

阿达马光谱术中的数据处理方法

—快速阿达马变换

王世昌

摘要：本文系统的讨论了应用于阿达马光谱术中的数据处理方法——快速阿达马变换。给出了：
1. 阿达马矩阵的构造方法。2. 阿达马光谱术中矢量方程的建立。3. 置换 π_1, π_2 的构造。
4. 判别任意 2^n ($n \geq 0$) 阶阿达马矩阵中任意元素 H_{ij} 的判别式的给出： $H_{ij} = (-1)^{\mu_{n-1}j_{n-1} + \mu_{n-2}j_{n-2} + \dots + \mu_1j_1 + \mu_0j_0}$ 。5. 快速阿达马变换算式的建立。6. 快速阿达马算法的验证。

前 言

本文主要讨论应用于阿达马光谱术中进行数据处理的一种快速算法。即是：对阿达马光谱仪测得的矢量，采用快速哈达马变换（以下简称FHT）解算光谱的方法。

大家都熟知快速傅立叶变换（以下简称：FFT）算法，而FHT的计算速度比FFT还要快。因FHT算法是用阿达马矩阵（以下简称为H矩阵）去作用测得的矢量。而H矩阵的元素是“+1”或“-1”。所以H矩阵在作用给定的矢量时，显然只是做加，减运算。从而FHT的计算速度快于FFT的计算速度。

一、H矩阵的构造

令： H_m 表示 m ($m = 2^n, n \geq 0$ 的整数) 阶阿达马矩阵。

最简单的H矩阵如下：

$$H_1 = [1] \quad (1)$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$H_4 = H_2 \times H_2 \text{ 的直积}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

依此类推：

$$H_{2 \times n} = H_2 \times H_m \text{ 直积}$$

$$= \begin{bmatrix} H_m & H_m \\ H_m & -H_m \end{bmatrix} \quad (4)$$

不难看出和证明H矩阵具有如下特点：

1. H矩阵是由“+1”和“-1”组成的。
2. 称头行为第0行，头列为第0列。显然，0行，0列的各元素都是“+1”。
3. 行向量和列向量不同时相互正交。
4. 如 H_1 和 H_m 都是H矩阵，则他们的直积也是H矩阵。
5. H矩阵是对称的。

二、阿达马光谱术中 矢量方程的建立

为了阐述此方程的建立，我们先看如下简单的物理过程。

我们先令：“1”表示通光（即狭缝），也表下图中的符号“□”。

“0”表示还透光，即表示下图中在等间隔处没有符号“□”的空白。

设： $X = (x_1, x_2, \dots, x_7)$ 表示被测的光谱矢量。

$F = (f_1, f_2, \dots, f_7)$ 表示测得的测量矢量。

测量方法为：

1. 采用下图中给出的具有13个“0”，“1”编码的模板，即：

1 1 1 0 0 1 0 1 1 1 0 0 1

以前7个码：

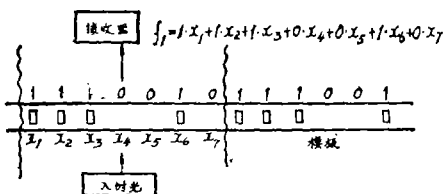
1 1 1 0 0 1 0

为基本码。后6个码是以此7个基本码循环左移6次得出的。

2. 测量过程如下：

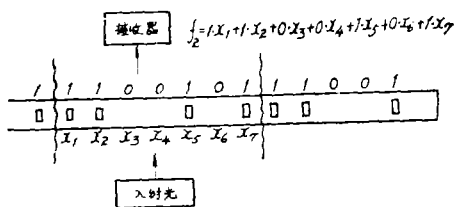
每次只是7个码进入光谱仪器。

第一次测量：



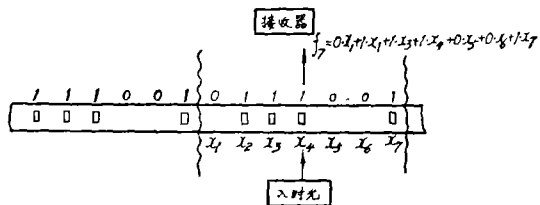
第二次测量：

将模板左移一个码。



依此类推：

第7次测量为：



按上述方法共以次左移6次，从而得矢量方程：

$$\begin{matrix} f_1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ f_2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ f_3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ f_4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ f_5 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ f_6 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ f_7 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{matrix} \quad (5)$$

此例我们是以特例给予阿达马光谱术以简单直观的描述。

按此基本原理我们可以推广到对N元矢量的测量。

设 $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ ($N = 2^n - 1, n \geq 0$ 的整数) 表示N元光谱强度分布矢量。对此矢量我们测量N次，设得矢量为 $F = (f_1, f_2, \dots, f_N)$ 。

测量方法如下：

1. 给一个有 $2N - 1$ ($N = 2^n - 1, n > 0$ 的整数) “0”，“1”编码的模板。此 $2N - 1$ 个码是以N个基本码为基底，其余 $N - 1$ 个码是由此N个基本码循环左移次 $N - 1$ 获得的。

例如：上例中的13个“0”，“1”编码的模板就是这样的模板。

2. 测量时，每次只有N个码进入仪器。首次测量是： x_1, x_2, \dots, x_N 一对应模板上头相连的N个码，此N个码中的所有“1”给出了 x_i (i 取1到N之间的某些值) x_i 一种选取组合。这样，所有和“1”对应的 x_i 的光强总和就落在接收器上，从而由接收器就获得第一次测量结果，即， f_1 。

3. 然后我们将模板左移一个码，这样就得到进入仪器的第二个相连的N个码。同上论述，从接收器上就可获得第二次测量结果，即 f_2 。

4. 依此类推，以次共左移 $N - 1$ 次可测得结果， f_1, f_2, \dots, f_N 。

即得初始测量矢量：

$$F = (f_1, f_2, \dots, f_N)$$

从而建立矢量方程：

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix} = [a_{ij}] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \quad (6)$$

(6)式中的系数矩阵 $[a_{ij}]$ 是由上述模板按上述方法左移 $N-1$ 次获得的。以下称 $[a_{ij}]$ 为测量矩阵。

我们的目的是要求出被测的光谱矢量分布 $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ 。而现在已知的是：

1. 矩阵 $[a_{ij}]$ 。
2. 矢量 $F = (f_1, f_2, \dots, f_N)$ 。

解决这一问题显然是应求出测量矩阵 $[a_{ij}]$ 之逆 $[a_{ij}]^{-1}$ 。而得矢量表达式：

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} = [a_{ij}]^{-1} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix} \quad (7)$$

从而解出矢是 $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ 。

我们知道这种求逆矩阵的解法，是解矢量方程的原始方法。此方法是很繁琐的。这就提给我们应去探讨新的快速方法。本文讨论的就是一种快速算法——即FHT算法。

注意：由上面的论述就给我们提出了两个要求。

1°，要使方程(6)有唯一解，即系数矩阵有逆 $[a_{ij}]^{-1}$ 存在。

2°，要使 $[a_{ij}]^{-1}$ 和H矩阵建立一一对应关系。因为我们讨论的是要用FHT算法去求解矢量方程(6)。

此两点就提出了对上面给出的构造测量模板的 $2N-1$ 个“0”，“1”编码必须要满足上述两点要求。从而说明这种编码^{[1]、[2]}是要很考究的。

三、置换 π_1 、 π_2 的构造。

为应用FHT算法去求解矢量方程(6)，必须要构造置换 π_1 和置换 π_2 。此二个置换

的功能是为分别置换被H矩阵作用前的矢量和作用后获得的矢量各分量的次序。

1. 构造置换 π_1 。

1). 令：

$$\Lambda_n = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \alpha_{12} \dots \alpha_{1N} \\ \alpha_{21} \alpha_{22} \dots \alpha_{2N} \\ \dots \dots \dots \dots \\ \alpha_{n1} \alpha_{n2} \dots \alpha_{nN} \end{pmatrix} = \text{矩阵 } [a_{ij}] \text{ 转置的头 } n \text{ 行。} \quad (8)$$

2). 令： $\pi_1(j) = p$ 。

p 是 + 进整数，是用 $\alpha_{n1} \alpha_{n-11} \dots \alpha_{21} \alpha_{11}$ 的二进制计数法表示 p 。用此置换去置换上面给出的初始测量矢量：

$$F = (f_1, f_2, \dots, f_N)$$

的各分量的次序。令置换后得到的测量矢量为： $F^1 = (f_1^1, f_2^1, \dots, f_N^1)$ 。

则有： F^1 的第 p 个分量 f_p^1 等于 F 的第 j 个分量值 f_j 。 $1 \leq p \leq N, 1 \leq j \leq N$ 。

2. 构造置换 π_2 。

1). 令：

$$\Lambda = \begin{pmatrix} a_{11} a_{21} \dots a_{N1} \\ a_{12} a_{22} \dots a_{N2} \\ \dots \dots \dots \dots \\ a_{1N} a_{2N} \dots a_{NN} \end{pmatrix} = [a_{ij}] \text{ 的 } \text{整个转置} \quad (9)$$

2). 构造矩阵B。

用置换 $\pi_1(j) = p$ 去置换矩阵A的列，使矩阵B的第 p 列等于矩阵A的第 j 列。

3). 构造矩阵C

令：

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} C_{12} \dots C_{1n} \\ C_{21} C_{22} \dots C_{2n} \\ \dots \dots \dots \dots \\ C_{N1} C_{N2} \dots C_{Nn} \end{pmatrix} \quad (10)$$

C 的第 j 列是B的第 2^{j-1} 列。

$1 \leq j \leq n$

4). 构造置换 π_2 如下：

令： $\pi_2(k) = p$

此处 k 是十进整数，用 $C_{p0} C_{p0-1} \dots C_{p2} C_{p1}$ 所表示的二进制数表示 k 。用同说明置换 π_1 的方法说明 π_2 。即置换后得到

矢量的第 p 个分量等于被置换矢量的第 k 个分量值。

注意：置换 π_1 和 π_2 是用给定的同一个测量矩阵 $[a_{ij}]$ 确定的，并用于同一个光谱矢量分布的计算中。

四、 H_{ij} 的判别式

H_{ij} 表示任意阶 H 矩阵的第 i 行，第 j 列的元素。

从下面的“五”中可看到：我们要用 $N+1$ ($N=2^n-1$) 阶 H 矩阵 H_{N+1} 去替代 N 阶测量矩阵之逆 $[a_{ij}]^{-1}$ 的作用。这样，为了计算我们就应存贮矩阵 H_{N+1} 。但从上述的讨论中可知：假如我们要测量具有 127 个分量的光谱分布，得到的测量矩阵之逆就是 127 阶的方阵。而替代它的 H 矩阵即为 128 阶的方阵。熟知：存贮 128 阶的方阵需占用 16384 个存贮单元。可想而知，当被测的光谱分量不断增加的情况下，需存 H 矩阵的单元数将是一个惊人的数字。从而使计算机无法存贮这样的 H 矩阵，自然也就无法进行数据处理工作。从而就提给我们一个问题：即不存贮 H 矩阵，而且还要进行计算。这就迫使我们去探索一种方法以实现我们的数据处理工作。这里我们用给出判别任意 2^n ($n \geq 0$ 的整数) 阶 H 矩阵中的元素 (“+1”, “-1”) 的排列规律的方法，以实现用此算法进行的数据处理工作。

H_{ij} 的判别式给出：

令：1, 行数 i 的 n 位二进制表示为：

$$i = \mu_{n-1}\mu_{n-2}\cdots\mu_1\mu_0 \quad (11)$$

$\mu_k = 0$, 或 1 , ($k = 0, 1, \dots, n-1$)

$$0 \leq i \leq N, N = 2^n - 1$$

2, 列数 j 的 n 位二进制表示为：

$$j = j_{n-1}j_{n-2}\cdots j_1j_0 \quad (12)$$

$j_k = 0$ 或 1 , ($k = 0, 1, \dots, n-1$)

$$0 \leq j \leq N, N = 2^n - 1$$

将 (11) 和 (12) 两式进行逻辑乘，然后将其结果的各位相加，即：

$$\Sigma_{ij} = \mu_{n-1}j_{n-1} + \mu_{n-2}j_{n-2} + \cdots + \mu_1j_1 + \mu_0j_0 \quad (13)$$

则得 H_{ij} 的判别式：

$$\begin{aligned} H_{ij} &= (-1)^{\Sigma_{ij}} \\ &= (-1)^{\mu_{n-1}j_{n-1} + \mu_{n-2}j_{n-2} + \cdots + \mu_1j_1 + \mu_0j_0} \quad (14) \end{aligned}$$

此判别式 (14) 我们已用数学归纳法予以证明是完全正确的。这里就不给出了。

例如： $i=5, j=7$ 时：

$$5 \text{ 的 } n \text{ 位二进制} = 0 \cdots 0 \ 1 \ 0 \ 1$$

$$\mu_{n-1} \cdots \mu_3 \mu_2 \mu_1 \mu_0$$

$$7 \text{ 的 } n \text{ 位二进制} = 0 \cdots 0 \ 1 \ 1 \ 1$$

$$j_{n-1} \cdots j_3 j_2 j_1 j_0$$

$$\text{则：} H_{5.7} = (-1)^{0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1}$$

$$= (-1)^2 = 1$$

此判别式的给出为快速阿达马变换算法的序列表达式的建立提供了一种手段。也为编制计算机的程序提供了条件。

五、FHT 算式的建立

前面已讲到了：我们要用 $N+1$ 阶 H 矩阵去取代 N 阶的矩阵 $[a_{ij}]^{-1}$ 的作用。

从而由 (7) 式得矢量方程：

$$\begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ \vdots \\ S_N \end{pmatrix} = H_{N+1} \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \\ \vdots \\ F_N \end{pmatrix} \quad (15)$$

矢量 (F_0, F_1, \dots, F_N) 为初始测量矢量 $F = (f_1, f_2, \dots, f_N)$ 被 π_1 置换后再加上一个 $F_0 = 0$ 的“0”分量得到的。

矢量 (S_0, S_1, \dots, S_N) 表示用 H_{N+1} 作用矢量 (F_0, F_1, \dots, F_N) 后得到的矢量。

由 H_{ij} 的判别式 (14)，我们可写出 (15) 式的分量形式表达式：

$$S(i) = \sum_{j=0}^N (-1)^{\Sigma_{ij}} F(j) \quad (16)$$

$$0 \leq i \leq N$$

$$i = \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k 2^k = \mu_{n-1} \mu_{n-2} \cdots \mu_1 \mu_0$$

将分量 $F(j)$ 的编号 j ($j=0, 1, \dots, N$) 表成 n 元二值编码形式, 即:

$$j = j_{n-1} j_{n-2} \cdots j_1 j_0$$

$$j_k = 0 \text{ 或 } 1 \quad 0 \leq k \leq n-1$$

这样同获得FFT算式的同样思想可构造出FHT算式的序列表达式:

$$S(i) = \sum_{j_{n-1}=0}^1 \cdots \sum_{j_k=0}^1 \cdots \sum_{j_0=0}^1 F(j_{n-1} j_{n-2} \cdots j_k \cdots j_0) (-1)^{j_0 \mu_0} \cdots (-1)^{j_k \mu_k} \cdots (-1)^{j_{n-1} \mu_{n-1}} \quad (17)$$

$$i = \mu_{n-1} \mu_{n-2} \cdots \mu_1 \mu_0$$

$$0 \leq i \leq N$$

此式即为FHT算式的序列表达式。

例如: 当 $n=3, N=2^3-1=7$ 时, (17) 式可展开为:

$$\begin{aligned} S(i) = & F(000) + (-1)^{\mu_0} F(001) + (-1)^{\mu_1} F(010) \\ & + (-1)^{\mu_1 + \mu_0} F(011) \\ & + (-1)^{\mu_2} F(100) + (-1)^{\mu_2 + \mu_0} F(101) + (-1)^{\mu_2 + \mu_1} F(110) \\ & + (-1)^{\mu_2 + \mu_1 + \mu_0} F(111), \quad (18) \end{aligned}$$

且当 $i=7 = \mu_2 \mu_1 \mu_0 = 111$ 时

则:

$$S(7) = S(111) = F_0 - F_1 - F_2 + F_3 - F_4 + F_5 + F_6 - F_7 \quad (19)$$

FHT算法步骤如下:

1. 用给定的 $2N-1$ 个“0”, “1”编码得出 N 阶测量矩阵 $[a_{ij}]$, 并给出初始测量矢量 $F_0(f_1, f_2, \dots, f_N)$ 。

2. 用置换 π_1 去置换 $F_0(f_1, f_2, \dots, f_N)$ 各分量的次序, 得测量矢量 $F'_0(f'_1, f'_2, \dots,$

$f'_N)$ 。

3. 将 $F'_0(f'_1, f'_2, \dots, f'_N)$ 增加一个“0”分量得矢量 $F(0, f'_1, \dots, f'_N)$ 。

4. 将 $F(0, f'_1, \dots, f'_N)$ 进行FHT计算。设得结果矢量为 $S'(S'_0, S'_1, \dots, S'_N)$ 。

5. 去掉矢量 $S'(S'_0, S'_1, \dots, S'_N)$ 的第一个分量 S'_0 , 设得矢量 $S(S'_1, S'_2, \dots, S'_N)$ 。

6. 用置换 π_2 去置换矢量 $S(S'_1, S'_2, \dots, S'_N)$ 各分量的次序。设得矢量为 $S(S_1, S_2, \dots, S_N)$ 。

7. 用 $(-\frac{2}{N+1})$ 去乘矢量 $S(S_1, S_2, \dots, S_N)$ 的各分量, 其结果即是所求的光谱分布矢量。令为 $x(x_1, x_2, \dots, x_N)$ 。

六, FHT 算法的验证

本节我们就 $N=2^3-1=7$ ($n=3$) 的情况, 分别用FHT和一般算法求解矢量方程(6)。

令: 给定的7个基本码为:

$$1110010 \quad (20)$$

则13个码为:

$$1110010111001 \quad (21)$$

从而得矢量方程:

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1110010 & x_1 \\ 1100101 & x_2 \\ 1001011 & x_3 \\ 0010111 & x_4 \\ 0101110 & x_5 \\ 1011100 & x_6 \\ 0111001 & x_7 \end{bmatrix} \quad (22)$$

令: $x(x_1, x_2, \dots, x_7)$ 表被测的7元光谱强度矢量。

$F_0(f_1, f_2, \dots, f_7)$ 表测得的初始测量矢量。

$S'(s'_0, s'_1, \dots, s'_7)$ 表被FHT作用后得到的矢量。

(一), 矢量方程(22)的FHT算法。

1. 构造置换 π_1 。

因 $[a_{ij}]$ 对称, 则有

$$\Lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = [a_{ij}]$$

= $[a_{ij}]$ 转置的头三行. (23)

因 $\pi_1(j) = p$, 而 $p = \alpha_{3j}\alpha_{2j}\alpha_{1j}$ (24)

则有: $j = 1$ 时 $p = 111 = 7$
 $j = 2$ 时 $p = 011 = 3$
 $j = 3$ 时 $p = 001 = 1$
 $j = 4$ 时 $p = 100 = 4$ (25)
 $j = 5$ 时 $p = 010 = 2$
 $j = 6$ 时 $p = 101 = 5$
 $j = 7$ 时 $p = 110 = 6$

2. 用 π_1 置换 $F_0(f_1, f_2, \dots, f_7)$ 的各分量, 得测量矢量:

$$F'_0(f_3, f_5, f_2, f_4, f_6, f_7, f_1) \quad (26)$$

3. 将(26)式增加一“0”分量得矢量

$$F(0, f_2, f_5, f_2, f_4, f_6, f_7, f_1) \quad (27)$$

4. 将(27)式运用FHT算法得:

$$S'(i) = S'(\mu_2, \mu_1, \mu_0) = 0$$

$$+ (-1)^{\mu_0} f_3 + (-1)^{\mu_1} f_5$$

$$+ (-1)^{\mu_1 + \mu_0} f_2 + (-1)^{\mu_2} f_4$$

$$+ (-1)^{\mu_2 + \mu_0} f_6 + (-1)^{\mu_2 + \mu_1} f_7 + (-1)^{\mu_2 + \mu_1 + \mu_0} f_1 \quad (28)$$

将 $\mu_j = 0$ 或1 ($j = 0, 1, 2$)的各种取值代入(28)式得:

$$S'(0) = S'(000) = f_3 + f_5 + f_2 + f_4 + f_6 + f_7 + f_1$$

$$S'(1) = S'(001) = -f_3 + f_5 - f_2 + f_4 - f_6 + f_7 - f_1$$

$$S'(2) = S'(010) = f_3 - f_5 - f_2 + f_4 + f_6 - f_7 - f_1$$

$$S'(3) = S'(011) = -f_3 - f_5 + f_2 + f_4 - f_6 - f_7 - f_1 \quad (29)$$

$$S'(4) = S'(100) = f_3 + f_5 + f_2 - f_4 - f_6 - f_7 - f_1$$

$$S'(5) = S'(101) = -f_2 + f_5$$

$$-f_2 - f_4 + f_6 - f_7 + f_1$$

$$S'(6) = S'(110) = f_3 - f_5 - f_2 - f_4 - f_6 + f_7 + f_1$$

$$S'(7) = S'(111) = -f_3 - f_5 + f_2 - f_4 + f_6 + f_7 - f_1$$

将(29)式中的 $S'(i)$ ($i = 1, 2, \dots, 7$)中的 f_j ($j = 1, 2, \dots, 7$)按递增次序排列得:

$$S'(1) = -(f_1 + f_2 + f_3 - f_4 - f_5 + f_6 - f_7)$$

$$S'(2) = -(f_1 + f_2 - f_3 - f_4 + f_5 - f_6 + f_7)$$

$$S'(3) = -(-f_1 - f_2 + f_3 - f_4 + f_5 + f_6 + f_7)$$

$$S'(4) = -(f_1 - f_2 - f_3 + f_4 - f_5 + f_6 + f_7) \quad (30)$$

$$S'(5) = -(-f_1 + f_2 + f_3 + f_4 - f_5 - f_6 + f_7)$$

$$S'(6) = -(-f_1 + f_2 - f_3 + f_4 + f_5 + f_6 - f_7)$$

$$S'(7) = -(f_1 - f_2 + f_3 + f_4 + f_5 - f_6 - f_7)$$

5. 构造置换 π_2 ,

因:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{整个}[a_{ij}]的转置} \quad (31)$$

1). 构造矩阵B

用置换 $\pi_1(j) = p$ 去置换矩阵A的列得矩阵B如下:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (32)$$

2). 构造矩阵C。

因C的第j列等于B的第 2^{j-1} ($1 \leq j \leq n$)列, 又因 $n=3$, 则得矩阵C为:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (33)$$

3). 构造置换 π_2 ,

因 $\pi_2(k) = p$

$$k = C_{p_3} C_{p_2} C_{p_1}$$

从而有:

当	$p = 1$	时	$k = 1$	
	$p = 2$	时	$k = 2$	
	$p = 3$	时	$k = 4$	
	$p = 4$	时	$k = 3$	(34)
	$p = 5$	时	$k = 6$	
	$p = 6$	时	$k = 7$	
	$p = 7$	时	$k = 5$	

因 π_2 的置换原则是: 置换后所得矢量的第p个分量值应等于被置换矢量的第k个分

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \end{pmatrix} \quad (37)$$

由(37)式得:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{4}(f_1 + f_2 + f_3 - f_4 - f_5 + f_6 - f_7) \\ x_2 &= \frac{1}{4}(f_1 + f_2 - f_3 - f_4 + f_5 - f_6 + f_7) \\ x_3 &= \frac{1}{4}(f_1 - f_2 - f_3 + f_4 - f_5 + f_6 + f_7) \\ x_4 &= \frac{1}{4}(-f_1 - f_2 + f_3 - f_4 + f_5 + f_6 + f_7) \\ x_5 &= \frac{1}{4}(-f_1 + f_2 - f_3 + f_4 + f_5 + f_6 - f_7) \\ x_6 &= \frac{1}{4}(f_1 - f_2 + f_3 + f_4 + f_5 - f_6 - f_7) \\ x_7 &= \frac{1}{4}(-f_1 + f_2 + f_3 + f_4 - f_5 - f_6 + f_7) \end{aligned} \quad (38)$$

量值。

6. 用得到的置换 π_2 去作用(30)式的7个分量, 并乘以 $-\frac{1}{4}$ 得:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{4}(f_1 + f_2 + f_3 - f_4 - f_5 + f_6 - f_7) \\ x_2 &= \frac{1}{4}(f_1 + f_2 - f_3 - f_4 + f_5 - f_6 + f_7) \\ x_3 &= \frac{1}{4}(f_1 - f_2 - f_3 + f_4 - f_5 + f_6 + f_7) \\ x_4 &= \frac{1}{4}(-f_1 - f_2 + f_3 - f_4 + f_5 + f_6 + f_7) \\ x_5 &= \frac{1}{4}(-f_1 + f_2 - f_3 + f_4 + f_5 + f_6 - f_7) \\ x_6 &= \frac{1}{4}(f_1 - f_2 + f_3 + f_4 + f_5 - f_6 - f_7) \\ x_7 &= \frac{1}{4}(-f_1 + f_2 + f_3 + f_4 - f_5 - f_6 + f_7) \end{aligned} \quad (35)$$

此(35)式即为所求的最后结果。

(二). 矢量方程(22)的一般代数解法。

因为(22)式的系数矩阵之逆为:

$$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (36)$$

从而有:

此(38)式即为所求的结果。

显然(38)式和(35)式一样, 从而验证了FHT算法的正确性。

在此工作中陈愈炽, 陈今涌同志认真审阅了全文, 韩志杰同志审阅了文中的算法, 在此仅致谢意。

考 参 文 献

[1] Marshall Hall, Jr, Combinatorial Theory p100, (1967) 下转22页

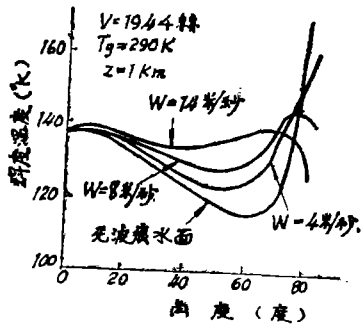


图15 海面的辉度温度

大的变化。图15为在19.4GHz的海面上测定其辉度温度的实例。把海洋表面所视察到的角度变化情况，以海洋上的风速作为参数来表示，这时候所得到的辐射率是由风速决定

的，除0.5外，取视场方向 50° ，这时的辐射率由于风速变化而变化的情况就更明瞭了。利用这样的无线电波，对海洋表面状态进行调查，是很广泛的，其实用效果也是很好的。

5. 结 束 语

以上介绍的主要是电磁波在遥感中的应用及应用原理。本文若对遥感爱好者多少有点参考价值的话，那作者就感到荣幸了。

译自日本《电视技术》Vol. 29, No. 3.

P164~170.1975

(王历 译 朱云青 校)

上接7页

geometrg of He three dimenrions, Cambridge unirerity kres, 1955, p.159.

- [VI] 例如：顾德门，J.W.；傅里叶光学导论，科学出版社，1976，p.226。
- [V] Hotekinge, H.H.；Waue Heorg of aberiatron, Clarendon press.1950.
- [IV] Steel, W. H.；Progrese in optics, vol V., p.157.
- [VII] 例如：查哈里也夫斯基，干涉仪，

上接14页

- [2] E, J, Watson, Math Comp 16, 368 (1962)

(顾去吾等译)，科学出版社，1966，P.190。

- [XII] 例如：Kocher, D.G., App. Optico 1972(11)1872.
- FOuèrè, J. C. and Malacara, D., App. Optico, 1974(13)2035.
- [IX] 例如：王之江，光学设计理论基础，科学出版社，1965，P.205.
- Maréchal, A.; Handrbuch der Physik, S—V.B.G—H, 1956, uot. 24, P.136.
- [3] E, D, Nelson and M, L, Fredman, Hadamard S; ecfroscopy J, (), S, A (p.1664)1970