不圆度的V形测量法*

邹 自 强

提要 本文为我们研究轴颈误差V形测量方法的综合小结，其中包括测量极圆轴颈和一般圆形另件。

文中首先分析了不圆度误差在V形测量装置上的反映过程。每当轴颈转动一圈，轴颈上每一点误差都先后在测头示值中以不同大小反映三次，测头的每一个示值又都是轴颈上三部分误差按一定规律合成的结果。反映系数是描述这个反映过程、表征测头示值和误差实际值之间关系的重要参数，它决定于V形角度、测杆偏角和误差频谱特性等三个因素，其数量关系比较复杂，我们利用电子数字计算机对其关系进行了详细计算，列成了反映系数表供实际工作查用参考。

在研究分析上述反映系数表的基础上，文中提出了三种测量方案供实际工作选用，即：

（1）$2\alpha=60°$， $\gamma=30°$；

（2）$2\alpha=90°$， $\gamma=30°$；

（3）$2\alpha=60°$， γ分别取0° 和30°

文中介绍了使用上述方案进行实测的装置情况，及注意事项，讨论了当不圆度达到0.05微米数量时测量工作应注意的问题及相应的措施。

为了求得另件的不元度误差，对V形测量装置的测量结果必须进行一定计算，文中介绍了我们研究采用的三种计算方法，即（1）福氏分析法；（2）误差联系法；（3）简化计算法。分别举出实际的例子说明它们的用法。

一、引　　言

在机械制造中，另件的不圆度对于使用有重要影响，它影响主轴的旋转精度，引起定位误差、引起旋转噪音、降低使用寿命，等等，所以它已日益引起广泛的注意；在仪器制造中，例如在天文仪器和精密圆分度机中，不圆度则更是常常成为关键问题，以致必须进行专门的研究。正是由于不园度具有重要的使用意义，我国新颁布的《形位公差》国家标准对不圆度的定义、代号及公差值均作了明确规定，与此相应地，必须解决不圆度的测量问题。

* 在全国形位误差会议上的报告（1977年12月南宁）。

联立方程组或其它计算技术确定各δt_r的变更，这里要遇到较复杂的矩阵计算和计算结果具有实际意义的问题。

参 考 文 献

［1］A. Thelen, Design of multilayer interference filters, «Physics of Thin Films» 1968, Vol. 5。有中译文.

［2］H. A. Maclod, «Thin-Film Optical Filters», 1969. 有中译本.

［3］P. W. Baumelster, J. Opt. Soc. Amer., 1958, 48, 955～958.

［4］P. W. Baumelster, J. Opt. Soc. Amer., 1962, 52, 1149～1152.

一般地说，对不圆度的测量工作有两种不同的要求：一种是只要给出不园度的一个最大数值，目的是判断另件是否合格，这是生产现场经常遇到的情况；另一种是要给出截面轮廓误差曲线，即逐点给出轴颈表面的凹凸起伏量，目的是进一步了解不圆度的类型、性质和曲线，指导改进有关工艺和设计，这是仪器制造等行业时常碰到的情况。两种不同的要求可以用不同的方法来实现。

目前，测量不圆度主要使用圆度仪和V形块两种方法。使用元度仪上述两种要求均可实现，但是圆度仪价格昂贵，结构复杂，维护使用要求较高，我国许多重点单位现在尚未完全具备，一般工厂想要普遍设置更是困难。此外，圆度仪的复杂结构带来许多误差来源、轴系、测头、记录系统等其误差均直接影响测量结果，当不圆度要求很高，例如 0.1 微米左右时，现有圆度仪已测不准。再次，当另件直径过大或重量过重时，现有圆度仪也不能测。

利用V形块测量不圆度是一种简单易行的方法，它早在圆度仪出现以前便已为人们所熟悉。但是，使用V形块测量不圆度时，测头反映出来的数量并不就是不圆度误差，其间关系比较复杂，在有些情况下，实测值大于不圆度，而在有些情况下，实测值恰又小于不圆度，甚至有时，实测值根本反映不出不圆度误差，即，明明另件上存在着明显的不圆度误差，而实测值却为零。对于这种测量方法需要进行深入的研究。

一九六〇年我们在从事轴系精度方面的研究工作时，曾注意研究轴颈形状在磨损和研磨过程中的变化[2]，这就需要不断测量轴颈截面轮廓的误差曲线，我们开始研究使用V形测量法。研究轴颈形状的变化规律使我们掌握了一些途径，从而得到了不圆度在0.05微米以内的极圆轴颈，这促使我们去进一步研究V形测量法，设法提高其测量精度使之与0.05微米的不圆度相适应[1]。后来，我们在研制圆分度光电自动检验仪以及 0.2 秒光电圆分度机等项工作中，多次使用了这些研究结果。不断的实践使我们对V形测量法有了进一步的认识，从而后来摸索出了误差联系法和简化计算法。本文即为我们先后有关V形测量工作的综合小结。由于作者水平不高，实践经验也不多，文中不当之处，恳请同志们批评指正。

二、不圆度误差的反映过程

设想将轴颈放在一个V形座上，安上测头。当轴颈转动时，如果轴颈是理想的圆形，则测头示值不变；如果轴颈上某一点处有一凸起误差△，则在许多位置上这个误差并不反映到测头的示值中去（图 1 a），当轴颈转到（图 1 b）所示位置时，测头中反映出来的量$\triangle y$恰好与误差值相等，即

$$\triangle y=\triangle$$

当处于（图 1 c）所示位置时，误差△引起轴颈中心从O处移到O'处，从而使测头示值发生变动，误差在测头上的反映量

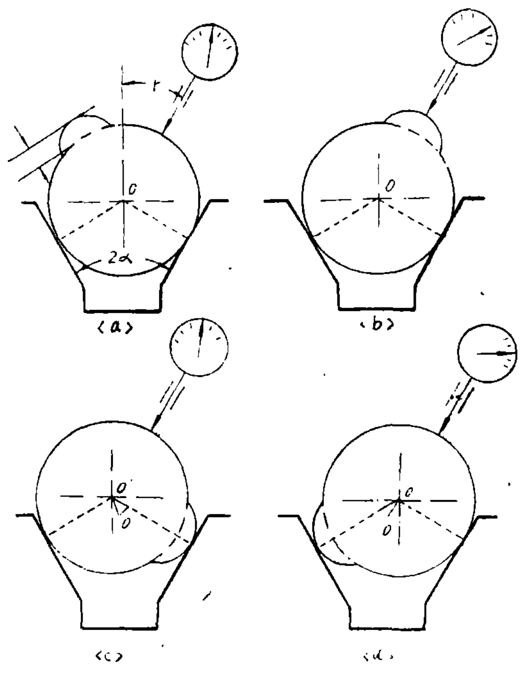

图 1　某一误差的反映过程

$$\triangle y = \frac{\triangle}{\sin 2\alpha \cdot} \cos(\alpha + \gamma) \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

式中：2α 为V形角度；

γ为测杆相对于V形角平分线的偏角，简称测杆偏角。

当处于（图1d）位置时，误差引起轴颈中心向另一方向移动，它在测头上的反映量

$$\triangle y = \frac{\triangle}{\sin 2\alpha} \cdot \cos(\alpha - \gamma) \quad \cdots\cdots\cdots(2)$$

每当轴颈转动一圈时，这个误差△在测头上反映三次，一般来说，这三次反映的量数值各不相等（图2）。实际上，轴颈上不会只有这样一点处才有误差，轴颈轮廓截面上各点都有自己的凹凸起伏量，在轴颈转动的某一瞬间，测头上的示值是测头下方的那一点和V形块两侧面处两点三者误差综合而成的结果。

轴颈截面轮廓曲线可以用下式表示（参看图3）。

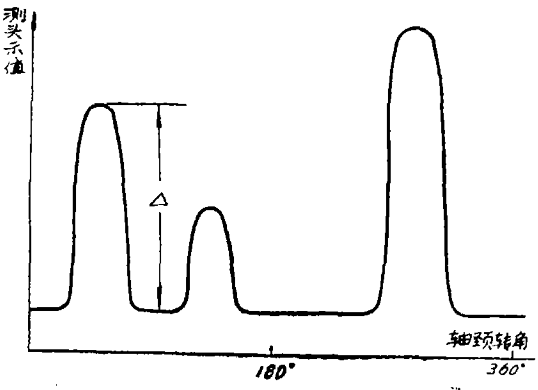

图2　轴颈转动时测头示值的变化

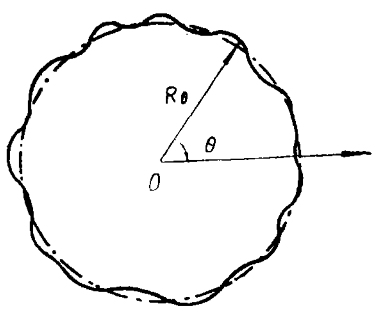

图3　截面误差的表示方法

$$R_\theta = R_O + \triangle R$$

这里：R_θ—— θ角处的极坐标向径；

R_O——轴颈轮廓曲线的平均半径；

$\triangle R$—— θ角处不圆度误差的起伏量；

θ——极坐标极角。

上式可以改写成

$$\triangle R = R_\theta - R_O$$

我们把$\triangle R$用下列福里哀级数来表示：

$$\triangle R = \sum_{K=1}^{\infty} (a_K \cos K\theta + b_K \sin K\theta) \cdots(3)$$

式中

K——误差函数谱项的阶数；

a_K——K阶谱项余弦项振幅；

b_K——K阶谱项正弦项振幅。

上式也可合并改写成以下形式：

$$\triangle R = \sum_{K=1}^{\infty} C_K \cos(K\theta + \theta_{OK}) \quad \cdots\cdots(4)$$

式中

C_K——K阶谱项振幅；

θ_{OK}——K阶谱项初始相位。

在轮廓截面上可以找到这样的一个点，当以这点作为极坐标原点时式（4）具有以下的形式：

$$\triangle R = \sum_{K=2}^{\infty} C_K \cos(K\theta + \theta_{OK}) \quad \cdots\cdots(5)$$

即一阶的福里哀系数等于0。这样的点一定是存在的，而且是唯一的（证略）。

当$K=2$时，上式反映椭圆形误差；$K=3$反映三棱形误差；$K=4$反映四棱形差，等等，依此类推。

值头示值的变化也可以用一个福里哀级数来表示

$$\triangle y = C_0' + \sum_{K=1}^{\infty} C_K' \cos(K\theta + \theta_{OK}') \cdots(6)$$

式中

$\triangle y$——测头示值的变化量；

C'_0——常数项；

C'_K——K阶谱项振幅；

θ'_{OK}——K阶谱项初始位相。

在实际工作中，常数项C'_0主要取决于测头另点的调整，在数据处理时总是要做到

$\Sigma\triangle y=0$

因而常数项$C'_0=0$

此外，一阶的福里哀系数实质是轴颈的偏心量，在装置调整正确时，它应为0。所以，式（6）可以写为

$$\triangle y=\sum_{K=2}^{\infty}C_K'\cos(K\theta+\theta'_{OK}) \quad \cdots\cdots(7)$$

比较式（5）和式（7），两者之间有一定的关系，令

$$\sigma_K=\frac{C'_K}{C_K} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

这个量，我们把它称之为K阶谱项的反映系数。这对实际测量工作是个重要参数。

三、反映系数及其影响因素

如式（8）所定义的，测得值函数和实际不圆度误差函数两者福里哀展开式中对应谱项的比值，叫做该阶谱项的反映系数。例如，σ_2是椭圆形误差的反映系数；σ_3是三棱形误差的反映系数；σ_4是四棱形误差的反映系数，等等。

反映系数这个量表徵了不圆度误差在V形测量装置上反映出来的明显程度，反映系数越大，不园度误差在测头读数上反映得越明显。当$\sigma_K>1$时，V形测量装置对不圆度误差起放大作用；当$\sigma_K<1$时，V形测量装置对不圆度误差起缩小作用。显然，我们希望得到大一些的反映系数，以便减小测头读数误差对不圆度测量结果的影响，从而提高不圆度的测量精度。

反映系数σ_K受V形角度2α、测杆偏角γ以及误差频谱特性K这三个因素的影响，经过推算可以求得它们之间的关系如下：

$$\sigma_K=\sqrt{1+\frac{\cos^2K(\frac{\pi}{2}-\alpha)}{\sin^2\alpha}\cos^2\gamma+\frac{\sin^2K(\frac{\pi}{2}-\alpha)}{\cos^2\alpha}\sin^2\gamma+2(-1)^K\left[\cos K\gamma\cos\gamma\frac{\cos K(\frac{\pi}{2}-\alpha)}{\sin\alpha}+\sin K\gamma\sin\gamma\frac{\sin K(\frac{\pi}{2}-\alpha)}{\cos\alpha}\right]} \quad \cdots\cdots(9)$$

从上式可以看出，它们之间的数量关系比较复杂，σ_K是三个变量的函数，为了求得不同V形角度、不同测杆偏角和不同谱项时的反映系数，供实际测量工作查找选用；为了具体研究σ_K的变化规律、选择较好的测量方案，有必要对σ_K进行详细计算，一九六三年矫永耀、韩永燮两位同志进行了此项工作，得到了反映系数表[1]，近来，韩之杰同志编制计算程序利用电子数字计算机进行了重新计算，得到了更详尽的反映系数表，如表一所示。

从表（一）可以看出，当V形角度取得很小时，例如$2\alpha<30°$时，σ_K大都很大，即，很小的不圆度误差在测头读数上却能反映出很大的数值，这个性质当然是很可贵的，但是，V形角度越小，被测另件在其中转动越困难，如不采取减重等特殊措施，是难以实际应用的。

从表（一）还可看出，$\sigma_K=1$的点是很个别的，这时，测头上反映出来的数值恰好等于某一种不圆度，当轴颈在这种V形块上转动时，就好象支承在一个没有误差的顶尖孔上转动一样。遗憾的是，这样的点对其他K值却又不适用。可以证明，当$\sigma_K=1$时，在$\gamma=0$条件下，测量装置恰好满足V形轴系的最小幌动条件，即

$$2\alpha=\left(1-\frac{1}{K}\right)\cdot 180° \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

（证略）

从表（一），我们还可看出，当$\alpha+\gamma=90°$时，即测杆垂直于V形块的一个侧面时，反映系数只可能出现两种数值：当K＝奇数时，$\sigma_K\equiv0$；当K＝偶数时，$\sigma_K\equiv2$。$\alpha+\gamma>90°$的情况在测量工作上也有一定用处，例如当被测另件直径很大时，可以采用图（4）所示的方法，这时，反映系数σ_K也可从表（一）中去查找。

从表（一），我们还可看出，在一般情况下，一个既定的V形装置，即一个既定的α、γ角，常常存在着一些反映系数小于1甚至等于0的情况。因此，一个一般的V形装置往往不能反映出不圆度的全部误差，例如，工厂最常使用90°V形铁，测杆放在V形铁平分线上，查阅表（一）我们就可知道，此时，不园度误差中的七棱形成份和九棱形成份根本测不出，四棱形成份也不易测准，(图5)。如果将测杆偏转10°，情况便大为改善（图5)。由此可见，调整测杆偏角对反映系数能起明显改变作用。

从表（一），我们还可看出，有时会出现反映系数$\sigma_K=0$的情况，即，尽管另件存在着明显的不圆度，测头示值却反映不出来，例如：工厂中较常使用的60°V形铁，$\gamma=0$，不能测出常见的椭园度误差。这种情况是怎样形成的呢？怎么直观地来理解呢？让我们参看图(6)，当椭图长轴与测杆方向重合时。（图中实线所示）测头下触着轮廓误差最大点，示值本应出现最大值，但这时V形块两侧面恰好接触着圆形较窄部分，截面中心因而向下跌落，这个过程恰好抵消了长轴端$\triangle\gamma$的增长量，测头示值保持不动。当椭圆短轴转到与测杆方向重合时（图6中虚线所示），测头上触着轮廓误差最低点，示值本应出现最低值，但这时，V形块两侧面恰好接触着椭圆形较长部分，截面中心因而被向上抬起，这个过程恰好弥补了短轴端$\triangle\gamma$的缩短量，测头示值因而仍保持不动，中间过程（点划线所示）也是如此。

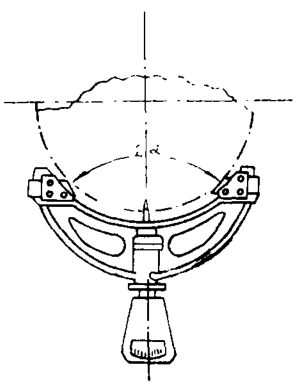

图4　$\gamma=180°$的情况

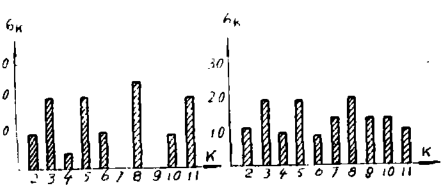

图5　90°V形块反映系数的变动情况

四、测昜方案及注忈事项

详细研究分析反映系数表，考虑到：σ_K尽量取大，尽量比较均匀*，V形角度尽量凑整易做**，以及2α不要过小等因素，

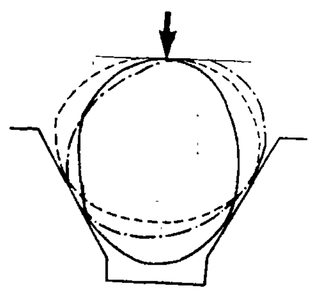

图6　$\sigma_K=0$的图示理解
（椭圆度$2\alpha=60°\ \gamma=0°$）

*：σ_K比较均匀，即$K=2\sim10$主要项的反映系数相差不大。具备这个性能也很重要，它使我们有可能提出一种简化计算方法）；（详见**七**）；

**：国外某些研究工作曾提出V形角度取25.7°等数值，（例如：*Machineary*65.3，*pp*99—101）我们则尽量选用60°、90°等这些工作中常用的整数角度，反映系数的加大靠调整γ角来配合实现；

我们推荐以下三个方案供实际测量工作选用：

（1）V形角度 $2\alpha=60°$，测杆偏角 $\gamma=30°$；

此时，$K=10$以前各项（实际误差中的主要项、常见项）反映系数如下：

K	2	3	4	5	6	7	8	9	10
σ_K	1.41	2.00	1.41	2.00	0.74	2.00	1.41	2.00	1.41

（2）V形角度$2\alpha=90°$，测杆偏 $r=30°$；此时反映系数如下：

K	2	3	4	5	6	7	8	9	10
σ_K	1.64	1.00	1.93	1.00	1.23	1.73	1.13	1.73	0.52

（3）V形角度 $2\alpha=60°$，测杆偏角 γ 分别取0°和30°此时，反映系数各取其中的较大值，

K	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
σ_K		3.00			3.00			3.00		($\gamma=0°$)
	1.41		1.41	2.00		2.00	1.41		1.41	($\gamma=30°$)

下面我们以极圆轴颈的测量为例，说明上述方案在实际工作中如何应用。

测圆装置如图（8）所示，工作台面上放置一对偏V形块，$2\alpha=60°$ 但V形块的一个侧面与工作台垂直，即偏转了 30°，两V形块距离可调，各与被测主轴的一端接触，主轴一端装上一个度盘，台面上伸出一个指针，用来确定主轴转过的角度。为了做到轴向定位，在主轴两端有两个位置可调的挡板，一个是刚性的，另一个是弹性的，产生轴向封闭力，主轴两端顶尖孔内分别装一个小钢球。台面上安置一个减重支架，上设减重滑轮和减重皮带，调整滑轮高度可以调整减重力的大小。光波干涉仪牢固定在台面上，测杆轴线和台面垂直。

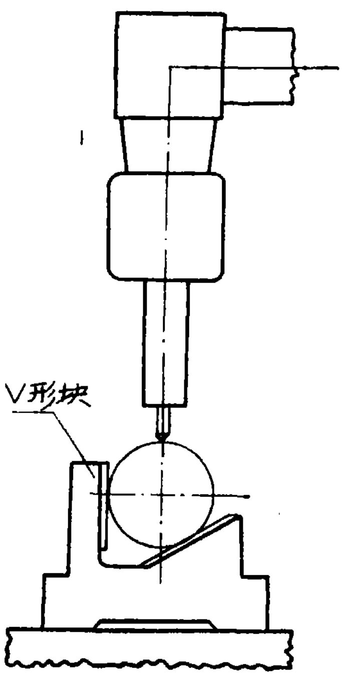

图 8　测量装置图

V形块的接触宽度应该足够窄，以保证支承点和测头处于同一截面上，否则，实际测量时数据中，容易出现一阶频谱成份，这是错误的。建议按下式来选取：

$$B=\left(\frac{1}{5}\sim\frac{1}{10}\right)D \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

式中 B——V形块工作宽度：

D——被测另件的直径。

V形块两侧工作面需硬度很高，不易磨损，保持很高平面度和∇_{13}以上光洁度。当被测轴颈装到V形块上时，保证接触良好。

振动需充分隔离，在干涉仪视场中不应看出条纹有任何抖动现象。测量环境需要恒温和防尘。将被测件放到测量装置上后需放置 3 ～ 4 小时，待温度平衡、干涉仪无明显另点漂移后才能开始测量。

为了减轻摩擦和转动平滑，两个V形块中的非测量端涂以稀薄润滑油（钟油、透平

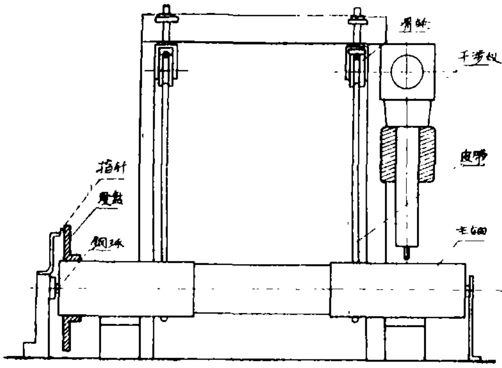

图 8　测量装置图

油等）是有益的。

干涉仪调整到格值 0.05—0.1μ，这样可以估读到 0.01～0.02μ。为了避免温度变化、机构弹性没效以及干涉仪另点漂移等对测量结果的影响，轴颈每测一圈需时间越短越好，我们取15°一个间隔，共24个测点，轴颈每转一转平均只需两分钟，这样，这些误差便影响很小。

我们测量的轴颈，一种直径为 50mm，另一种直径为60mm，长度约 600～900mm，有的是轴承钢，有的是氮化钢。由于重量较大，测量这种轴颈遇到的主要困难就是重复性差，为了克服这个困难，我们采取了减重措施（参看图 9），支架两端各有一个高度可调的带有滚珠轴承的滑轮，光滑的无接头皮带绕过滑轮分别套在被测轴的两端上，调整滑轮高度便逐渐减轻主轴对V形块侧面的压力，主轴旋转变得很轻松、很平滑，测量重复性便大为提高：图（9）a 为减重前两次测量重复性情况，图（9）b 为同一轴颈减

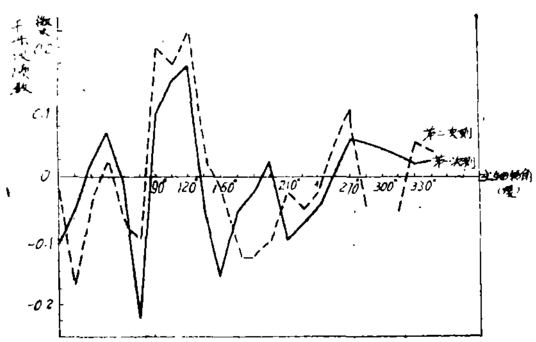

图 9 a　不减重测量曲线（主轴磨削后）

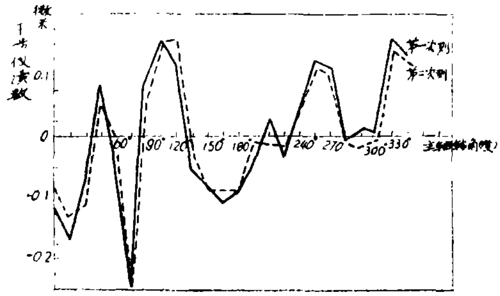

图 9 b　减重测量曲线（主轴磨削后）

重后两次测量重复性情况（这根主轴当时只经过磨削）。

为了减小干涉仪读数误差，每一轴颈复测四圈，然后取其平均值为最后结果，经过这样处理后，两次测量对应平均值之间的最大差异（根据多次实测例子计算）不超过 0.018～0.024μ，由于反映系数较大，最后所得不圆度$\triangle R$（截面轮廓误差）之间的最大差异（也根据多次实测结果计算）不超过 0.012～0.018μ，其中一例如图（10）及图（11）所示（详细数据参看下节）。

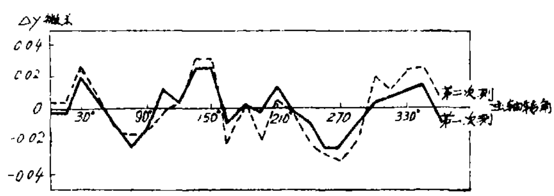

图10　对同一轴颈两次测量的读数示值

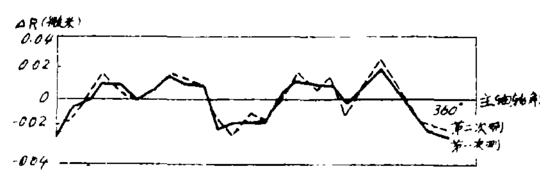

图11　两次测量最后求得的不圆度误差曲线

五、福氏分析法

经过上面分析我们知道V形测量装置上测量结果并不就是不圆度误差，为了求得不圆度误差必须进行相应计算。本节介绍用福氏级数进行计算的方法。

读数值 y_i / θ	y_1	y_2	y_3	y_4	y_1	y_2	y_3	y_4	$y_{横均}$
0°	0.36	0.37	0.36	0.34	−0.008	0.010	0.010	−0.010	0.0005
15°	0.36	0.37	0.34	0.36	−0.008	0.010	−0.010	0.010	0.0005
30°	0.39	0.39	0.36	0.38	0.022	0.030	0.010	0.030	0.0230
45°	0.36	0.38	0.35	0.36	−0.008	0.020	0	0.010	0.0055
60°	0.35	0.34	0.34	0.34	−0.018	−0.020	−0.010	−0.010	−0.0145
75°	0.36	0.36	0.31	0.32	−0.008	0	−0.040	−0.030	−0.0195
90°	0.38	0.33	0.33	0.32	0.012	−0.030	−0.020	−0.030	−0.0170
105°	0.39	0.34	0.34	0.34	0.022	−0.020	−0.010	−0.010	−0.0045
120°	0.39	0.35	0.34	0.34	0.022	−0.010	−0.010	−0.010	−0.0020
135°	0.40	0.39	0.38	0.36	0.032	0.030	0.030	0.020	0.0280
150°	0.40	0.38	0.38	0.38	0.032	0.020	0.030	0.030	0.0280
165°	0.34	0.33	0.34	0.33	−0.028	−0.030	−0.010	−0.020	−0.0220
180°	0.38	0.35	0.36	0.35	0.012	−0.010	0.010	0	0.0030
195。	0.35	0.34	0.34	0 31	−0.018	−0.020	−0.010	−0.040	−0.0220
210°	0.37	0.37	0.36	0.34	0.002	0.010	0.010	−0.010	0.0030
225°	0.37	0.37	0.34	0.34	0.002	0.010	−0.010	−0.010	−0.0020
240°	0.33	0.34	0.34	0.32	−0.038	−0.020	−0.010	−0.030	−0.0245
255°	0.33	0.33	0.33	0.31	−0.038	−0.030	−0.020	−0.040	−0.0320
270°	0.33	0.33	0.33	0.30	−0.038	−0.030	−0.020	−0.050	−0.0345
285°	0.34	0.34	0.34	0.32	−0.028	−0.020	−0.010	−0.030	−0.0220
300°	0.39	0.39	0.38	0.34	0.022	0.030	0.030	−0.010	0.0180
315°	0.39	0.38	0.35	0.35	0.022	0.020	0	0	0.0105
330°	0.39	0.38	0.38	0.36	0.022	0.020	0.030	0.010	0.0205
345°	0.38	0.38	0.38	0.38	0.012	0.020	0.030	0.030	0.0230
$y'_{纵均}$	0.368	0.360	0.350	0.350					

表 2 所列是我们对一台圆分度检验仪精密主轴实测结果（迄今为止，这个主轴及检验仪已经使用了十二年）。其中：

y_i 为干涉仪读数（单位：微米）

$$y_{纵均} = \frac{\sum_{i=0^\circ}^{i=345^\circ} y_i}{24} \qquad y_i = y'_i - y_{i纵均}$$

$$y_{横均} = \frac{\sum_{i=1}^{i=4} y_i}{4}$$

$y_{横均}$ 就是 § 2 中所述 $\triangle y$ 从 $y_{横均}$ ($\triangle y$) 便可求不园度误差 $\triangle \gamma$，具体分以下三步。

第一步：将 $\triangle y$ 作福氏级数展开。

参看 § 2 中式（3），展开后得到：

$a_0 = -0.0022$

$a'_1 = 0.0067 \qquad b'_1 = 0.0053$

$a'_2 = 0.0128 \qquad b'_2 = 0.0105$

$a'_3 = 0.0022 \qquad b'_3 = -0.0008$

$a'_4 = -0.0138$ $\quad b'_4 = 0.0025$

$a'_5 = 0.0018$ $\quad b'_5 = 0.0007$

$a'_6 = -0.0035$ $\quad b'_6 = -0.0010$

$a'_7 = -0.0015$ $\quad b'_7 = -0.0060$

$a'_8 = 0.0015$ $\quad b'_8 = -0.0022$

$a'_9 = -0.0076$ $\quad b'_9 = -0.0024$

$a'_{10} = 0.0045$ $\quad b'_{10} = 0.0007$

由于 $C'_K = \sqrt{a'^2_K + b'^2_K}$ ············(12)

和 $\rho_K = \mathrm{tg}^{-1}\dfrac{a_K'}{b_K'} - \dfrac{\pi}{2}$ ·········(13)

进而可以求得：

$C'_2 = 0.0166$ $\quad \rho_2 = 219°22'$

$C'_3 = 0.0023$ $\quad \rho_3 = 200°$

$C'_4 = 0.0140$ $\quad \rho_4 = 190°14'$

$C'_5 = 0.0019$ $\quad \rho_5 = 158°45'$

$C'_6 = 0.0036$ $\quad \rho_6 = 164°1'$

$C'_7 = 0.0062$ $\quad \rho_7 = 284°2'$

$C'_8 = 0.0027$ $\quad \rho_8 = 235°43'$

$C'_9 = 0.0080$ $\quad \rho_9 = 162°42'$

$C'_{10} = 0.0046$ $\quad \rho_{10} = 171°10'$

（求函数值的福氏展开可用样板法，也可用和差法）。

第二步：利用反映系数表进行变换。

查阅本文所列反映系数表，根据§2定义知

$$C_K = \frac{C'_K}{\sigma_K}$$

及 $\theta_{OK} = \rho_K - \psi'_K$ ·······················(14

ψ_K从下式求得：

$$\left.\begin{aligned}\cos\psi_K &= \frac{1}{\sigma_K}\left[\cos k\gamma + (-1)k\cos\gamma\,\frac{\cos k(\frac{\pi}{2}-\alpha)}{\sin\alpha}\right]\\ \sin\psi_K &= \frac{1}{\sigma_K}\left[\sin k\gamma + (-1)k\sin\gamma\,\frac{\cos k(\frac{\pi}{2}-\alpha)}{\sin\alpha}\right]\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(15)$$

计算后得到：

$a_2 = -0.0117$ $\quad b_2 = 0.0012$

$a_3 = -0.0002$ $\quad b_3 = -0.0012$

$a_4 = -0.0081$ $\quad b_4 = 0.0056$

$a_5 = -0.0019$ $\quad b_5 = -0.0007$

$a_6 = 0.0048$ $\quad b_6 = -0.0030$

$a_7 = 0.0008$ $\quad b_7 = -0.0030$

$a_8 = 0.0004$ $\quad b_8 = -0.0019$

$a_9 = -0.0027$ $\quad b_9 = 0.0029$

$a_{10} = 0.0027$ $\quad b_{10} = 0.0020$

第三步：根据变换后的福氏级数求不圆度误差。从以上可写出：

$$\begin{aligned}\triangle R &= \sum_{K=2}^{K=10}(ak\cos k\theta + bk\sin k\theta)\\ &= -0.0117\cos2\theta + 0.0012\sin2\theta\\ &\quad -0.0002\cos3\theta - 0.0012\sin3\theta\\ &\quad -0.0081\cos4\theta + 0.0056\sin4\theta\\ &\quad -0.0019\cos5\theta - 0.0007\sin5\theta\\ &\quad +0.0048\cos6\theta - 0.0030\sin6\theta\\ &\quad +0.0008\cos7\theta - 0.0030\sin7\theta\\ &\quad +0.0004\cos8\theta - 0.0019\sin8\theta\\ &\quad -0.0027\cos9\theta + 0.0029\sin9\theta\\ &\quad +0.0027\cos10\theta + 0.0020\sin10\theta\end{aligned}$$

根据这个式子，给出θ间隔（例如仍取15°），便可逐点求出不圆度误差$\triangle R$（表三）。

表三：轴颈不圆度计算结果：

θ	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	165°
$\triangle R$	−0.0171	−0.0121	0.0021	0.0172	0.0039	0.0004	0.0031	0.0148	0.0137	0.0078	−0.0157	−0.0211

θ	180°	195°	210°	225°	240°	255°	270°	285°	300°	315°	330°	345°
$\triangle R$	−0.0091	−0.0121	0.0005	0.0112	0.0057	0.0126	−0.0125	0.0098	0.0247	0.0026	−0.0091	−0.0171

画出其误差曲线，如图（11）中实践所示。

为了验证整个过程的可靠性，我们将这根主轴重新装到V形测量装置上，重新调整，重新测量，重新计算，所得不圆度误差如图（11）中虚线所示（为了节省篇幅，第二次的详细数据不再一一列上）。一些轴颈我们都这样反复测了两次，算了两次。两次最后所得不圆度误差，如果逐点比较，其相互差异的均方值为0.004～0.006微米，最大值为0.012～0.018微米。由此可见，这种方法测量精度是很高的。

六、误差联系法

当采用本文§4所推荐的第一种方案进行测量时，可以导出另一种计算不圆度误差的方法，我们称之谓“误差联系法”，现将其理论基础及具体用法介绍如下。

设想将轴颈截面分成12等分，各等分点分别编以序号1，2，3，4，……11，12。相应地这些点处截面轮廓误差分别记为

$\triangle\gamma_1$，$\triangle\gamma_2$，$\triangle\gamma_3$，$\triangle\gamma_4$ ……$\triangle\gamma_{11}$，$\triangle\gamma_{12}$，

将此轴颈放到V形块上去，按§4第一种方案，$2\alpha=60°$，$\gamma=30°$（图12），在满足这两个条件的前提下，当点1转到测头下方时，点6和点10恰好与V形块两侧相接触，这三点处的误差通过测头读数发生了联系。设：

$\triangle y_1$为点1转到头测下方时测头上的示值；

$\triangle y_2$为点2转到测头下方时测头上的示值；

$\triangle y_3$为点3转到测头下方时测头上的示值；

⋮

$\triangle y_{12}$为点12转到测头下方时测头上的示值。

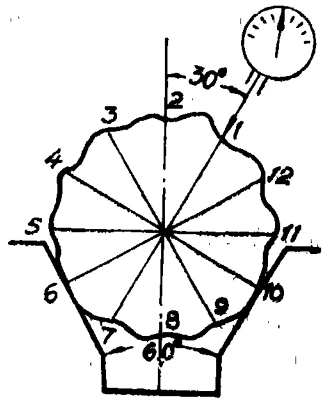

图 12

点1处误差在测头上的反映量就是$\triangle\gamma_1$；

点2处误差在测头上的反映量为（证略）：

$$\frac{\triangle\gamma_6}{\sin 2\alpha}=\frac{\triangle\gamma_6}{\sin 60°}=\frac{1}{\sqrt{3}}\triangle\gamma_6\cdots\cdots\cdots\cdots$$

点3处误差在测头上的反映量为（证略）

$$\frac{\triangle\gamma_{10}}{\mathrm{tg}2\alpha}=\frac{\triangle\gamma_{10}}{\mathrm{tg}60°}=\frac{1}{\sqrt{3}}\triangle\gamma_{10}$$

综合起来我们得到一个误差联系式

$$\triangle\gamma_1+\frac{2}{\sqrt{3}}\triangle\gamma_6+\frac{1}{\sqrt{3}}\triangle\gamma_{10}=\triangle y_1 \qquad \cdots\cdots\cdots(16)$$

当轴颈顺时针转动30°以后，点2恰好到达测头下方，点7和点11恰好和V形块侧面接触，这三个点处的误差又通过$\triangle y_2$发生了联系，与上同理，我们可得另一个误差联系式

$$\triangle\gamma_2+\frac{2}{\sqrt{3}}\triangle\gamma_7+\frac{1}{\sqrt{3}}\triangle\gamma_{11}=\triangle y_2 \qquad \cdots\cdots\cdots(17)$$

当轴颈顺时针再转30°后，点3又到达测头下方，点8和点12又和V形块侧面接触，与上同理，我们又可得一个误差联系式

$$\triangle\gamma_3+\frac{2}{\sqrt{3}}+\triangle\gamma_8+\frac{1}{\sqrt{3}}\triangle\gamma_{12}=\triangle y_3 \qquad \cdots\cdots\cdots(18)$$

等等，依此类推，轴颈转动一圈，停留12个位置，我们便得12个误差联系式，构成一个线性方程组：

$$\left.\begin{aligned}
&\triangle\gamma_1+\frac{2}{\sqrt{3}}\triangle\gamma_6+\frac{1}{\sqrt{3}}\triangle\gamma_{10}=\triangle y_1\\
&\triangle\gamma_2+\frac{2}{\sqrt{3}}\triangle\gamma_7+\frac{1}{\sqrt{3}}\triangle\gamma_{11}=\triangle y_2\\
&\triangle\gamma_3+\frac{2}{\sqrt{3}}\triangle\gamma_8+\frac{1}{\sqrt{3}}\triangle\gamma_{12}=\triangle y_3\\
&\triangle\gamma_4+\frac{2}{\sqrt{3}}\triangle\gamma_9+\frac{1}{\sqrt{3}}\triangle\gamma_1=\triangle y_4\\
&\triangle\gamma_5+\frac{2}{\sqrt{3}}\triangle\gamma_{10}+\frac{1}{\sqrt{3}}\triangle\gamma_2=\triangle y_5\\
&\triangle\gamma_6+\frac{2}{\sqrt{3}}\triangle\gamma_{11}+\frac{1}{\sqrt{3}}\triangle\gamma_3=\triangle y_6\\
&\triangle\gamma_7+\frac{2}{\sqrt{3}}\triangle\gamma_{12}+\frac{1}{\sqrt{3}}\triangle\gamma_4=\triangle y_7\\
&\triangle\gamma_8+\frac{2}{\sqrt{3}}\triangle\gamma_1+\frac{1}{\sqrt{3}}\triangle\gamma_5=\triangle y_8\\
&\triangle\gamma_9+\frac{2}{\sqrt{3}}\triangle\gamma_2+\frac{1}{\sqrt{3}}\triangle\gamma_6=\triangle y_9\\
&\triangle\gamma_{10}+\frac{2}{\sqrt{3}}\triangle\gamma_3+\frac{1}{\sqrt{3}}\triangle\gamma_7=\triangle y_{10}\\
&\triangle\gamma_{11}+\frac{2}{\sqrt{3}}\triangle\gamma_4+\frac{1}{\sqrt{3}}\triangle\gamma_8=\triangle y_{11}\\
&\triangle\gamma_{12}+\frac{2}{\sqrt{3}}\triangle\gamma_5+\frac{1}{\sqrt{3}}\triangle\gamma_9=\triangle y_{12}
\end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots\cdots(19)$$

这是一个十二元的线性方程组，令D和A分别代表这个方程组的系数矩阵和增广矩阵，则我们有

$$
D=\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\
\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} \\
\frac{2}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{2}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(20)
$$

$$
A=\begin{vmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & \triangle y_1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \triangle y_2 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \triangle y_3 \\
\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 & \triangle y_4 \\
0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & \triangle y_5 \\
0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} & 0 & \triangle y_6 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} & \triangle y_7 \\
\frac{2}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \triangle y_8 \\
0 & \frac{2}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \triangle y_9 \\
0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \triangle y_{10} \\
0 & 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 1 & 0 & \triangle y_{11} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 1 & \triangle y_{12}
\end{vmatrix}
\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(21)
$$

系数矩阵D的行列式等于0，所以我们不能直接用高等代数的克莱姆（Cramer）定则来解此方程组，将$\triangle y_1\triangle y_2\cdots\cdots\triangle y_{12}$的实测数值代入式（19），可以发现解出的是一系列不定解，其数值均按正弦形式分布，即求出的$\triangle\gamma$值中出现了一阶的福里衷频谱，这显然是不对的，这种成分不是不圆度误差而是截面中心的偏心量。为了解决此问题，需要补充一些条件使偏心量等于0，亦即使$\triangle\gamma_i$的平方和为极小。从式（3）可以得出一阶的福里衷系数

$$a_1=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\triangle\gamma\cos\theta\,d\theta$$

$$b_1=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\triangle\gamma\,\sin\theta d\theta$$

在实际工作中θ间隔取30°，上述积分可以按数值积分的矩形公式展开

$$a_1=\frac{1}{6}(\triangle\gamma_1\cos0^\circ+\triangle\gamma_2\cos30^\circ+\triangle\gamma_3\cos60^\circ+\cdots\cdots+\triangle\gamma_{12}\cos330^\circ)$$

$$b_1=\frac{1}{6}(\triangle\gamma_1\sin0^\circ+\triangle\gamma_2\sin30^\circ+\triangle\gamma_3\sin60^\circ+\cdots\cdots+\triangle\gamma_{12}\sin330^\circ)$$

将上列二式整理并令$a_1=b_1=0$，我们便可得，

$$\triangle\gamma_1-\triangle\gamma_7+0.866(\triangle\gamma_2-\triangle\gamma_6-\triangle\gamma_8+\triangle\gamma_{12})+0.5(\triangle\gamma_3-\triangle\gamma_5-\triangle\gamma_9+\triangle\gamma_{11})=0\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(22)$$

$$\triangle\gamma_4-\triangle\gamma_{10}+0.866(\triangle\gamma_3+\triangle\gamma_5-\triangle\gamma_9-\triangle\gamma_{11})+0.5(\triangle\gamma_2+\triangle\gamma_6-\triangle\gamma_8-\triangle\gamma_{12})=0\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(23)$$

将上列二式作为补充条件加入方程组（19），经电子计算机计算得到$\triangle\gamma$的解，我们可以看到这组解的表达式是很有趣的，即，它们是$\triangle y$十二个值和十二个系数依次相乘的和，亦即：

$$\begin{aligned}
\triangle\gamma_1&=k_1\triangle y_1+k_2\triangle y_2+k_3\triangle y_3+k_4\triangle y_4+\cdots\cdots+k_{12}\triangle y_{12}\\
\triangle\gamma_2&=k_{12}\triangle y_1+k_1\triangle y_2+k_2\triangle y_3+k_3\triangle y_4+\cdots\cdots+k_{11}\triangle y_{12}\\
\triangle\gamma_3&=k_{11}\triangle y_1+k_{12}\triangle y_2+k_1\triangle y_3+k_2\triangle y_4+\cdots\cdots+k_{10}\triangle y_{12}\\
\triangle\gamma_4&=k_{10}\triangle y_1+k_{11}\triangle y_2+k_{12}\triangle y_3+k_1\triangle y_4+\cdots\cdots+k_9\triangle y_{12}\\
\triangle\gamma_5&=k_9\triangle y_1+k_{10}\triangle y_2+k_{11}\triangle y_3+k_{12}\triangle y_4+\cdots\cdots+k_8\triangle y_{12}\\
\triangle\gamma_6&=k_8\triangle y_1+k_9\triangle y_2+k_{10}\triangle y_3+k_{11}\triangle y_4+\cdots\cdots+k_7\triangle y_{12}\\
\triangle\gamma_7&=k_7\triangle y_1+k_8\triangle y_2+k_9\triangle y_3+k_{10}\triangle y_4+\cdots\cdots+k_6\triangle y_{12}\\
\triangle\gamma_8&=k_6\triangle y_1+k_7\triangle y_2+k_8\triangle y_3+k_9\triangle y_9+\cdots\cdots+k_4\triangle y_{12}\\
\triangle\gamma_9&=k_5\triangle y_1+k_6\triangle y_2+k_7\triangle y_3+k_8\triangle y_4+\cdots\cdots+k_4\triangle y_{12}\\
\triangle\gamma_{10}&=k_4\triangle y_1+k_5\triangle y_2+k_6\triangle y_3+k_7\triangle y_4+\cdots\cdots+k_3\triangle y_{12}\\
\triangle\gamma_{11}&=k_3\triangle y_1+k_4\triangle y_2+k_5\triangle y_3+k_6\triangle y_4+\cdots\cdots+k_2\triangle y_{12}\\
\triangle\gamma_{12}&=k_2\triangle y_1+k_3\triangle y_2+k_4\triangle y_3+k_5\triangle y_4+\cdots\cdots+k_1\triangle y_{12}
\end{aligned}$$

其中 $k_1=0.208$

$k_2=0.144$

$k_3=-0.167$

$k_4=0.217$

$k_5=-0.167$

$k_6=0$

$k_7=-0.042$

$k_8=0.433$

$k_9=-0.167$

$k_{10}=0.072$

$k_{11}=-0.167$

$k_{12}=0$

在实际计算时，只要将测量数据$\triangle y_1\triangle y_2\cdots\cdots\triangle y_{12}$代入式（24）便可求得各点的不圆度误差$\triangle\gamma$。为方便起见，建议使用一个表格，现举一实例说明如下（参看计算表格）。

将实测所得十二个$\triangle y$填入表格左端，

（计算表格）用“误差联系法”求不圆度误差$\triangle y$

$\triangle y_i$ \ $k_i\triangle y_i$ \ k_i	$k_1=0.208$	$k_2=0.144$	$k_3=-0.167$	$k_4=0.217$	$k_5=-0.167$	$k_6=0$	$k_7=-0.042$	$k_8=0.433$	$k_9=-0.167$	$k_{10}=0.072$	$k_{11}=-0.167$	$k_{12}=0$	验算（横向和）
$\triangle y_1=0.8$	$k_1\triangle y_1$												
$\triangle y_2=0.4$	$k_2\triangle y_2$	$k_1\triangle y_2$											
$\triangle y_3=-0.4$	$k_3\triangle y_3$	$k_2\triangle y_3$	$k_1\triangle y_3$										
$\triangle y_4=-0.6$		$k_3\triangle y_4$	$k_2\triangle y_4$	$k_1\triangle y_4$									
$\triangle y_5=-0.1$			$k_3\triangle y_5$	$k_2\triangle y_5$	$k_1\triangle y_5$								
$\triangle y_6=0.4$				$k_3\triangle y_6$		$k_1\triangle y_6$							
$\triangle y_7=0.8$							$k_1\triangle y_7$						
$\triangle y_8=0.3$								$k_1\triangle y_8$					
$\triangle y_9=-0.5$									$k_1\triangle y_9$				
$\triangle y_{10}=-0.5$										$k_1\triangle y_{10}$			
$\triangle y_{11}=-0.4$											$k_1\triangle y_{11}$		
$\triangle y_{12}=0.4$												$k_1\triangle y_{12}$	
不圆度误差 $\triangle y_1\sim\triangle y_{12}$	0.388	-0.204	-0.433	-0.311	0.204	0.458	0.432	-0.243	-0.487	-0.199	0.143	0.473	

用k_1分别乘这十二个$\triangle y$，将乘积依次填入对角线方格，再用k_2分别乘这十二个$\triangle y$，将乘积下移一格依次填入表中（如箭头所示），再用k_3分别乘这十二个$\triangle y$，将乘积再下移一格依次填入表中，依此类推，直至填满。表中涂黑方格代表零。最后将各列纵向相加，其和分别填在该列最下端，这就是所求的不园度误差。

为了验算中间过程有否算错，可以抽一两个横行求取其和。这个和应等于0或接近0，最后求得的$\triangle \gamma$之和也应为0或接近0。

注意，代入表格的$\triangle y$必须已将其常数项去除，即满足

$$\triangle y_1+\triangle y_2+\triangle y_3+\cdots\cdots+\triangle y_{12}=0 \quad \cdots\cdots(25)$$

为了验算最后求得的$\triangle \gamma$的可靠性，可将这些值代入原始误差联系式(19)（抽取1～2式）加以验算。

还需注意，使用这张表格测量装置必须采用本文§2所述的第一方案，即$2\alpha=60°$，$\gamma=30°$。测量间隔一般取30°（12个测点）。如果需要加密，间隔可取15°（24测点）或10°（36测点），组成二个或三个系列用上述表格分别计算，最后所得$\triangle \gamma$按角度顺序插入排列。

七、简化计祘法

根据V形测量装置测量结果，求不园度误差需要进行适当的计算，在生产现场，测量工作比较频繁，要经常作大量计算是困难的，即使是误差联系法也有一定工作量。这里，我们再提出一种简化计算方法。

设$\triangle y_{最大}$和$\triangle y_{最小}$分别为轴颈一转中测头最大示值和最小示值，则当误差是典型的椭圆度或圆棱度时，查阅表一，可以从下式求出：

$$不圆度 \doteq (\triangle y_{最大}-\triangle y_{最小})/\sigma_k \cdots(26)$$

一般地，实际误差中常常包含各种成份，在采用本文§4所推荐的第一方案和第二方案这个前提下：$K=2\sim10$主要误差谱项内，σ_K具有比较接近的数值，我们可以引出“平均反映系数”这个概念，即

$$\sigma_{均}=\frac{\sigma_2+\sigma_3+\sigma_4+\cdots\cdots+\sigma_n}{n-1}$$

称为该测量装置的平均反映系数。

对于本文§4第一方案

$$\sigma_{均}=\frac{1.41+2.00+1.41+2.00+0.74+2.00+1.41+2.00+1.41}{9}=1.60$$

对于第二方案（$2\alpha=90°$，$\gamma=30°$）

$$\sigma_{均}=\frac{1.65+1.00+1.93+1.00+1.23+1.73+1.13+1.73+0.52+2.00}{9}=1.32$$

对于第一方案（$2\alpha=60°$，$\gamma=30°$），我们可得

$$不圆度=（最大示值-最小示值）/1.60 \quad \cdots\cdots(28)$$

对于第二方案（$2\alpha=90°$，$\gamma=30°$），我们可得

$$不圆度=（最大示值-最小示值）/1.32 \quad \cdots\cdots(29)$$

平均反映系数是个统计概率的概念，使用这个概念用以上两式进行计算常比用式(26)更准，这是因为：实际误差常是各种频谱成份混在一起的；各种频谱的，起始相位又各不相同。所以它们的合成过程往往含有统计概率的概念。

上述两式当然是近似公式，实际使用的经验表明，它所引入的误差

$\delta<$所求不圆度$\cdot 20\%$

在生产现场，这样的近似误差是可以允许的，此时可以采用这种简化算法；此外，在要求必需作精确计算的场合，这种方法也可作为辅助和参考。

下面我们举两个实测的例子来说明上述

方法的应用。表（四）为轴颈一转中测头的各点示值。

表 四

$\theta°$	Δy 实例1	Δy 实例2	$\theta°$	Δy 实例1	Δy 实例1
0	−2.9	0.8	180	−2.5	0.8
15	−0.4	0.8	195	−1.5	0.7
30	−0.9	0.1	210	−0.7	0.3
45	−1.7	0.1	225	1.9	0.2
60	−0.5	−0.4	240	0.6	−0.5
75	3.5	−1.0	255	−1.0	−0.4
90	2.1	−0.6	270	−1.1	−0.5
105	1.3	−0.8	285	1.5	−0.9
120	0.3	−0.1	300	2.8	−0.4
135	2.4	−0.2	315	2.2	0.2
150	−1.6	0.4	330	−0.7	0.4
165	−2.0	0.4	345	−0.9	0.7

实例 1 为 0.2 秒光电圆刻机主轴研磨后的测量数据，主轴直径60mm，长度 668mm，$2\alpha=60°$，$\gamma=30°$。实例 2 为最后特殊精加工后的测量结果。这两例代表不同精度的情况。

对于实例 1，

$$不圆度=\frac{3.5-(-2.9)}{1.60}=4.0$$

我们同时用电子数字计算机按福氏分析法进行了精确计算，所得

不圆度 = 2.14 − （−1.94） = 4.08

以电子计算机的计算结果为准，这种简化算法的误差为

$$\frac{4.08-4.0}{4.08}=2\%$$

对于实例 2，

$$不圆度=\frac{0.8-(-1.0)}{1.60}=1.13$$

用电子计算机精确计算得

不圆度 = 0.57 − （−0.66） = 1.23

相对误差为

$$\frac{1.23-1.13}{1.23}=8\%$$

由此可见，这种简化算法是可行的。

以上两例用电子数字计算机精确计算的结果如下：

对于实例 1，中间计算结果为：

项目 \ $K=$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
G'_K	1.6374	0.8153	0.8024	0.9941	0.4290	0.7008	0.1781	0.2459	0.1987
θ'_{OK}	162,09	95.16	206.72	308.89	277.82	164.48	76.47	157.17	120.31
C_K	1.1579	0.4077	0.5675	0.4971	0.5860	0.3504	0.1260	0.1230	0.1405
θ_{OK}	57.09	65.16	41.72	158.89	277.82	−45.52	−118.53	−172.83	−134.69

最后结果为

θ	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	165°
ΔR	0.804	0.627	−1.758	−1.943	−0.659	−0.636	−0.290	0.397	0.668	0.374	0.566	0.753

θ	180°	195°	210°	225°	240°	255°	270°	285°	300°	315°	330°	345°
ΔR	1.142	0.944	−0.937	−1.930	−1.085	0.610	−0.203	−1.926	−0.392	1.564	2.141	1.165

对于实例2，中间结果为

K=	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C'_K	0.7447	0.0669	0.0088	0.0732	0.0344	0.0862	0.0961	0.0307	0.1364
θ'_{OK}	0.27	17.50	300.00	144.08	284.04	326,06	355,69	173.54	235.11
C_K	0.5267	0.0335	0.0059	0.0366	0.0469	0.0431	0.0680	0.0153	0.0965
θ_{OK}	−104.72	−12.50	135.00	−5.92	284.04	116.06	160.69	−156.46	−19.89

最后结果为

θ	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	165°
△R	−0.0640	0.1521	0.4370	0.3987	0.4173	0.5661	0.0048	−0.1541	−0.3567	−0.4503	−0.3894	−0.5297

θ	180°	195°	210°	225°	240°	255°	270°	285°	300°	315°	330°	345°
△R	−0.1362	0.1060	0.4225	0.4747	0.5106	0.5623	−0.0763	−0.0780	−0.3028	−0.6630	−0.4644	−0.3864

在应用简化计算法时，V形块角度及测杆偏角的公差可以取±0.5°。

参 考 文 献

[1] 邹自强、马龙生、梁俊友，矫永耀，韩永燮《极圆轴颈的测量》,1966年全国精密机械测试会议报告,(济南)

[2] 邹自强
《精密圆刻度机上的几个问题》测绘学报1963年第一期；

[3] П. Н. Долгов
Опрeделенме временм пассамнвви инструмектом в меридиане, Тостехиздат. 1952

表一、反 映 系 数 表

γ= 0																		
α=	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180
K= 2	10.30	4.411	2.346	1.240	.5210	.0001	.4037	.7299	1.000	1.227	1.418	1.577	1.709	1.815	1.897	1.954	1.989	2.000
K= 3	3.970	3.879	3.732	3.532	3.286	3.000	2.684	2.347	2.000	1.653	1.316	1.000	.7144	.4679	.2679	.1206	.0304	.0001
K= 4	11.78	5.411	2.932	1.508	.5891	.0001	.3356	.4619	.4142	.2267	.0648	.4226	.8084	1.185	1.518	1.778	1.943	2.000
K= 5	3.849	3.411	2.732	1.879	.9383	.0001	.8480	1.532	2.000	2.227	2.216	2.000	1.633	1.185	.7321	.3473	.0902	.0001
K= 6	8.937	1.879	1.000	2.462	3.049	3.000	2.510	1.778	1.000	.3473	.0572	.1547	.0444	.4679	1.000	1.508	1.869	2.000
K= 7	7.581	6.411	4.732	2.879	1.206	.0001	.5801	.5321	.0001	.7733	1.516	2.000	2.039	1.815	1.268	.6527	.1777	.0001
K= 8	9.789	2.000	.9319	1.747	1.224	.0001	1.303	2.192	2.414	2.000	1.212	.4226	.0368	.0001	.4824	1.176	1.769	2.000
K= 9	7.113	4.759	1.732	1.000	2.673	3.000	2.233	1.000	.0001	.3054	.1368	1.000	1.780	2.064	1.732	1.000	.2902	.0001
K=10	6.375	2.000	4.346	3.747	1.809	.0001	.7170	.1918	1.000	2.000	2.202	1.577	.6226	.0001	.1034	.8237	1.645	2.000
K=11	10.40	6.411	2.000	.8794	1.357	.0001	1.737	2.532	2.000	.7733	.1064	.0001	.9038	1.815	2.000	1.347	.4242	.0001
K=12	6.737	1.879	2.864	.4619	2.183	3.000	1.872	.2221	.4142	.3473	1.610	2.155	1.552	.4679	.0353	.4923	1.502	2.000

γ= 10																		
α=	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180
K= 2	10.19	4.408	2.395	1.347	.7419	.5176	.6459	.8794	1.108	1.312	1.489	1.640	1.765	1.866	1.944	2.000	2.033	1.955
K= 3	3.849	3.759	3.611	3.411	3.165	2.879	2.563	2.227	1.879	1.532	1.195	.8794	.5938	.3473	.1473	.0001	.0902	.5139
K= 4	11.40	5.138	2.713	1.347	.5804	.5176	.7471	.8794	.8977	.8578	.8516	.9640	1.196	1.485	1.768	2.000	2.151	1.865
K= 5	4.177	3.759	3.117	2.334	1.540	1.000	1.095	1.523	1.879	2.040	1.984	1.732	1.337	.8666	.3969	.0001	.2643	.8389
K= 6	9.334	2.548	1.159	2.194	2.696	2.617	2.127	1.432	.7968	.6480	.8964	1.075	1.159	1.306	1.616	2.000	2.304	1.719
K= 7	6.908	5.759	4.115	2.334	.9262	1.000	1.482	1.523	1.286	1.212	1.482	1.732	1.687	1.299	.6724	.0001	.5100	1.139
K= 8	8.873	1.414	1.917	2.695	2.273	1.414	1.283	1.759	1.850	1.414	.7860	.7899	1.196	1.414	1.602	2.000	2.449	1.520
K= 9	8.038	5.759	2.917	1.185	2.001	2.209	1.482	.7733	1.286	1.629	1.482	1.347	1.502	1.449	.8922	.0002	.8098	1.404
K=10	7.520	1.414	3.301	2.695	1.018	1.414	2.092	1.759	1.243	1.414	1.375	.7899	.8098	1.414	1.691	2.000	2.553	1.276
K=11	8.974	5.064	1.000	2.334	2.830	1.732	1.195	1.523	1.000	.8794	1.646	1.732	1.418	1.347	1.000	.0002	1.143	1.626
K=12	5.199	3.411	4.391	2.194	1.228	1.706	.7709	1.432	2.081	1.586	1.133	1.075	.5120	1.109	1.749	2.000	2.591	.9925

γ= 20																		
α=	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180
K= 2	9.877	4.386	2.516	1.600	1.144	1.000	1.055	1.198	1.362	1.523	1.670	1.799	1.910	2.000	2.070	2.121	2.151	1.823
K= 3	3.502	3.411	3.264	3.064	2.818	2.532	2.216	1.879	1.532	1.185	.8480	.5321	.2465	.0000	.2000	.3473	.4375	.9713
K= 4	10.34	4.386	2.101	.9032	.6489	1.000	1.297	1.460	1.518	1.523	1.539	1.620	1.782	2.000	2.229	2.426	2.557	1.486
K= 5	4.778	4.386	3.787	3.064	2.329	1.732	1.436	1.442	1.532	1.523	1.345	1.000	.5300	.0002	.5158	.9455	1.230	1.486
K= 6	9.892	3.411	1.319	1.469	1.773	1.629	1.130	.5321	.6294	1.185	1.598	1.806	1.883	2.000	2.244	2.572	2.846	.9713
K= 7	5.496	4.386	2.796	1.064	.6314	1.732	2.299	2.320	1.970	1.523	1.216	1.000	.6314	.0000	.8161	1.629	2.226	1.823
K= 8	7.321	.0002	2.755	3.528	3.066	2.000	.9983	.6543	.5182	.0001	.7800	1.503	1.915	2.000	2.060	2.409	2.873	.3420
K= 9	8.627	6.411	3.576	1.064	.6314	.8794	.3351	1.095	1.970	2.227	1.860	1.212	.6314	.0002	.9852	2.209	3.237	1.940
K=10	7.870	.0002	2.211	1.707	.7193	2.000	2.587	2.060	.9503	.0002	.4844	1.015	1.700	2.000	1.810	1.943	2.685	.3420
K=11	8.078	4.386	1.000	2.695	3.043	1.732	.2744	.8794	1.000	1.523	2.015	1.732	.8719	.0001	1.000	2.532	4.073	1.823
K=12	5.027	3.411	4.221	1.953	.8155	1.629	1.268	1.756	2.024	1.185	.3573	1.045	1.567	2.000	1.709	1.288	2.533	.9713

γ= 30																		
α=	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180
K= 2	9.334	4.314	2.649	1.879	1.526	1.414	1.440	1.532	1.651	1.774	1.893	2.000	2.093	2.171	2.233	2.277	2.304	1.617
K= 3	2.970	2.879	2.732	2.532	2.286	2.000	1.684	1.347	1.000	.6527	.3160	.0002	.2856	.5321	.7321	.8794	.9696	1.323
K= 4	8.865	3.364	1.245	.3473	.9147	1.414	1.723	1.879	1.930	1.929	1.937	2.000	2.138	2.331	2.540	2.722	2.846	.9402
K= 5	5.066	4.690	4.114	3.411	2.672	2.000	1.491	1.185	1.000	.7908	.4635	.0001	.5667	1.175	1.753	2.227	2.538	1.803
K= 6	9.609	3.521	1.126	.5321	.8223	.7321	.4333	.6527	1.225	1.704	1.965	2.000	1.921	1.933	2.175	2.556	2.879	.1340
K= 7	4.834	3.834	2.449	1.185	1.255	2.000	2.359	2.227	1.732	1.095	.5098	.0001	.6092	1.449	2.449	3.411	4.106	1.803
K= 8	7.210	1.414	2.540	3.064	2.518	1.414	.3560	.6946	1.129	1.414	1.753	2.000	1.889	1.414	1.245	2.000	2.826	.9402
K= 9	7.156	5.087	2.449	.4679	1.572	2.000	1.786	1.653	1.732	1.509	.8402	.0002	.6952	1.360	2.449	3.879	5.094	1.323
K=10	5.907	1.414	3.452	3.064	1.833	1.414	1.385	.6946	.5246	1.414	1.847	2.000	1.985	1.414	.2940	2.000	3.684	1.617
K=11	9.008	5.593	2.000	1.185	1.259	.0001	1.505	2.227	2.000	1.432	.8733	.0001	1.036	1.632	2.000	3.411	5.212	.5000
K=12	5.984	1.557	2.346	.5321	2.080	2.732	1.833	.6527	.2247	.8017	1.705	2.000	1.798	1.376	.1034	2.556	5.171	1.866

γ= 40																		
α=	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180
K= 2	8.553	4.151	2.729	2.099	1.822	1.132	1.745	1.811	1.902	2.000	2.097	2.187	2.266	2.334	2.387	2.426	2.449	1.361
K= 3	2.317	2.227	2.079	1.879	1.633	1.347	1.031	.6946	.3473	.0001	.3367	.6527	.9383	1.185	1.385	1.532	1.622	1.534
K= 4	7.321	2.441	.5888	.6429	1.304	1.732	1.969	2.060	2.052	2.000	1.968	2.007	2.137	2.334	2.551	2.743	2.873	.3836
K= 5	4.746	4.386	3.833	3.153	2.425	1.732	1.144	.6946	.3473	.0002	.4398	1.000	1.652	2.334	2.970	3.489	3.827	1.740
K= 6	8.130	2.722	.5387	.6776	1.186	1.347	1.419	1.596	1.844	2.000	1.937	1.633	1.237	1.185	1.693	2.342	2.826	.9060
K= 7	5.235	4.386	3.246	2.209	1.724	1.732	1.676	1.305	.6840	.0002	.5697	1.000	1.510	2.334	3.405	4.464	5.235	1.149
K= 8	7.573	2.000	1.413	1.600	1.019	.0001	1.006	1.682	1.958	2.000	1.978	1.786	1.163	.0001	1.553	3.135	4.316	1.661
K= 9	5.235	3.411	1.190	1.212	2.336	2.532	2.022	1.305	.6840	.0001	.8618	1.629	1.926	1.815	2.349	3.834	5.235	.2340
K=10	5.014	2.000	3.469	2.900	1.386	.0001	.7471	1.191	1.731	2.000	1.746	1.297	.9198	.0001	1.886	4.334	6.417	1.661
K=11	7.497	4.386	1.000	1.347	1.939	1.732	1.850	1.759	1.000	.0002	.8459	1.732	2.502	2.334	1.000	2.532	5.064	1.149
K=12	3.907	2.722	3.567	2.180	1.535	1.347	.2508	1.105	1.805	2.000	1.837	.9476	.4578	1.185	1.556	4.168	7.254	.9060

γ= 50																		
α=	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180
K= 2	7.520	3.860	2.704	2.209	1.997	1.932	1.945	2.000	2.075	2.159	2.242	2.320	2.390	2.450	2.497	2.532	2.553	1.091
K= 3	1.622	1.532	1.385	1.185	.9383	.6527	.3367	.0001	.3473	.6946	1.031	1.347	1.633	1.879	2.079	2.227	2.317	1.590
K= 4	6.021	2.075	1.072	1.299	1.682	1.932	2.030	2.000	1.880	1.729	1.625	1.640	1.792	2.037	2.303	2.532	2.685	.4529
K= 5	3.827	3.489	2.970	2.334	1.652	1.000	.4398	.0002	.3473	.6946	1.144	1.732	2.425	3.153	3.833	4.386	4.746	1.361
K= 6	5.907	1.364	.5053	1.449	1.871	1.985	1.985	2.000	2.012	1.900	1.544	.8993	.1211	1.085	2.153	3.068	3.684	1.434
K= 7	5.235	4.464	3.405	2.334	1.510	1.000	.5697	.0002	.6840	1.305	1.676	1.732	1.724	2.209	3.246	4.386	5.235	.3836
K= 8	6.417	1.414	.4778	1.064	1.144	1.414	1.835	2.000	1.794	1.414	1.125	.7899	.1022	1.414	3.235	5.064	6.417	1.549
K= 9	5.235	3.834	2.349	1.815	1.926	1.629	.8618	.0002	.6840	1.305	2.022	2.532	2.336	1.212	1.190	3.411	5.235	1.189
K=10	5.643	1.414	1.731	1.064	.2888	1.414	1.930	2.000	1.888	1.414	.4109	.7899	1.464	1.414	2.512	5.064	7.384	.6545
K=11	5.064	2.532	1.000	2.334	2.502	1.732	.8459	.0002	1.000	1.759	1.850	1.732	1.939	1.347	1.000	4.386	7.497	1.637
K=12	3.537	2.810	3.107	1.449	.2929	1.169	1.677	2.000	1.654	.9344	.3099	.8993	2.440	2.929	1.452	3.068	6.748	.8777

γ= 60																		
α=	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180
K= 2	6.233	3.411	2.540	2.180	2.035	2.000	2.024	2.079	2.150	2.227	2.303	2.375	2.440	2.495	2.540	2.572	2.591	.8660
K= 3	.9696	.8794	.7321	.5321	.2856	.0002	.3160	.6527	1.000	1.347	1.684	2.000	2.286	2.532	2.732	2.879	2.970	1.500
K= 4	5.027	2.227	1.707	1.791	1.940	2.000	1.937	1.756	1.486	1.185	.9732	1.012	1.297	1.678	2.046	2.342	2.533	.8660
K= 5	2.538	2.227	1.753	1.175	.5667	.0001	.4635	.7908	1.000	1.185	1.491	2.000	2.672	3.411	4.114	4.690	5.066	.8660
K= 6	3.992	.8794	1.343	1.906	2.080	2.000	1.833	1.699	1.581	1.347	.8900	.4226	1.150	2.312	3.492	4.497	5.171	1.500
K= 7	4.106	3.411	2.449	1.449	.6092	.0001	.5098	1.095	1.732	2.227	2.359	2.000	1.255	1.185	2.449	3.834	4.834	.8660
K= 8	3.907	.0002	1.469	1.953	2.005	2.000	1.939	1.596	.8904	.0001	.7354	1.012	1.032	2.000	3.840	5.792	7.254	.8660
K= 9	5.094	3.879	2.449	1.360	.6952	.0002	.8402	1.509	1.732	1.653	1.786	2.000	1.572	.4679	2.449	5.087	7.156	1.500
K=10	4.192	.0002	1.245	1.469	1.767	2.000	1.717	1.105	.6154	.0003	1.133	2.375	2.875	2.000	1.245	4.088	6.748	.8660
K=11	5.212	3.411	2.000	1.632	1.036	.0001	.8733	1.432	2.000	2.227	1.505	.0001	1.259	1.185	2.000	5.593	9.008	.8660
K=12	3.941	.8794	.9319	.8423	1.794	2.000	1.703	1.154	.2929	1.347	1.848	1.577	2.186	2.312	.4824	4.383	8.696	1.500

γ= 70																		
α=	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180
K= 2	4.700	2.791	2.219	2.000	1.929	1.932	1.975	2.040	2.115	2.193	2.27	2.340	2.404	2.458	2.501	2.532	2.551	.7700
K= 3	.4375	.3473	.2000	.0001	.2465	.5321	.8480	1.185	1.532	1.879	2.216	2.532	2.818	3.064	3.264	3.411	3.502	1.307
K= 4	4.077	2.321	2.009	2.000	2.006	1.932	1.745	1.442	1.032	.5436	.1614	.6432	1.210	1.737	2.188	2.532	2.748	1.112
K= 5	1.230	.9455	.5158	.0001	.5300	1.000	1.345	1.523	1.532	1.442	1.436	1.732	2.329	3.064	3.787	4.386	4.778	.6658
K= 6	3.192	1.760	1.906	2.000	1.833	1.467	1.058	.7908	.6814	.4864	.1461	.8724	.985	3.261	4.524	5.593	6.308	1.208
K= 7	2.226	1.629	.8161	.0001	.6314	1.000	1.216	1.523	1.970	2.320	2.299	1.732	.6314	1.064	2.796	4.386	5.496	.248
K= 8	2.274	1.414	1.991	2.000	1.700	1.414	1.149	.6946	.5700	1.414	2.139	2.274	1.700	1.414	3.017	5.064	6.623	.6886
K= 9	3.237	2.209	.9852	.0002	.6314	1.212	1.860	2.227	1.970	1.095	.3351	.8794	.6314	1.064	3.576	6.411	8.627	1.057
K=10	1.628	1.414	2.089	2.000	1.792	1.414	.6459	.6946	1.363	1.414	1.489	2.274	2.563	1.414	1.604	5.064	8.002	1.327
K=11	4.073	2.532	1.000	.0002	.8719	1.732	2.015	1.523	1.000	.8794	.2744	1.732	3.043	2.695	1.000	4.386	8.078	.8230
K=12	1.463	1.485	2.017	2.000	1.767	.8854	.2387	.7908	1.311	2.251	2.303	.8724	1.104	1.660	1.216	5.593	10.21	.8803

γ= 80																		
α=	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180
K= 2	2.947	2.000	1.743	1.672	1.682	1.732	1.804	1.887	1.973	2.058	2.139	2.213	2.278	2.334	2.378	2.409	2.429	.8389
K= 3	.0902	.0001	.1473	.3473	.5938	.8794	1.195	1.532	1.879	2.227	2.563	2.879	3.165	3.411	3.611	3.759	3.849	1.097
K= 4	2.815	2.000	1.882	1.880	1.848	1.732	1.513	1.198	.8271	.5656	.7595	1.254	1.807	2.334	2.787	3.135	3.353	1.139
K= 5	.2643	.0002	.3969	.8666	1.337	1.732	1.984	2.040	1.879	1.523	1.095	1.000	1.540	2.334	3.117	3.759	4.177	.8741
K= 6	2.608	2.000	1.951	1.791	1.417	.8794	.3560	.4408	.7262	.7672	.6836	1.114	2.138	3.411	4.698	5.792	6.525	.9255
K= 7	.5100	.0002	.6724	1.299	1.687	1.732	1.482	1.212	1.286	1.523	1.482	1.000	.9262	2.334	4.115	5.759	6.908	1.165
K= 8	2.348	2.000	1.875	1.377	.6489	.0001	.3014	.4123	1.070	2.000	2.684	2.692	1.782	.0001	2.312	4.605	6.286	1.044
K= 9	.8098	.0002	.8922	1.449	1.502	1.347	1.482	1.629	1.286	.7733	1.482	2.209	2.001	1.185	2.917	5.759	8.038	.8264
K=10	2.064	2.000	1.674	.9032	.3163	.0001	.7860	1.811	2.384	2.000	.7860	.7712	1.210	.0002	2.887	6.571	9.645	1.044
K=11	1.143	.0001	1.000	1.347	1.418	1.732	1.646	.8794	1.000	1.523	1.195	1.732	2.830	2.334	1.000	5.064	8.974	1.165
K=12	1.792	2.000	1.456	.7550	.3040	.8794	1.939	2.079	1.143	.7672	.7354	.9163	2.912	3.411	1.101	4.088	8.929	.9255

γ= 90, α=	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180
K= 2	1.015	1.059	1.126	1.212	1.309	1.414	1.522	1.629	1.732	1.830	1.919	2.000	2.070	2.129	2.175	2.209	2.229	1.000
K= 3	.0304	.1206	.2679	.4679	.7144	1.000	1.316	1.653	2.000	2.347	2.684	3.000	3.286	3.532	3.732	3.879	3.970	1.000
K= 4	1.057	1.194	1.343	1.449	1.477	1.414	1.271	1.095	1.000	1.133	1.502	2.000	2.536	3.048	3.492	3.834	4.050	1.000
K= 5	.0902	.3473	.7321	1.185	1.633	2.000	2.216	2.227	2.000	1.532	.8480	.0001	.9383	1.879	2.732	3.411	3.849	1.000
K= 6	1.119	1.332	1.439	1.360	1.142	1.000	1.172	1.509	1.732	1.678	1.327	1.000	1.549	2.722	3.991	5.087	5.823	1.000
K= 7	.1777	.6527	1.268	1.815	2.099	2.000	1.516	.7733	.0002	.5321	.5801	.0002	1.206	2.879	4.732	6.411	7.581	1.000
K= 6	1.190	1.414	1.343	1.064	1.069	1.414	1.564	1.305	1.000	1.414	1.987	2.000	1.286	1.414	3.492	5.759	7.443	1.000
K= 9	.2902	1.000	1.732	2.064	1.780	1.000	.1368	.3054	.0002	1.000	2.233	3.000	2.673	1.000	1.732	4.759	7.113	1.000
K=10	1.261	1.414	1.126	1.064	1.440	1.414	1.022	1.305	1.732	1.414	1.045	2.000	2.438	1.414	2.175	5.759	8.846	1.000
K=11	.4242	1.347	2.000	1.815	.9038	.0002	.1064	.7733	2.000	2.532	1.737	.0001	1.357	.8794	2.000	6.411	10.40	1.000
K=12	1.325	1.332	1.000	1.360	1.383	1.000	1.455	1.509	1.000	1.678	1.811	1.000	2.280	2.722	1.000	5.087	9.987	1.000

γ= 100, α=	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180
K= 2	1.0370	.0001	.3959	.6429	.8348	1.000	1.149	1.285	1.410	1.523	1.625	1.715	1.792	1.856	1.907	1.943	1.965	1.165
K= 3	.0902	.0001	.1473	.3473	.5938	.8794	1.195	1.532	1.879	2.227	2.563	2.879	3.165	3.411	3.611	3.759	3.849	1.097
K= 4	1.147	.0000	.4930	.7817	.9401	1.000	1.006	1.040	1.199	1.523	1.978	2.503	3.044	3.555	3.996	4.334	4.547	.8741
K= 5	.2643	.0001	.3969	.8666	1.337	1.732	1.984	2.040	1.879	1.523	1.095	1.000	1.540	2.334	3.117	3.759	4.177	.8741
K= 6	1.281	.0002	.5230	.7550	.9147	1.212	1.653	2.079	2.313	2.227	1.753	.9163	.4484	1.678	2.981	4.088	4.828	1.097
K= 7	.5100	.0001	.6724	1.299	1.687	1.732	1.482	1.212	1.286	1.523	1.482	1.000	.9262	2.334	4.115	5.759	6.908	1.165
K= 8	1.397	.0001	.5192	.9032	1.467	2.000	2.172	1.811	.9874	.0000	.7192	.7712	.4005	2.000	4.288	6.571	8.248	.9848
K= 9	.8098	.0001	.8922	1.449	1.502	1.347	1.482	1.629	1.286	.7733	1.482	2.209	2.001	1.185	2.917	5.759	8.038	.8264
K=10	1.472	.0001	.6258	1.377	2.006	2.000	1.283	.4123	.4433	.0001	1.283	2.692	3.184	2.000	.9750	4.605	7.671	.9848
K=11	1.143	.0002	1.000	1.347	1.418	1.732	1.646	.8794	1.000	1.523	1.195	1.732	2.830	2.334	1.000	5.064	8.974	1.165
K=12	1.496	.0001	.8827	1.791	1.940	1.212	.6745	.4408	.9026	2.227	2.430	1.114	1.297	1.678	.9233	5.792	10.67	1.097

γ= 110, α=	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180
K= 2	3.135	1.130	.4094	.0001	.2888	.5176	.7109	.8794	1.028	1.160	1.277	1.378	1.464	1.534	1.589	1.629	1.652	1.281
K= 3	.4375	.3473	.2000	.0001	.2465	.5321	.8480	1.185	1.532	1.879	2.216	2.532	2.818	3.064	3.264	3.411	3.502	1.307
K= 4	3.576	1.386	.5074	.0001	.3163	.5176	.6773	.8794	1.184	1.599	2.097	2.639	3.184	3.692	4.129	4.464	4.675	.9991
K= 5	1.230	.9455	.5158	.0002	.5300	1.000	1.345	1.523	1.532	1.442	1.436	1.732	2.329	3.064	3.787	4.386	4.778	.6658
K= 6	3.918	1.485	.5113	.0001	.4015	.8854	1.440	1.943	2.251	2.251	1.893	1.245	.8626	1.660	2.810	3.834	4.529	.8803
K= 7	2.226	1.629	.8161	.0002	.6314	1.000	1.216	1.523	1.970	2.320	2.299	1.732	.6314	1.064	2.796	4.386	5.496	1.248
K= 8	3.955	1.414	.5730	.0001	.7193	1.414	1.804	1.759	1.464	1.414	1.625	1.484	.7193	1.414	3.569	5.759	7.371	1.327
K= 9	3.237	2.209	.9852	.0002	.6314	1.212	1.860	2.227	1.970	1.095	.3351	.8794	.6314	1.064	3.576	6.411	8.627	1.057
K=10	3.622	1.414	.8534	.0001	.9161	1.414	1.534	1.759	1.917	1.414	.5316	1.484	2.048	1.414	2.492	5.759	8.631	.6886
K=11	4.073	2.532	1.000	.0001	.8719	1.732	2.015	1.523	1.000	.8794	.2744	1.732	3.043	2.695	1.000	4.386	8.078	.8230
K=12	2.982	1.760	1.194	.0001	.9052	1.467	2.024	1.943	.8662	.4864	.8988	1.245	2.875	3.261	.8782	3.834	8.498	1.208

γ=	120																	
α=	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180
K= 2	5.199	2.277	1.245	.6776	.2929	.0001	.2387	.4408	.6154	.7672	.8988	1.012	1.107	1.185	1.245	1.288	1.314	1.323
K= 3	.9696	.8794	.7321	.5321	.2856	.0001	.3160	.6527	1.000	1.347	1.684	2.000	2.286	2.532	2.732	2.879	2.970	1.500
K= 4	5.918	2.722	1.469	.7550	.3040	.0001	.2508	.5821	.8904	1.332	1.837	2.375	2.912	3.411	3.840	4.168	4.374	1.323
K= 5	2.538	2.227	1.753	1.175	.5667	.0002	.4635	.7908	1.000	1.185	1.491	2.000	2.672	3.411	4.114	4.690	5.066	.8660
K= 6	5.984	2.556	1.343	.8423	.4784	.0001	.5827	1.154	1.581	1.767	1.705	1.577	1.798	2.532	3.492	4.383	5.000	.5000
K= 7	4.106	3.411	2.449	1.449	.6092	.0001	.5098	1.095	1.732	2.227	2.359	2.000	1.255	1.185	2.449	3.834	4.834	.8660
K= 8	5.098	2.000	1.707	1.469	.8155	.0001	.6745	1.105	1.486	2.000	2.430	2.375	1.567	.0001	2.046	4.088	5.591	1.323
K= 9	5.094	3.879	2.449	1.360	.6952	.0001	.8402	1.509	1.732	1.653	1.786	2.000	1.572	.4679	2.449	5.087	7.156	1.500
K=10	3.537	2.000	2.540	1.953	.9052	.0001	.7709	1.596	2.150	2.000	1.256	1.012	1.104	.0001	2.540	5.792	8.518	1.323
K=11	5.212	3.411	2.000	1.632	1.036	.0000	.8733	1.432	2.000	2.227	1.505	.0001	1.259	1.185	2.000	5.593	9.008	.8660
K=12	2.014	2.556	2.932	1.906	.9228	.0001	1.075	1.699	1.707	1.767	1.481	.4226	1.917	2.532	1.518	4.497	8.638	.5000

γ=	130																	
α=	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180
K= 2	7.140	3.382	2.063	1.347	.8719	.5176	.2349	.0002	.1997	.3710	.5181	.6432	.7479	.8329	.8986	.9455	.9735	1.279
K= 3	1.622	1.532	1.385	1.185	.9383	.6527	.3367	.0001	.3473	.6946	1.031	1.347	1.633	1.879	2.079	2.227	2.317	1.590
K= 4	7.870	3.779	2.209	1.347	.8348	.5176	.2715	.0001	.3434	.7647	1.247	1.763	2.278	2.759	3.172	3.489	3.688	1.619
K= 5	3.827	3.489	2.970	2.334	1.652	1.000	.4398	.0002	.3473	.6946	1.144	1.732	2.425	3.153	3.833	4.386	4.746	1.361
K= 6	7.000	2.810	1.733	1.632	1.526	1.169	.6166	.0000	.5452	.9344	1.196	1.514	2.093	2.929	3.858	4.690	5.261	.8777
K= 7	5.235	4.464	3.405	2.334	1.510	1.000	.5697	.0001	.6840	1.305	1.676	1.732	1.724	2.209	3.246	4.386	5.235	.3836
K= 8	5.014	1.414	2.408	2.695	2.224	1.414	.6356	.0001	.6585	1.414	2.057	2.274	1.910	1.414	2.213	3.759	5.14	.6545
K= 9	5.235	3.834	2.349	1.815	1.926	1.629	.8618	.0002	.6840	1.305	2.022	2.532	2.336	1.212	1.190	3.411	5.236	1.189
K=10	3.975	1.414	2.927	2.695	1.929	1.414	.8731	.0003	.8837	1.414	1.770	2.274	2.404	1.414	.8583	3.759	6.204	1.549
K=11	5.064	2.532	1.000	2.334	2.502	1.732	.8458	.0001	1.000	1.759	1.850	1.732	1.939	1.347	1.000	4.386	7.497	1.637
K=12	4.192	1.364	2.164	1.632	2.035	1.985	1.062	.0004	.9578	1.900	2.211	1.514	1.107	1.085	.8817	4.690	8.518	1.434

γ=	140																	
α=	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180
K= 2	8.873	4.386	2.813	1.966	1.410	1.000	.6773	.4123	.1895	.0001	.1614	.2978	.4113	.5031	.5739	.6242	.6544	1.149
K= 3	2.317	2.227	2.079	1.879	1.633	1.347	1.031	.6946	.3473	.0001	.3367	.6527	.9383	1.185	1.385	1.532	1.622	1.534
K= 4	9.216	4.386	2.588	1.672	1.214	1.000	.8505	.6543	.3710	.0002	.4393	.9178	1.402	1.856	2.249	2.551	2.742	1.740
K= 5	4.746	4.386	3.833	3.153	2.425	1.732	1.144	.6946	.3473	.0001	.4398	1.000	1.652	2.334	2.970	3.489	3.827	1.740
K= 6	7.210	2.227	1.611	2.180	2.403	2.209	1.723	1.105	.5018	.0002	.4353	.9476	1.643	2.495	3.387	4.168	4.701	1.534
K= 7	5.235	4.386	3.246	2.209	1.724	1.732	1.676	1.305	.6840	.0002	.5697	1.000	1.510	2.334	3.405	4.464	5.235	1.149
K= 8	5.971	.0003	2.247	2.900	2.623	2.000	1.513	1.191	.7168	.0003	.7595	1.297	1.565	2.000	3.026	4.334	5.386	.6428
K= 9	5.235	3.411	1.190	1.212	2.336	2.532	2.022	1.305	.6840	.0002	.8618	1.629	1.926	1.815	2.349	3.834	5.235	.2340
K=10	6.417	.0003	1.824	1.600	1.317	2.000	2.222	1.682	.8110	.0003	.8516	1.786	2.325	2.000	1.571	3.135	5.014	.6428
K=11	7.497	4.386	1.000	1.347	1.939	1.732	1.850	1.759	1.000	.0001	.8459	1.732	2.502	2.334	1.000	2.532	5.084	1.149
K=12	5.098	2.227	2.608	.6776	1.429	2.209	1.937	1.596	1.044	.0001	.9732	1.633	2.370	2.495	.9143	2.342	5.591	1.534

γ=	150																	
α=	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180
K= 2	10.32	5.232	3.452	2.495	1.871	1.414	1.058	.7672	.5246	.3197	.1451	.0002	.1211	.2188	.2940	.3473	.3792	.9402
K= 3	2.970	2.879	2.732	2.532	2.286	2.000	1.684	1.347	1.000	.6527	.3160	.0002	.2856	.5321	.7321	.8794	.9696	1.323
K= 4	9.892	4.482	2.540	1.678	1.417	1.414	1.419	1.332	1.129	.8223	.4353	.0002	.4484	.8745	1.245	1.532	1.713	1.617
K= 5	5.066	4.690	4.114	3.411	2.672	2.000	1.491	1.185	1.000	.7908	.4635	.0002	.5667	1.175	1.753	2.227	2.538	1.803
K= 6	7.609	1.557	1.126	2.312	2.788	2.732	2.328	1.767	1.225	.8017	.4440	.0001	.6162	1.376	2.175	2.879	3.362	1.866
K= 7	4.834	3.834	2.449	1.185	1.255	2.000	2.359	2.227	1.732	1.095	.5038	.0001	.6092	1.449	2.449	3.411	4.106	1.803
K= 8	8.130	1.414	1.245	2.000	1.773	1.414	1.653	2.000	1.930	1.414	.6836	.0001	.6093	1.414	2.540	3.759	4.701	1.617
K= 9	7.156	5.087	2.449	.4679	1.572	2.000	1.786	1.653	1.732	1.509	.8402	.0002	.6952	1.360	2.449	3.879	5.094	1.323
K=10	7.000	1.414	2.649	2.000	.4015	1.414	2.127	2.000	1.651	1.414	.8964	.0001	.8626	1.414	2.233	3.759	5.261	.9402
K=11	9.008	5.593	2.000	1.185	1.259	.0001	1.505	2.227	2.000	1.432	.8733	.0001	1.036	1.632	2.000	3.411	5.212	.5000
K=12	3.992	3.521	4.346	2.312	.4784	.7321	.5827	1.767	2.225	1.704	.8900	.0001	1.150	1.933	1.897	2.879	5.000	.1340

γ=	160																	
α=	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180
K= 2	11.40	5.875	3.938	2.900	2.224	1.732	1.350	1.040	.7824	.5656	.3827	.2231	.1022	.0000	.0785	.1342	.1674	.6658
K= 3	3.502	3.411	3.264	3.064	2.818	2.532	2.216	1.879	1.532	1.185	.8480	.5321	.2465	.0001	.2000	.3473	.4375	.9713
K= 4	10.02	4.151	2.089	1.377	1.467	1.732	1.900	1.921	1.797	1.550	1.212	.8166	.4005	.0002	.3511	.6242	.7973	1.248
K= 5	4.778	4.386	3.787	3.064	2.329	1.732	1.436	1.442	1.532	1.523	1.345	1.000	.5300	.0002	.5158	.9455	1.230	1.436
K= 6	8.865	2.277	.7156	1.953	2.518	2.532	2.199	1.756	1.439	1.332	1.264	1.045	.6093	.0002	.6763	1.288	1.713	1.680
K= 7	5.496	4.386	2.796	1.064	.6314	1.732	2.299	2.320	1.970	1.523	1.216	1.000	.6314	.0000	.8161	1.629	2.226	1.823
K= 8	9.216	2.000	1.090	1.707	1.169	.0001	1.226	2.060	2.294	2.000	1.470	1.015	.6198	.0001	.9216	1.943	2.742	1.910
K= 9	8.627	6.411	3.576	1.064	.6314	.8794	.3351	1.095	1.970	2.227	1.860	1.212	.6314	.0001	.9852	2.209	3.237	1.940
K=10	6.021	2.000	4.117	3.528	1.700	.0001	.7256	.6543	1.251	2.000	2.083	1.503	.7193	.0001	1.007	2.409	3.688	1.910
K=11	8.078	4.386	1.000	2.695	3.043	1.732	.2744	.8794	1.000	1.523	2.015	1.732	.8719	.0000	1.000	2.532	4.073	1.823
K=12	5.918	2.277	3.248	1.469	2.005	2.532	1.412	.5321	1.199	1.332	1.750	1.806	1.032	.0001	.9867	2.572	4.374	1.680

γ=	170																	
α=	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180
K= 2	12.07	6.275	4.242	3.153	2.445	1.932	1.534	1.212	.9446	.7205	.5316	.3734	.2428	.1378	.0571	.0001	.0341	.3450
K= 3	3.849	3.759	3.611	3.411	3.165	2.879	2.563	2.227	1.879	1.532	1.195	.8794	.5938	.3473	.1473	.0001	.0902	.5139
K= 4	9.877	3.657	1.389	.8666	1.436	1.932	2.222	2.320	2.252	2.049	1.746	1.378	.9840	.6013	.2636	.0001	.1674	.6790
K= 5	4.177	3.759	3.117	2.334	1.540	1.000	1.095	1.523	1.879	2.040	1.984	1.732	1.337	.8666	.3969	.0003	.2643	.8339
K= 6	10.32	3.411	.8491	1.175	1.702	1.706	1.385	1.095	1.219	1.586	1.847	1.852	1.585	1.109	.5367	.0003	.3792	.9925
K= 7	6.908	5.759	4.115	2.334	.9262	1.000	1.482	1.523	1.286	1.212	1.482	1.732	1.687	1.299	.6724	.0003	.5100	1.139
K= 8	8.553	1.414	2.369	3.064	2.536	1.414	.7860	1.305	1.567	1.414	1.283	1.484	1.641	1.414	.7938	.0002	.6544	1.276
K= 9	8.038	5.759	2.917	1.185	2.001	2.209	1.482	.7733	1.286	1.629	1.482	1.347	1.502	1.449	.8922	.0002	.8098	1.404
K=10	7.140	1.414	3.582	3.064	1.516	1.414	1.829	1.305	.7594	1.414	1.709	1.484	1.385	1.414	.9616	.0001	.9735	1.520
K=11	8.974	5.064	1.000	2.334	2.830	1.732	1.195	1.523	1.000	.8794	1.646	1.732	1.418	1.347	1.000	.0001	1.143	1.626
K=12	6.233	2.548	3.417	1.175	1.806	2.617	1.717	1.095	1.244	.6480	1.256	1.852	1.607	1.306	1.010	.0002	1.314	1.719

γ=180																		
α=	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180
K= 2	12.30	6.411	4.346	3.240	2.521	2.000	1.596	1.270	1.000	.7733	.5825	.4226	.2908	.1848	.1034	.0458	.0114	.0001
K= 3	3.970	3.879	3.732	3.532	3.286	3.000	2.684	2.347	2.000	1.653	1.316	1.000	.7144	.4679	.2679	.1206	.0304	.0001
K= 4	9.782	3.411	.9319	.4923	1.411	2.000	2.336	2.462	2.414	2.227	1.935	1.577	1.192	.8152	.4824	.2221	.0567	.0001
K= 5	3.849	3.411	2.732	1.879	.9383	.0001	.8480	1.532	2.000	2.227	2.216	2.000	1.633	1.185	.7321	.3473	.0902	.0001
K= 6	10.94	3.879	1.000	.4619	1.049	1.000	.5099	.2221	1.000	1.653	2.057	2.155	1.956	1.532	1.000	.4923	.1307	.0001
K= 7	7.581	6.411	4.732	2.879	1.206	.0001	.5801	.5321	.0002	.7733	1.516	2.000	2.099	1.815	1.268	.6527	.1777	.0001
K= 8	7.789	.0002	2.932	3.747	3.224	2.000	.6973	.1918	.4142	.0001	.7880	1.577	2.037	2.000	1.518	.8237	.2310	.0001
K= 9	7.113	4.759	1.732	1.000	2.673	3.000	2.233	1.000	.0002	.3054	.1368	1.000	1.780	2.064	1.732	1.000	.2902	.0001
K=10	8.375	.0002	2.346	1.747	.1907	2.000	2.717	2.192	1.000	.0001	.2022	.4226	1.377	2.000	1.897	1.176	.3548	.0001
K=11	10.40	6.411	2.000	.8794	1.357	.0001	1.737	2.532	2.000	.7733	.1064	.0001	.9038	1.815	2.000	1.347	.4242	.0001
K=12	4.737	3.879	4.864	2.462	.1831	1.000	.1283	1.778	2.414	1.653	.3896	.1547	.4483	1.532	2.035	1.508	.4981	.0001