

直线像的能量分布函数的一种表示式及其应用

朱 延 彬

摘要 本文推导了由几个环节组成的光学系统（其线扩散函数以高斯函数表示）的直线像的能量分布函数的一种表示式，并对其进行了一些应用上的讨论。

一、公式推导

不同形状孔径的理想镜头的点像及直线像的能量分布函数曾有过许多研究^[1]，但对于由几个参与成像环节组成的光学系统应用起来就较为困难了。

本文将推导非相干照明时光学系统的直线像的能量分布函数的一种表示式。此光学系统可以是一个镜头或者一个简单的光具组，也可以是由光学镜头、像移、接收器（例如摄影乳剂，光电元件，眼睛）等一系列参与成像过程的环节组成的光学整体（例如图一）。这个系统的线扩散函数可以相当精确地用高斯函数来表示^{[2][3]}：

$$y(x) = e^{-\frac{x^2}{2\sigma'^2}} \quad (1)$$

式中的 σ' 表示此系统的线扩散函数的特征系数，即误差函数的均方根值。它和参与成

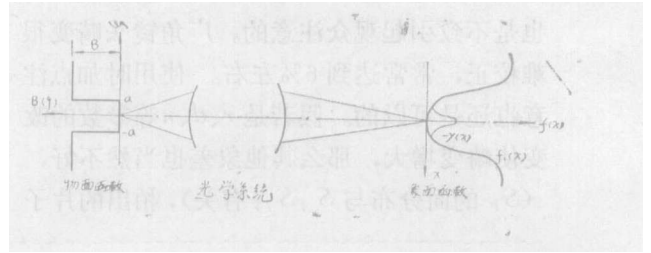


图 2

像过程的一系列单元环节的线扩散函数（均用高斯函数表示）的特征系数之间存在如下关系^[3]：

$$\sigma' = (\sigma_1'^2 + \sigma_2'^2 + \sigma_3'^2 + \dots + \sigma_n'^2)^{1/2} \quad (2)$$

式中， σ_1' ——镜头的线扩散函数的特征系数；

σ_2' ——像移的线扩散函数的特征系数；

σ_3' ——接收器（例如摄影乳剂）的线扩散函数的特征系数；

.....

σ_n' ——其它环节的线扩散函数的特征系数。

如图二所示，假定物面是宽度为 $2a$ 的线，其能量分布函数归算于像面的表示式为

$$B(\xi) = \begin{cases} B & \xi \leq -\beta a, \quad \xi \geq \beta a \text{ 时} \\ 0 & -\beta a < \xi < \beta a \text{ 时;} \end{cases} \quad (3)$$

式中， B ——亮度；

β ——光学系统的放大倍率。

显然，当光学系统被近似为线性空间不变时，其像面的能量分布函数可以用卷积积分进行数学运算如下：

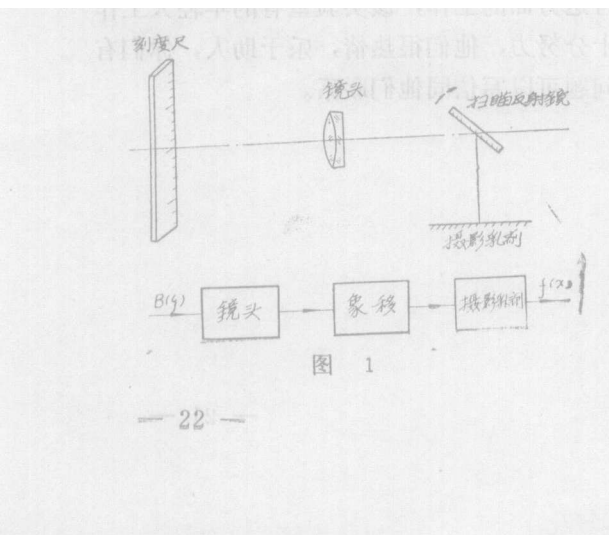


图 1

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} y(x-\xi) \cdot B(\xi) \cdot d\xi. \quad (4)$$

(注: $f_1(x)$ 的右下角“1”表示对一条线成像的结果。)

把(3)式代入(4)式得到

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-\xi)^2/2\sigma'^2} \cdot B(\xi) \cdot d\xi \\ &= B \cdot \int_{-\infty}^{-\beta a} e^{-(x-\xi)^2/2\sigma'^2} \cdot d\xi \\ &\quad + B \cdot \int_{\beta a}^{\infty} e^{-(x-\xi)^2/2\sigma'^2} \cdot d\xi, \end{aligned}$$

令 $\frac{(x-\xi)^2}{2\sigma'^2} = \eta^2$, 则有

$$d\eta = \frac{-d\xi}{\sqrt{2}\sigma'}$$

存在, 代入上式, 得到

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \sqrt{2} \cdot B \cdot \sigma' \left\{ \int_{\frac{x+\beta a}{\sqrt{2}\sigma'}}^{\frac{x+\beta a}{\sqrt{2}\sigma'}} e^{-\eta^2} d\eta \right. \\ &\quad \left. + \int_{\frac{x-\beta a}{\sqrt{2}\sigma'}}^{-\infty} e^{-\eta^2} \cdot d\eta \right\}. \end{aligned}$$

如众所知, 不定积分 $\int e^{-\eta^2} d\eta$ 可以利用特殊的拉普拉斯函数(或称概率积分)来表示, 而且其函数值可以查表求得。拉普拉斯函数的形式为,

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\eta^2} \cdot d\eta.$$

因此, 利用拉普拉斯函数的一些性质*可以把 $f_1(x)$ 表示如下:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= c \left\{ 2 - \Phi\left(\frac{x+\beta a}{\sqrt{2}\sigma'}\right) \right. \\ &\quad \left. + \Phi\left(\frac{x-\beta a}{\sqrt{2}\sigma'}\right) \right\}. \quad (5) \end{aligned}$$

(5)式即为一条直线像的能量分布函数。式中, $C = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} B \cdot \sigma$ 。

若物面的结构为距离 d 的两条直线(如图三所示), 则归算到像面的物面能量分布函数为

$$B(\xi) = \begin{cases} B & \xi \leq -\beta a, \beta a \leq \xi \leq \beta(d-a) \\ 0 & -\beta a < \xi < \beta a, \beta(d-a) < \xi \leq \beta(d+a) \text{ 时} \\ & < \xi < \beta(d+a) \text{ 时.} \end{cases}$$

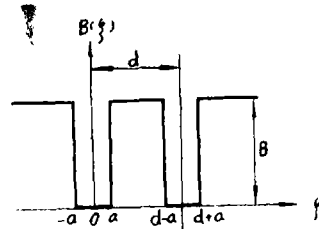


图 3

利用卷积积分求像面的能量分布函数

$$\begin{aligned} f_2(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} y(x-\xi) \cdot B(\xi) \cdot d\xi \\ &= B \left\{ \int_{-\infty}^{-\beta a} e^{-(x-\xi)^2/2\sigma'^2} d\xi \right. \\ &\quad + \int_{\beta a}^{\beta(d-a)} e^{-(x-\xi)^2/2\sigma'^2} d\xi \\ &\quad \left. + \int_{\beta(d+a)}^{\infty} e^{-(x-\xi)^2/2\sigma'^2} d\xi \right\}. \end{aligned}$$

依照前面的办法处理, 则得

$$\begin{aligned} f_2(x) &= c \left\{ 2 - \Phi\left(\frac{x+\beta a}{\sqrt{2}\sigma'}\right) \right. \\ &\quad + \Phi\left(\frac{x-\beta a}{\sqrt{2}\sigma'}\right) \\ &\quad + c \left\{ \Phi\left[\frac{x-\beta(d+a)}{\sqrt{2}\sigma'}\right] \right. \\ &\quad \left. - \Phi\left[\frac{x-\beta(d-a)}{\sqrt{2}\sigma'}\right] \right\}. \quad (6) \end{aligned}$$

(6)式即为间距为 d 的两条直线像的

* 拉普拉斯函数具有如下的明显性质:

1. $\Phi(0) = 0$ (因为 $x=0$ 时, $\int_0^x e^{-\eta^2} d\eta$ 的上下积分限相同)。

$$\begin{aligned} 2. \Phi(\infty) &= 1 \text{ 因为 } \Phi(\infty) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 1. \end{aligned}$$

3. 拉普拉斯函数是 x 的奇函数: $\Phi(-x) = -\Phi(x)$. 因为 $\Phi(-x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{-x} e^{-\eta^2} d\eta$, 做变数变换 $t = -\eta$, 就有

$$\Phi(-x) = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt = -\Phi(x).$$

参看 E.C. 温特切勒著“概率论”, 上海科技出版社出版。

量能分布函数表示式。

对于物面为等间距的三条直线的像的能量分布函数应为

$$f_3(x) = c \left\{ 2 - \Phi \left(\frac{x + \beta a}{\sqrt{2} \sigma'} \right) + \Phi \left(\frac{x - \beta a}{\sqrt{2} \sigma'} \right) \right\} + c \left\{ \Phi \left[\frac{x - \beta(d+a)}{\sqrt{2} \sigma'} \right] - \Phi \left[\frac{x - \beta(d-a)}{\sqrt{2} \sigma'} \right] \right\} + c \left\{ \Phi \left[\frac{x - \beta(2d+a)}{\sqrt{2} \sigma'} \right] - \Phi \left[\frac{x - \beta(2d-a)}{\sqrt{2} \sigma'} \right] \right\}. \quad (7)$$

采用归纳法, 对于物面为等间距的几条直线的像的能量分布函数表示如下:

$$f_n(x) = c \left\{ 2 + \sum_{N=0}^{N=n-1} \left\{ \Phi \left[\frac{x - \beta(Nd+a)}{\sqrt{2} \sigma'} \right] - \Phi \left[\frac{x - \beta(Nd-a)}{\sqrt{2} \sigma'} \right] \right\} \right\}. \quad (8)$$

(8) 式为在不相干照明下, 物面为任意条直线, 被一个线扩散函数的特征系数为 σ' 的光学系统成像后的能量分布函数的普遍表示式。

二、几点应用

1. 最佳线宽

对比度是衡量直线像的清晰度指标之一, 通常对比度 K 定义为:

$$K = \frac{f_{max}(x) - f_{min}(x)}{f_{max}(x)} \quad (9)$$

式中, $f_{max}(x)$ ——直线像的最大能量;

$f_{min}(x)$ ——直线像的最小能量。

一个放大倍率 β 和线扩散函数的特征系数 σ' 的光学系统, 它的直线像的对比度随线宽 $2a$ 而变化。图四示出一个特例。由此例清楚看出, 线宽 $2a$ 严重地影响直线像的对比度。

由(9)式可见, 由于 $f_{max}(x) = \text{常数}$, 因此, 获得最佳线宽的条件即 $f_{min}(x) = f(x)$

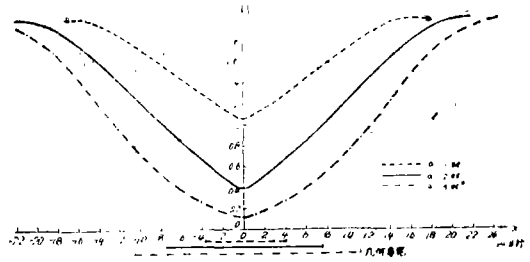


图4 刻线宽度 $2a$ 不同时, 成像平面上的能量分布曲线

当 $\beta = 3.8$ $\sigma' = 0.96 \mu\text{m}$ 时

$= 0) = 0$ 的条件。因为 $f_{min}(x) = 0$ 时, $K = 1$ 。

显然, 由(5)式可求得 $f(x=0)$ 的条件:

$$f_1(x=0) = c \left\{ 2 - \Phi \left(\frac{\beta a}{\sqrt{2} \sigma'} \right) + \Phi \left(\frac{-\beta a}{\sqrt{2} \sigma'} \right) \right\} = 0;$$

$$\Phi \left(\frac{\beta a}{\sqrt{2} \sigma'} \right) - \Phi \left(\frac{-\beta a}{\sqrt{2} \sigma'} \right) = 2;$$

$$\Phi \left(\frac{\beta a}{\sqrt{2} \sigma'} \right) = 1;$$

$$\frac{\beta a}{\sqrt{2} \sigma'} \geq 3;$$

$$\therefore 2a \geq \frac{6\sqrt{2} \sigma'}{\beta} \quad (10)$$

(10) 式即为获得直线像最大对比度的线宽值。由(10)式可见, 最佳线宽是光学系统的扩散函数的特征系数的函数, 质量越好 (即 σ' 值越小) 的光学系统允许的最佳线宽值越小。此结果于度盘成像系统及标尺刻度中曾获得良好的应用。

2. 相邻直线像的能量互不干扰的条件

恰当地选择相邻直线的间距 d 的大小, 可以获得相邻直线像的能量互不干扰的结果, 从而使直线保持其固有对比度不因相邻直线像的能量互相干扰而降低。

由(6)式可推导满足此条件的 d 值。

首先求出无相邻线条时一直线像的边缘能量为常数的 x 值。(6) 式的第一项 $c \left\{ 2 - \Phi \left(\frac{x + \beta a}{\sqrt{2} \sigma'} \right) + \Phi \left(\frac{x - \beta a}{\sqrt{2} \sigma'} \right) \right\}$ 即(5)式表示的一直线像的能量分布函数。为求出此

x 值, 令下式成立:

$$\text{即 } c \left\{ 2 - \Phi\left(\frac{x+\beta a}{\sqrt{2}\sigma'}\right) + \Phi\left(\frac{x-\beta a}{\sqrt{2}\sigma'}\right) \right\} = \text{常数}.$$

$$\Phi\left(\frac{x+\beta a}{\sqrt{2}\sigma'}\right) - \Phi\left(\frac{x-\beta a}{\sqrt{2}\sigma'}\right) = \text{常数};$$

$$\Phi\left(\frac{x+\beta a}{\sqrt{2}\sigma'}\right) = \Phi\left(\frac{x-\beta a}{\sqrt{2}\sigma'}\right);$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x+\beta a}{\sqrt{2}\sigma'} \geq 3 \text{ 或 } \leq -3 \\ \frac{x-\beta a}{\sqrt{2}\sigma'} \geq 3 \text{ 或 } \leq -3; \end{array} \right.$$

同时满足此条件的 x 值为

$$x = 3\sqrt{2}\sigma' + \beta a. \quad (11)$$

进而就可求出 (6) 式的第二项

$$c \left\{ \Phi\left[\frac{x-\beta(d+a)}{\sqrt{2}\sigma'}\right] - \Phi\left[\frac{x-\beta(d-a)}{\sqrt{2}\sigma'}\right] \right\};$$

于 $x = 3\sqrt{2}\sigma' + \beta a$ 处等于零的条件, 即可求出此时的 d 值。为此, 令

$$c \left\{ \Phi\left[\frac{x-\beta(d+a)}{\sqrt{2}\sigma'}\right] - \Phi\left[\frac{x-\beta(d-a)}{\sqrt{2}\sigma'}\right] \right\} = 0;$$

$$\text{即令 } \Phi\left[\frac{x-\beta(d+a)}{\sqrt{2}\sigma'}\right] = \Phi\left[\frac{x-\beta(d-a)}{\sqrt{2}\sigma'}\right].$$

把 $x = 3\sqrt{2}\sigma' + \beta a$ 代入上式, 就可求出

$$d \geq \frac{6\sqrt{2}\sigma' + 2\beta a}{\beta}. \quad (12)$$

(12) 式即为相邻直线像的能量互不干扰所需满足的条件。

3. 提高直线像的对比度的一个途径

前述理论公式推导实际上仅讨论了光学系统对暗线 (即亮背景上不透明的线条, 例如, 透明玻璃度盘上的黑线, 透明标尺上的刻度) 成像的能量分布函数。从 (9) 式定义的对比度看出, 当线宽 $2a < \frac{6\sqrt{2}\sigma'}{\beta}$ 时,

像的对比度 $K < 1$; 线宽 $2a \geq \frac{6\sqrt{2}\sigma'}{\beta}$ 时,

$K = 1$ 。对此可证明如下:

$$K = \frac{f_{1\max}(x) - f_{1\min}(x)}{f_{1\max}(x)}$$

$$= \frac{2 - f_1(x=0)}{2}.$$

$$= \frac{\Phi\left(\frac{\beta a}{\sqrt{2}\sigma'}\right) - \Phi\left(\frac{-\beta a}{\sqrt{2}\sigma'}\right)}{2}.$$

$$= \Phi\left(\frac{\beta a}{\sqrt{2}\sigma'}\right).$$

$$\therefore \Phi\left(\frac{\beta a}{\sqrt{2}\sigma'}\right) \leq 1,$$

$$\therefore a \geq \frac{3\sqrt{2}\sigma'}{\beta} \text{ 时, } \Phi\left(\frac{\beta a}{\sqrt{2}\sigma'}\right) = 1,$$

$$a < \frac{3\sqrt{2}\sigma'}{\beta} \text{ 时, } \Phi\left(\frac{\beta a}{\sqrt{2}\sigma'}\right) < 1.$$

(证明完毕)

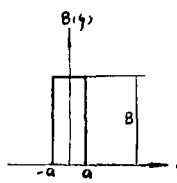
若此直线为亮线 (即在暗背景上的透明线条, 例如镀银分划板上的分划线, 不透明度盘的透明线条), 则光学系统对此亮线成的像的对比度在满足相邻直线像的能量互不干扰的条件下, 恒等于 1, 和线宽无关。为证明此点, 首先推导出亮线像的能量分布函数的表示式。

图五示出了物面为亮直线, 物面函数为

$$b(\xi) = \begin{cases} B & -\beta a \leq \xi \leq \beta a \text{ 时} \\ 0 & \xi < -\beta a, \xi > \beta a \text{ 时.} \end{cases} \quad (13)$$

它被线扩散函数为 $y(x) = e^{-x^2/2\sigma'^2}$ 的光学系统成的像的能量分布函数

$$\begin{aligned} F_1(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} y(x-\xi) \cdot b(\xi) \cdot d\xi \\ &= B \int_{-\beta a}^{\beta a} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-\xi)^2}{\sigma'^2}} d\xi. \end{aligned}$$



$$\text{令 } \frac{(x-\xi)^2}{2\sigma'^2} = \eta^2, \text{ 则}$$

$$d\eta = \frac{-d\xi}{\sqrt{2}\sigma'}.$$

代入上式, 得到

图 5

$$F_1(x) = \sqrt{2}\sigma' \cdot B \cdot$$

$$\left\{ \int_{\frac{x+\beta a}{\sqrt{2}\sigma'}}^0 -e^{-\eta^2} d\eta + \int_0^{\frac{x-\beta a}{\sqrt{2}\sigma'}} -e^{-\eta^2} d\eta \right\}.$$

设 $c = \frac{\sqrt{2}\pi\sigma' \cdot B}{2}$, 如前一样用拉普拉斯函数表示:

$$F_1(x) = c \left\{ \Phi \left(\frac{x + \beta a}{\sqrt{2} \sigma'} \right) - \Phi \left(\frac{-x - \beta a}{\sqrt{2} \sigma'} \right) \right\} \quad (14)$$

(14) 式为非相干照明时光学系统的亮线像的能量分布函数。

由 (14) 式可见, $F_{1_{max}}(x) = F_1(x=0) = 2\Phi\left(\frac{\beta a}{\sqrt{2}\sigma'}\right)$, $F_{1_{min}}(x) = 0$, 因此, 亮线像的对比度 $K=1$, 和 $F_{1_{max}}(x)$ 的大小无关。

由此可得出如下结论: 在线宽很小时, 同一光学系统对一条亮线成的像的对比度将优于暗线像的对比度。在线数多于 1 时, 如满足相邻直线像的能量互不干扰的条件, 此结论仍是正确的。当然, 如果线宽 $2a \geq \frac{6\sqrt{2}\sigma'}{\beta}$, 则无论是暗线还是亮线, 像的对比度是完全一样的。

对此可以引伸说明一点如下: 试比较 (14) 式和 (5) 式就清楚看出, 相同线宽的暗线及亮线, 如被同一光学系统成像, 其能量分布曲线基本上是相同的, 仅是在纵坐标的平移及反向, 如图六所示。

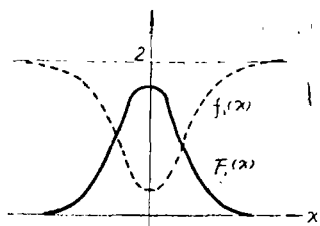


图 6

4. 刀口函数的表示式

光学系统对物面为阶跃函数

$$B(\xi) = \begin{cases} B & \xi \leq 0 \text{ 时;} \\ 0 & \xi > 0 \text{ 时.} \end{cases}$$

成的像为刀口函数, 记为 $\phi(x)$, 而且

$$\phi(x) = c \left\{ 1 - \Phi \left(\frac{x}{\sqrt{2} \sigma'} \right) \right\}. \quad (15)$$

如图七所示, 当 $x \geq X$, $X = 3\sqrt{2}\sigma'$ 时, $\phi(x)$ 等于零, 显然, X 值的大小完全由此系统的扩散函数的特征系数 σ' 所决定。

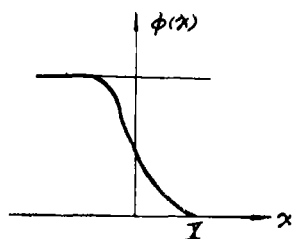


图 7

因此, 一个质量好的 (即 σ' 值小) 光学系统 X 值较小, 从这个意义上说, X 值的大小和 σ' 值一样, 反映了光学系统对点像或直线像的能量扩散程度。但是, 在某些场合, 由于 X 值较易于测量 (例如, 在摄影胶片上摄得的刀口像即可在密度计上进行测量), 因此可以通过测量 X 值而推算出此光学系统的扩散函数的特征系数 σ' , 从而了解此光学系统的质量。

三、结 束 语

本文蒙薛鸣球, 蒋筑英, 韩昌元等同志校阅, 并提出宝贵意见, 特致衷心谢意。

参 考 文 献

- [1] 例如, J. W. 顾德门著, 傅利叶光学导论, 第四章。
- [2] Kenro Miyamoto, JOSA, 47, 774 (1957).
- [3] Robert N. Wolfe 等, Photographic Science and Engineering, 4, 330 (1960).