当所测波像差足够小或摄影距离足够短时，才可以不用摄影物镜。

(四) 阴影图的摄取

(11)、(12)、(13) 式指出，由于像差波面的变形传播，在传播方向的各位置处，光线高度改变量是非线性的。在阴影检测法中，光线高度改变量的非线性现象是很明显的，例如：被测镜面上位于 (1、2、3、4、5) 点处的光线，而在距离 L 处的位置则为 (1、2、4、3、5)，如 (图三) 所示：

照相机对准被测面，或不用照相机直接投影以摄取阴影图，如 (图三) 下部两阴影图所示。这两张照片是不相同的。为获得正确的阴影图，应采用前种方法。



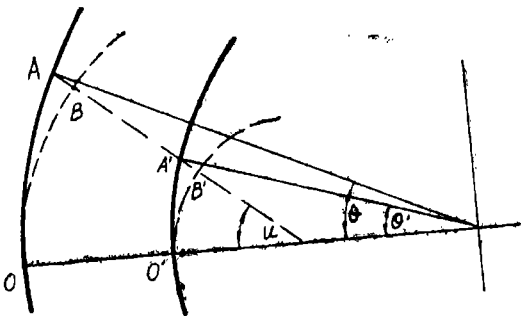
图三

(五) 光阑移动时波面球差的变化

现在公认：光学镜头的光阑移动时，光瞳处的波面球差不变^[5]。我们认为，这个结果只是近似的。这个结果的获得，是由于这些作者认为：光阑（瞳）移动，其效果只是相当波差方程中的光线位置坐标进行一次线性坐标变换。其实，根据前述波面变形传播观点，这种作法是不严格的。即是说，不能藉光线位置坐标的线性变化，求解光阑（瞳）移动前后，光瞳波面球差的变化量。从而不能得出结论，光阑（瞳）移动前后、光瞳波面球差不变。

下面从另一个方面，——轴上纵向几何球差与波面像差的普遍关系式，来旁证我们的结论。纵向几何球差 δL 与波面球差 W 有下面的普遍关系式^[6]

$$W = N \int_0^{\theta} \delta L \cdot \tan U \cdot \cos \theta \cdot d\theta \quad (27)$$



图四

(27) 式中， θ 为孔径角， U 为光线与光轴的夹角， N 为光线所在空间的折射率。当光阑移动时，出瞳由 O 点移至 O' 点。在 O 、 O' 两点处的实际波面与参考波面分别为 OB 、 $O'B'$ ； OA 、 $O'A'$ 所表示。在光瞳 O' 处，对同一光线，其孔径角由 θ 变为 θ' 。这时波面像差为：

$$W' = N \int_0^{\theta'} \delta L \cdot \tan U \cdot \cos \theta' \cdot d\theta' \quad (28)$$

由于 $\theta \neq \theta'$ ，由 (27)、(28) 式，得到：

$$W' \neq W \quad (29)$$

只有当 $\theta' = \theta \rightarrow U$ 时，即像差较小，或光阑移动距离很小时，则有：

$$W = W' \quad (30)$$

所得结论与波面变形传播的论断一致。

根据波面变形传播观点，光瞳（拦）移动距离 L 后的波面球差，由 (6) 式，应为：

$$W' = W + \frac{1}{2} L \left(\frac{\partial W}{\partial \rho} \right)^2 \quad (31)$$

W 可以表写为各级波面球差 W_4 、 W_6 、 W_8 ... 之和，根据 [附录]，不难得到：

$$W' = W + \frac{1}{2} L \left(4W_4 + 6W_6 + 8W_8 + \dots \right)^2 \quad (32)$$

仅考虑初级波面球差时，(32) 式简化为：

$$W'_{初} = W_4 + 8L \left(\frac{W_4}{\rho} \right)^2 \quad (33)$$

顾去吾同志对本文提出宝贵意见，蒋筑英，薛明球同志审阅修改全文，深表感谢。

[附录]

根据 Hopkings 的观点^[7]，一个同轴光学系统或镜头的波面像差为各个镜面的波面像差之和，其表写式为（符号的意义与 Hopkings 的相同）：

$$W = \sum_{i=0}^n {}_2i C_{20} r^2 + \sum_{i=0}^n {}_2i C_{40} r^4 + \sum_{i=1}^n {}_2i C_{22} \cdot r^2 \cos^2 \varphi$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=1}^m {}_2i C_{42} r^4 \cos^2 \varphi + \dots \\
& + \sum_{i=1}^m {}_2i-1 C_{11} r \cos \varphi \\
& + \sum_{i=1}^m {}_2i-1 C_{31} r^3 \cos \varphi + \dots \\
& = \left. \sum_{i=1}^m W_{S2}^i + \sum_{i=1}^m W_{S1}^i + \dots \right\} \text{球差型} \\
& \text{波像差,} \\
& + \left. \sum_{i=1}^m W_{A2}^i + \sum_{i=1}^m W_{A1}^i + \dots \right\} \text{像散型} \\
& \text{波像差,} \\
& + \left. \sum_{i=1}^m W_{C1}^i + \sum_{i=1}^m W_{C3}^i + \dots \right\} \text{慧差型} \\
& \text{波像差.} \tag{A1}
\end{aligned}$$

(A1)式中, m 为光学系统或镜头的镜面数, ${}_2i C_{20} \cdot r^2 = W_{S2}^i \dots {}_2i C_{22} r^2 \cos^2 \varphi = W_{42}^i \dots$
 ${}_2i-1 C_{11} r \cos \varphi = W_{C1}^i \dots$ 为各个镜面的球差型、像散型、慧差型各波面像差。又若命:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^m W_{S2}^i &= W_2^S, & \sum_{i=1}^m W_{S4}^i &= W_4^S, \\
\sum_{i=1}^m W_{A2}^i &= W_2^A, & \sum_{i=1}^m W_{A1}^i &= W_1^A, \\
\sum_{i=1}^m W_{C1}^i &= W_1^C, & \sum_{i=1}^m W_{C3}^i &= W_3^C,
\end{aligned} \tag{A2}$$

代(A2)式于(A1)式, 则(A1)式可写为:

$$W = \sum_{n=1}^{\infty} W_{2n}^S + \sum_{n=1}^{\infty} W_{2n}^A + \sum_{n=1}^{\infty} W_{2n-1}^C. \tag{A3}$$

(A3)式中, n 代表像差级。由(A1)、(A3)式得:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W}{\partial r} &= \frac{1}{r} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} 2n W_{2n}^S + \sum_{n=1}^{\infty} 2n W_{2n}^A \right. \\
& \left. + \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1) W_{2n-1}^C \right\}. \tag{A4}
\end{aligned}$$

仅考虑初级波像差或轴上初级波面球差时, (A4)式简化为:

$$\frac{\partial W_{\text{初}}}{\partial r} = \frac{1}{r} \sum_{n=2}^4 n W_n; \tag{A5}$$

$$\frac{\partial W_{\text{轴球}}}{\partial r} = \frac{4}{r} W_4. \tag{A6}$$

又因: $r = \frac{\rho}{\rho_{\max}}$, ρ_{\max} 为 ρ 的最大值。

于是(A4)、(A5)、(A6)式可改写为:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W}{\partial \rho} &= \frac{1}{\rho} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} 2n W_{2n}^S + \sum_{n=1}^{\infty} 2n W_{2n}^A \right. \\
& \left. + \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1) W_{2n-1}^C \right\}; \tag{A7}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial W_{\text{初}}}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} \sum_{n=2}^4 n W_n; \tag{A8}$$

$$\frac{\partial W_{\text{轴球}}}{\partial \rho} = \frac{4}{\rho} W_4. \tag{A9}$$

对于一个任意一度位相物体, 或中心对称位相物体, 其位相可表写为:

$$\varphi(y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n y^n. \tag{A10}$$

其中 A_n 为常数, y 为空间坐标, 若命:

$$\varphi_n = A_n y^n,$$

则(A10)式可写为:

$$\varphi(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n. \tag{A11}$$

由(A10)、(A11)式, 得:

$$\frac{\partial \varphi(y)}{\partial y} = \frac{1}{y} \sum_{n=1}^{\infty} n \varphi_n. \tag{A12}$$

参 考 文 献

- [I] Kingslake, R; Tran, Oget, Soc. 1926 —27(28)I.
- [II] 向才新, 关于 Fizeau 干涉仪。(未发表)。
- [III] Weatherburn, C.E., Differential

下转22页

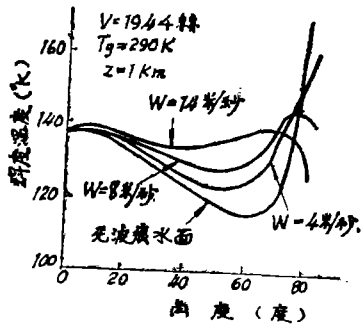


图15 海面的辉度温度

大的变化。图15为在19.4GHz的海面上测定其辉度温度的实例。把海洋表面所视察到的角度变化情况，以海洋上的风速作为参数来表示，这时候所得到的辐射率是由风速决定

的，除0.5外，取视场方向 50° ，这时的辐射率由于风速变化而变化的情况就更明瞭了。利用这样的无线电波，对海洋表面状态进行调查，是很广泛的，其实用效果也是很好的。

5. 结 束 语

以上介绍的主要是电磁波在遥感中的应用及应用原理。本文若对遥感爱好者多少有点参考价值的话，那作者就感到荣幸了。

译自日本《电视技术》Vol. 29, No. 3.

P164~170.1975

(王厉 译 朱云青 校)

上接7页

geometrg of He three dimenrions, Cambridge unirerity kres, 1955, p.159.

- [VI] 例如：顾德门，J.W.；傅里叶光学导论，科学出版社，1976，p.226。
- [V] Hotekinge, H.H.；Waue Heorg of aberiatron, Clarendon press.1950.
- [IV] Steel, W. H.；Progrese in optics, vol V., p.157.
- [VII] 例如：查哈里也夫斯基，干涉仪，

上接14页

- [2] E, J, Watson, Math Comp 16, 368 (1962)

(顾去吾等译)，科学出版社，1966，P.190。

- [XII] 例如：Kocher, D.G., App. Optico 1972(11)1872.
- FOuèrè, J. C. and Malacara, D., App. Optico, 1974(13)2035.
- [IX] 例如：王之江，光学设计理论基础，科学出版社，1965，P.205.
- Maréchal, A.; Handrbuch der Physik, S—V.B.G—H, 1956, uot. 24, P.136.
- [3] E, D, Nelson and M, L, Fredman, Hadamard S; ecfroscopy J, (), S, A (p.1664)1970