

光谱仪凸轮计算及其程序

周秀良

本文介绍了光谱仪使用的光栅波数凸轮和棱镜波长凸轮的计算机程序，并结合实际凸轮计算说明该两种程序的应用，这将对解决光谱仪凸轮设计的复杂计算提供方便。

一 凸轮的作用

光栅方程式

$$\sin(i) + \sin(\theta) = \frac{m}{d \cdot w} \quad (1)$$

式中 i (入射角), θ (衍射角), $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$ (光谱级次), d (光栅常数), w (波数)。图 1 中 δ 为入射光线与衍射光线的夹角, 或称结构角。对于已经确定的光谱仪 δ 是一个常量, 因此可以 δ 的角分线为基线, 用光栅法线与基线的夹角 α 来描述光栅的转角。

如图 1, 设 $\alpha = \theta + \frac{\delta}{2}$, $\delta = i - \theta$, 代入(1)式可得到:

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{m}{2 \cdot d \cdot w} \cdot \cos\left(\frac{\delta}{2}\right)\right) \quad (2)$$

(2) 式表明光栅转角 α 和波数 w 之间是非线性关系。也就是当光栅匀速地转动时, 在单色器出射狭缝谱线的波数变化不是线性的。这对仪器使用者是不方便的。为了确定谱图上每一谱线的波数, 即按波数均匀分配的每一谱线的波数值, 可借助于满足一定要求的波数凸轮驱动光栅的转动来完成。

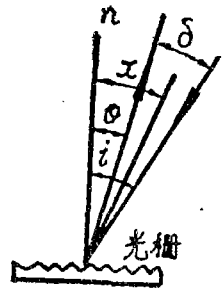


图 1

二 点接触的波数凸轮计算^[1]

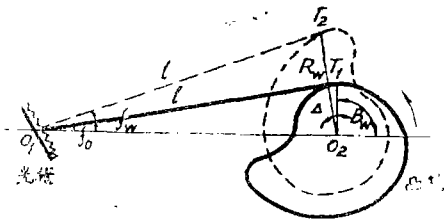


图 2

图 2. 点接触的凸轮工作示意图。 l (杠杆长度, 它等于凸轮和光栅转动中心之间的距离 O_1O_2 , 凸轮在转动过程中杠杆的端点 T_1 直接与凸轮接触); R_w (凸轮的矢径, 它是一个变量, 在起始波数 w_0 时的凸轮基圆半径为 r_{r0}); B_w (凸轮矢径 R_w 对应的凸轮角度, 在起始波数 w_0 时的凸轮角度为 b_0); f_w (杠杆 l 与 O_1O_2 之间夹角, 对应于 r_{r0} 的角度为 f_0)。

把 T_1 点的切线(T_1E)斜率用 $\tan(bbb)$ 表示, 由图 4 可见:

$$\tan(bbb) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (9)$$

式中, x_2, y_2, x_1, y_1 分别为滚轮中心点 T_1 轨迹上相邻两点的笛卡尔坐标值。

最后得到, 凸轮曲线 P_1 点的笛卡尔坐标表达式:

$$xx = x_1 - r \cdot \sin(bbb) \quad (10)$$

$$yy = y_1 - r \cdot \cos(bbb)$$

凸轮曲线 P_1 点的极坐标表达式:

$$R = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (11)$$

$$B = \arctan(yy/xx)$$

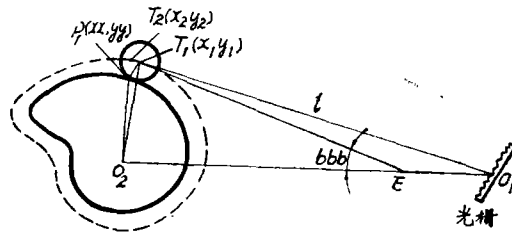


图 4

四 光栅波数凸轮程序及计算实例

综合上述公式, 用 *ALGOL* 语言按下列方框图编制了适用于503型电子计算机的计算程序*。用本程序与“北二光”按直接微分公式编制的程序计算结果核对后, 认为计算是可靠的。而且计算步长取密时计算精度还会提高。

红外光谱仪凸轮计算实例

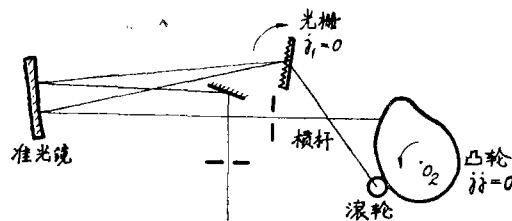


图 5 红外光谱仪凸轮工作示意图

输入的数据:

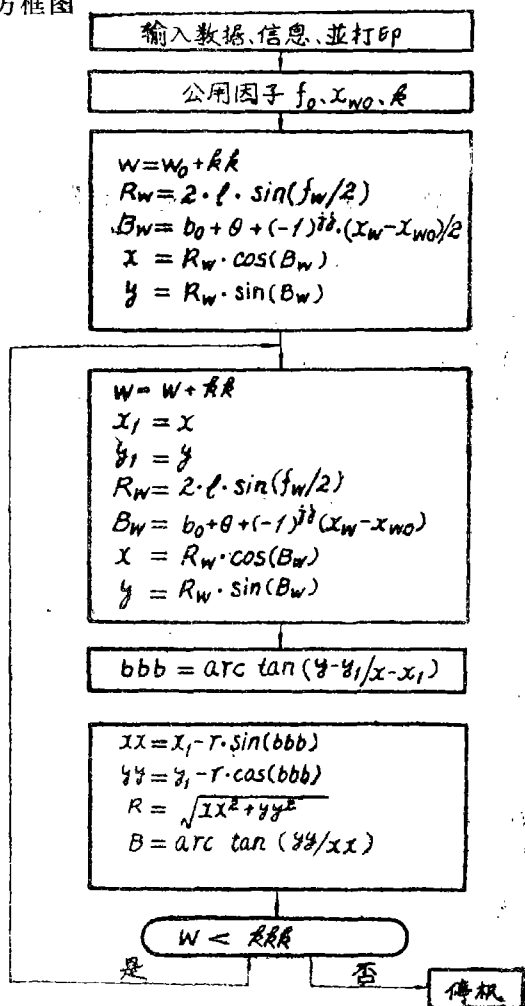
光栅常数 $d = 0.001$ 厘米;

入射光线与衍射光线的夹角 $\delta = 3.4$ 度;

杠杆长 $l = 160$ 毫米;

* 作者: 程序从略。

基圆半径 第一段 $r r_0 = 50$ 毫米;
 第二段 $r r_0 = 70.02$ 毫米;
 光谱级次 $m = 1$;
 起始波数 第一段 $w_0 = 4000$ 波数;
 第二段 $w_0 = 2000$ 波数;
 计算步长 $k k = -1$ 波数;
 凸轮转动信息 $i_i = 0$;
 凸轮起始角度 第一段 $b_0 = 0$ 度;
 第二段 $b_0 = 147.65$ 度;
 凸轮单位转角负担的波数
 第一段 $g = -13.88888$ 波数/度;
 第二段 $g = -6.94444$ 波数/度;
 凸轮转动信息 $j j = 0$;
 扫描终止波数 第一段 $k k k = 2000$ 波数;
 第二段 $k k k = 650$ 波数;
 滚轮半径 $r = 6.5$ 毫米。
 光栅波数凸轮程序方框图



实际计算结果摘录如下

波 长	x (毫米)	y (毫米)	R (毫米)	B
4000	43.5238	0.5587	43.5274	44'
3600	39.6383	22.8345	45.7451	29°56'
3200	24.7437	41.7462	48.5283	59°20'
2800	0.9946	52.1066	52.1138	88°54'
2400	-27.3423	49.9211	56.9185	118°42'
2000	-54.5109	32.9264	63.6835	148°52'
1600	-64.9311	-35.1936	73.8553	208°27'
1200	-0.9651	-91.1471	91.1522	269°23'
800	115.1544	-55.8349	127.9728	334°7'
680	149.2656	-11.1059	149.6782	355°44'

注：表中用了直角坐标 x (毫米), y (毫米) 和极坐标 R 、 B 表示同一凸轮曲线。

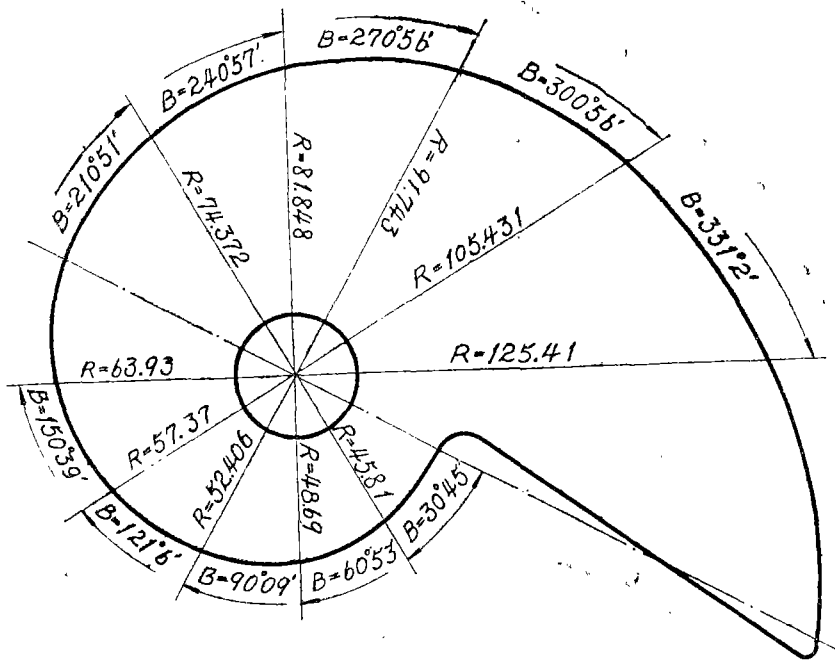


图6 红外光谱仪波数凸轮曲线

五 用于石英棱镜光谱仪点接触的波长凸轮计算

设杠杆长度为 l ，凸轮转动中心 O_2 与棱镜转动中心 O_1 间的距离亦为 l 。凸轮位于起始波长 λ 时，与之对应的凸轮基圆半径是 r_r ，并且杠杆 l 与中心线 O_1O_2 之间的夹角为 f_0 。

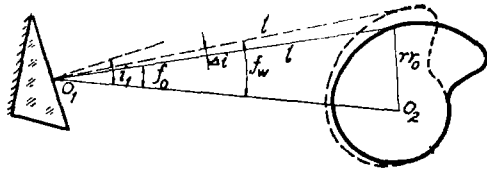


图 7

由图 7 可见给定 rr_0, l 以后, f_0 可由下式求得:

$$f_0 = 2 \cdot \text{arc sin}(rr_0/2 \cdot l) \quad (1)$$

由单色器入射狭缝投向棱镜的光束, 经过棱镜色散后被分解成按波长有秩序排列的谱, 为了在出射狭缝得到所需要的谱线, 可通过转动棱镜来实现。例如 $\lambda = \lambda_1$ 时, 入射光线与棱镜法线的夹角为 i_1 , 此时, λ_1 的谱线正好通过出缝; 当 $\lambda = \lambda_2$ 时, 入射光线与棱镜法线的夹角为 i_2 时, λ_2 的谱线方能通过出缝。由此可见, 在 λ_1 的谱线之后, 要想在出缝得到 λ_2 的谱线则必须使棱镜相应地转动一个角度 Δi 。

$$\text{设角度改变量 } \Delta i = i_2 - i_1 \quad (2)$$

为求得改变量, 下面推导 $\lambda = \lambda_1$ 时, 入射角 i_1 与折射率 n , 入射光线与出射光线夹角 δ 的关系式:

由图 8 可见

$$i_1 - i_3' = \delta \quad (3)$$

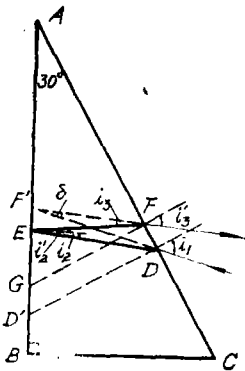


图 8

由折射定律得到

$$\sin(i_1) = n \cdot \sin(i_1') \quad (4)$$

$$\sin(i_3') = n \cdot \sin(i_3) \quad (5)$$

在三角形 $D'DE$ 中

$$i_1' = 30 + i_2 \quad (6)$$

在三角形 GFF' 中

$$i_2 = 30 - i_3 \quad (7)$$

由(6)与(7)式得到

$$i_1' = 60 - i_3$$

由(4)式得到

$$\sin(i_1) = n \cdot \sin(60 - i_3) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{n^2 - \sin^2(i_3)} - \frac{1}{2} \sin(i_3') \quad (8)$$

由上可见, 问题归结为求解下列方程组

$$i_1 - i_3 = \delta \quad (3)$$

$$\sin(i_1) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{n^2 - \sin^2(i_3')} - \frac{1}{2} \sin(i_3') \quad (8)$$

解(3)式得到

$$\sin(i_1) = \sin(\delta) \sqrt{1 - \sin^2(i_3')} + \cos(\delta) \cdot \sin(i_3') \quad (9)$$

由(8), (9)式得到

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{n^2 - \sin^2(i_3')} - \frac{1}{2} \cdot \sin(i_3') = \\ \sin(\delta) \cdot \sqrt{1 - \sin^2(i_3')} + \cos(\delta) \cdot \sin(i_3') \end{aligned} \quad (10)$$

设 $x = \sin(i_3')$, 代入(10)式, 移项合并得到

$$\left\{ \left[\sin^2(\delta) - \left(\frac{1}{2} + \cos(\delta) \right)^2 - \frac{3}{4} \right]^2 + 4 \cdot \sin^2(\delta) \left(\frac{1}{2} + \cos(\delta) \right)^2 \right\} x^4 + \left\{ 2 \left[\sin^2(\delta) - \left(\frac{1}{2} + \cos(\delta) \right)^2 - \frac{3}{4} \right] \cdot \left[\frac{3}{4} \cdot n^2 - \sin^2(\delta) \right] - 4 \cdot \sin^2(\delta) \left(\frac{1}{2} + \cos(\delta) \right)^2 + \left[\frac{3}{4} \cdot n^2 - \sin^2(\delta) \right]^2 \right\} = 0 \quad (11)$$

设 $A = \left(\frac{1}{2} + \cos(\delta) \right)^2$, $B = \frac{3}{4} \cdot n^2 - \sin^2(\delta)$, 代入(11)式得到

$$\left\{ \left[\sin^2(\delta) - A - \frac{3}{4} \right]^2 + 4 \cdot A \cdot \sin^2(\delta) \right\} x^4 + \left\{ 2 \left[\sin^2(\delta) - A - \frac{3}{4} \right] B - 4 \cdot A \cdot \sin^2(\delta) \right\} x^2 + B^2 = 0 \quad (12)$$

设 $y = x^2$, 代入(12)式最后得到

$$\left[\left(\sin^2(\delta) - A - \frac{3}{4} \right)^2 + 4 \cdot A \cdot \sin^2(\delta) \right] y^2 + \left[2 \cdot B \cdot \left(\sin^2(\delta) - A - \frac{3}{4} \right) - 4 \cdot A \cdot \sin^2(\delta) \right] y + B^2 = 0 \quad (13)$$

例如 取 $\lambda_1 = 0.00029$ 毫米、 $n_1 = 1.49078$ 、 $\delta = 10^\circ$, 代入上列公式得到, $i_1 = 53.3731$;
取 $\lambda_2 = 0.00059$ 毫米、 $n_2 = 1.458378$ 、 $\delta = 10^\circ$, 重复上面计算得到, $i_2 = 51.984$ 。最后将 i_1, i_2 的值代入(2)式, 得到棱镜转角 Δi 。式中, 若 f_λ 与 i 角地变化方向一致, 公式中取“+”号, 否则取“-”号。

由二. 公式(3)和(8)不难得到波长为 λ 时, 凸轮的矢径 R_λ 及凸轮的角度 B_λ :

$$R_\lambda = 2 \cdot l \cdot \sin\left(\frac{f_\lambda}{2}\right) \quad (14)$$

$$B_\lambda = b_0 + \theta \pm \Delta \quad (15)$$

式中, 附加角 $\Delta = (i_2 - i_1)/2$, 符号规定同上; $\theta = (\lambda - \lambda_0)/t$, 其中 t 是凸轮单位转角负担的波长; b_0 是凸轮的起始角度, 可以任意选定。

最后用笛卡尔坐标表示凸轮曲线坐标:

$$x_\lambda = R_\lambda \cdot \cos(B_\lambda) \quad (16)$$

$$y_\lambda = R_\lambda \cdot \sin(B_\lambda)$$

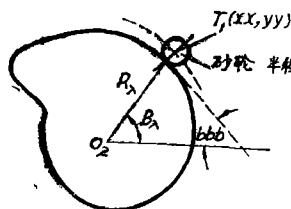


图 9

这种坐标表示, 用于数控机床加工凸轮是方便的。但是在用砂轮铣磨凸轮时, 则需要给出砂轮转动中心线 T_1 的轨迹曲线。

如图 9 凸轮曲线上 $T(x, y)$ 点的斜率:

$$bbb = \arctan\left(\frac{r \cdot y_{\lambda+1} - y_\lambda}{x_{\lambda+1} - x_\lambda}\right) \quad (17)$$

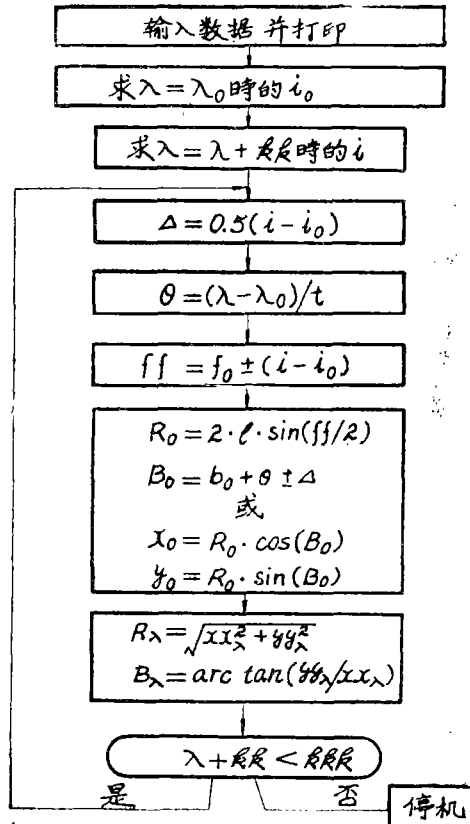
砂轮转动中心点 $T_1(x_1, y_1)$ 的轨迹用下式表示:

$$x_1 = x_\lambda + r_0 \cdot \sin(bbb) \quad (18)$$

$$y_1 = y_\lambda + r_0 \cdot \cos(bbb)$$

六、棱镜单色器点接触式凸轮计算实例

综合上述公式、按下列方框图编制了计算程序*。



输入数据

α (棱镜顶角) = 60° ;

ϕ (入射光线与出射光线的夹角) = 10° ;

kk (计算步长) = 0.00000015毫米;

kkk (终止波长) 第一段0.0008毫米;

第二段0.0025毫米;

$lamto$ (起始波长) 第一段0.0002毫米;

第二段0.0007998毫米;

t (凸轮单位转角负担的波长) 第一段0.000003174毫米/度;

* 作者: 程序从略。

第二段0.000012698毫米/度;

r_r 。(基圆半径) 第一段45毫米; 第二段67.2471毫米;

l (杠杆长度) = 300毫米;

j (凸轮转动信息) = 1;

jj (凸轮转动信息) = 1;

b_0 (凸轮起始角度) 第一段 0° ; 第二段 191.123° ;

r (砂轮半径) = 5毫米;

$lamto\ 1 (= lamto + kk)$ 第一段 0.00020015;

第二段 0.00020015;

计算结果省略。用该计算结果加工的凸轮已经用在自动光谱辐射计的棱镜单色器中。

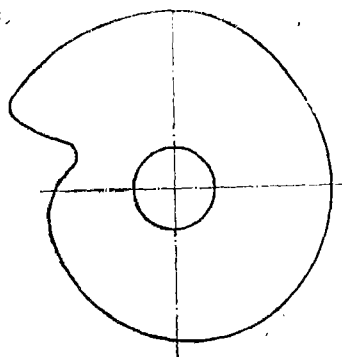


图10 棱镜单色器波长凸轮曲线

七 滚轮接触的波长凸轮计算

由五、公式 14, 15 可得到滚轮中心轴线 T_1 的坐标

$$R_\lambda = 2 \cdot l \cdot \sin \left[\frac{1}{2} (f_0 \pm (i - i_0)) \right] \quad (1)$$

$$B_\lambda = b_0 + \frac{\lambda - \lambda_0}{t} \pm (i - i_0) / 2 \quad (2)$$

给出滚轮半径 r_0 , 见图11三角形 $T_1 O_2 T$ 中

$$R_\lambda = \sqrt{R_\lambda^2 + r_0^2 - 2 \cdot R_\lambda \cdot r_0 \cdot \cos(bbb)} \quad (3)$$

式中 $\cos(bbb) = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(bbb)}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dR_\lambda/d\lambda}{R_\lambda \cdot \frac{dB_\lambda}{d\lambda}} \right)^2}}$$

求 $\frac{dR_\lambda}{d\lambda}$:

由五、推导 i, n, δ 和棱镜顶角 α 关系式中, 可证明下列公式成立:

$$n^2 = \sin^2(i) + [A \cdot \sin(i) - B \cdot \cos(i)]^2 \quad (4)$$

其中 $A = \frac{\cos(\alpha) + \cos(\delta)}{\sin(\alpha)} \quad (5)$

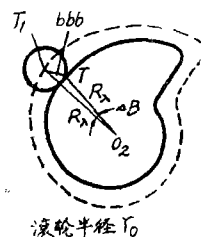
$$B = \frac{\sin(\delta)}{\sin(\alpha)} \quad (6)$$

$$n = \sqrt{\left(1 + \frac{a \cdot \lambda^2}{\lambda^2 - b} + \frac{c \cdot \lambda^2}{\lambda^2 - d} + \frac{e \cdot \lambda^2}{\lambda^2 - f} \right)} \quad (7)$$

式中 $a = 0.6961663$; $b = 4.67915 \times 10^{-8}$; $c = 0.4079426$;

$d = 1.351207 \times 10^{-8}$; $e = 0.8974794$; $f = 0.7934002 \times 10^{-5}$, 是石英玻璃

折射率 n 与波长 λ 关系式中的系数。



滚轮半径 r_0

图 11

对(1)式微分得到:

$$dR_\lambda = 2 \cdot l \cdot \cos\left(\frac{f_\lambda}{2}\right) \cdot \frac{di}{d\lambda} \quad (8)$$

对(4)式微分得到:

$$\frac{di}{dn} = \frac{n}{\cos(i) \cdot \sin(i) + [A \cdot \sin(i) - B \cdot \cos(i)][A \cdot \cos(i) + B \cdot \sin(i)]} \quad (9)$$

对(7)式微分得到:

$$\begin{aligned} \frac{dn}{d\lambda} = \lambda \left(1 + \frac{a \cdot \lambda^2}{\lambda^2 - b} + \frac{c \cdot \lambda^2}{\lambda^2 - d} + \frac{e \cdot \lambda^2}{\lambda^2 - f} \right)^{-\frac{1}{2}} & \left\{ \frac{a[(\lambda^2 - b) - \lambda^2]}{(\lambda^2 - b)^2} + \right. \\ & \left. \frac{c[(\lambda^2 - d) - \lambda^2]}{(\lambda^2 - d)^2} + \frac{e[(\lambda^2 - f) - \lambda^2]}{(\lambda^2 - f)^2} \right\} \quad (10) \end{aligned}$$

将(9), (10)式代入(8)式得到:

$$\begin{aligned} \frac{dR_\lambda}{d\lambda} = 2 \cdot l \cdot \cos\left(\frac{f_\lambda}{2}\right) \cdot & \frac{n}{\cos(i) \cdot \sin(i) + [A \cdot \sin(i) - B \cdot \cos(i)][A \cdot \cos(i) + B \cdot \sin(i)]} \cdot \\ \lambda \left(1 + \frac{a \cdot \lambda^2}{\lambda^2 - b} + \frac{c \cdot \lambda^2}{\lambda^2 - d} + \frac{e \cdot \lambda^2}{\lambda^2 - f} \right)^{-\frac{1}{2}} & \cdot \left\{ \frac{a[(\lambda^2 - b) - \lambda^2]}{(\lambda^2 - b)^2} + \right. \\ & \left. \frac{c[(\lambda^2 - d) - \lambda^2]}{(\lambda^2 - d)^2} + \frac{e[(\lambda^2 - f) - \lambda^2]}{(\lambda^2 - f)^2} \right\} \quad (11) \end{aligned}$$

求 $\frac{dB_\lambda}{d\lambda}$:

对(2)式微分得到:

$$\begin{aligned} \frac{dB_\lambda}{d\lambda} = \frac{1}{t} \pm \frac{1}{2} \cdot \frac{di}{d\lambda} & = \frac{1}{t} \pm \frac{1}{2} \frac{n}{\cos(i) \cdot \sin(i) + [A \cdot \sin(i) - B \cdot \cos(i)][A \cdot \cos(i) + B \cdot \sin(i)]} \cdot \\ \lambda \left(1 + \frac{a \cdot \lambda^2}{\lambda^2 - b} + \frac{c \cdot \lambda^2}{\lambda^2 - d} + \frac{e \cdot \lambda^2}{\lambda^2 - f} \right)^{-\frac{1}{2}} & \left\{ \frac{a[(\lambda^2 - b) - \lambda^2]}{(\lambda^2 - b)^2} + \right. \\ & \left. \frac{e[(\lambda^2 - f) - \lambda^2]}{(\lambda^2 - f)^2} \right\} \quad (12) \end{aligned}$$

求 B :

由图9可见

$$B = B_\lambda \pm \angle B = B_\lambda \pm \arccos[(R_\lambda^2 + R_\lambda^2 - r_0^2)/2 \cdot R \cdot R_\lambda] \quad (13)$$

到此为止得到了用(3)和(13)式极坐标表示的凸轮曲线坐标。也可用笛卡尔坐标表示:

$$xx = R_1 \cdot \cos(B)$$

$$yy = R_1 \cdot \sin(B)$$

(14)

综合上述公式编制了棱镜—滚轮接触的波长凸轮程序*。

最后,在本程序编制与核对过程中,得到韩之杰、陈今涌、杜春耕同志的帮助在此深表感谢。

由于水平所限,文中会有不当之处,欢迎指正。

参 考 文 献

物理光学仪器, 1978年 1 期

* 作者程序从略