

# 弹塑性接触问题的分析方法

姜晋庆 竺润祥 尚世英

(西北工业大学)

**摘要**通过元件间局部接触表面来传递外力的组合结构应用相当广泛,然而由于接触问题的非线性,使分析求解比较困难。近年来随着高速计算机的发展,采用有限元法分析接触问题的文献日趋增多。本文利用有限元法提出一种同时包含有接触问题和弹塑性问题的非线性结构分析方法,并编制了相应的计算程序。在处理接触问题时采用了Conry提出的带有接触条件的单纯形法;在处理弹塑性问题时采用了适用于小变形的全量理论;而编制的计算程序同时考虑了这两类不同性质的非线性影响,将它们有机地组合在一起。为校验方法与程序的可靠性,对典型Hertz问题作了计算,结果与经典解一致。在此基础上进而分析了插入式接头,计算表明结果是合理的。由此可见,本文提供的方法与计算程序可供今后研究弹塑性接触问题时参考。

## 一、引言

许多实用结构体系中,元件的组合仅仅通过局部的接触表面以实现力的传递,如齿轮啮合、轴承传动与飞行器各舱段连接区等,这类问题都属于接触问题。在接触问题中,一方面接触表面随所传递的力的大小而改变,进而使接触应力随之变化,显示了接触问题的非线性力学特性;另一方面,接触区往往存在着应力集中现象,局部区域材料先进入塑性状态,从而产生另一类所谓材料非线性问题,它的出现又会引起接触表面和接触应力的重新分布。因此,如何综合考虑同时包含有接触问题和弹塑性问题的结构体系很久以来一直是力学工作者所关心的问题之一。

经典的弹性理论<sup>[1]</sup>仅对简单形体的弹性接触问题提供了解析解。Л. А. Гални<sup>[2]</sup>在他的著作中系统地阐述了一些常用简单形体的弹性接触问题,而对局部材料进入塑性状态的接触问题,仅提供了近似的简化计算方法。

高速计算机的发展及与之配合的有限元法的出现,为数值分析复杂形体的弹塑性接触问题提供了有力的工具。近年来,用有限元法解决弹性接触问题已有大量文献,如[3]、[4]、[5]、[6],它们从不同角度提供了一些有效的分析方法。值得提一下的是T. F. Conry在文献[6]中指出将弹性接触问题转化成线性规划的标准形式,然后用带有接触条件的单纯形法求出接触应力和刚体接近量等接触状态的参数,这样避免了一般采用有限元法处理接触问题时所出现的迭代过程,简化了计算。

本文在Conry提出的单纯形法基础上进而考虑材料进入塑性状态后的情况,这样可以比较准确地求出各种真实结构在弹塑性接触条件下的应力分布,而又不致使计算过于繁琐。本文提供的方法具有普遍意义,它既适于一般存在有弹塑性接触问题的结构分析,又适于单独

存在有弹塑性问题或单独弹性接触问题的结构分析。所给出的公式及程序是用于平面应变模型的，但不难推广到平面应力模型和一般三维空间结构中去。为了校验，应用本程序计算了典型的Hertz接触问题，并与解析解作了比较，证明了方法与程序的可靠性。然后，对一插入式承力接头实例进行了应力分析，取得了合理的结果。可见，整个方法完全适用于工程中所遇到的弹塑性接触问题。

## 二、塑性理论

塑性理论主要讨论二个问题。其一是材料在何时开始进入塑性，即所谓屈服准则问题。本文采用V. Mises准则（见文献〔7〕），也就是结构某一点处的相当应力 $\sigma_i$ 达到某一定值时该处的材料开始进入塑性，这一定值可由材料单向拉伸试验所确定的屈服极限 $\sigma_s$ 提供。而相当应力的数学表达式为

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2] + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} \quad (2-1)$$

在平面应变状态下，上式简化为

$$\sigma_i = \sqrt{(1 - \mu + \mu^2)(\sigma_x^2 + \sigma_y^2) - (1 + 2\mu - 2\mu^2)\sigma_x\sigma_y + 3\tau_{xy}^2} \quad (2-1')$$

因此，V. Mises准则可表示为：当 $\sigma_i = \sigma_s$ 时，材料进入塑性状态， $\sigma_i < \sigma_s$ 时，该点仍处于弹性状态。

考虑到在有限元位移法计算中一旦位移分布求出后便可按几何关系直接求出各单元应变，所以采取以相当应变 $\varepsilon_i$ 达到某一定值（其值可取为 $\sigma_s/E$ ）来判定材料开始进入塑性状态更为方便，相当应变 $\varepsilon_i$ 的数学表达式为

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{2(1 + \mu)} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)} \quad (2-2)$$

在平面应变状态下，上式简化为

$$\varepsilon_i = \frac{1}{2(1 + \mu)} \sqrt{4(\varepsilon_x^2 - \varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_y^2) + 3\gamma_{xy}^2} \quad (2-2')$$

塑性理论讨论的第二个问题是材料进入塑性状态后的应力应变关系。目前有两种比较成熟的理论，即增量理论（流动理论）和全量理论（变形理论）来分别表达应力应变关系，许多文献（例如〔7〕、〔8〕、〔9〕、〔10〕）对这两种理论作了详细介绍并加以评述，这里不再赘述。由于全量理论公式简单，使用方便，尤其适用于附有接触问题的迭代形式，所以本文首先考虑采用全量理论。我们也注意到，应用全量理论对于外加载荷有一定的限制，这就是所谓的“简单加载条件”<sup>〔10〕</sup>。由于接触区应力变化呈非线性，这样，接触问题显然是不满足“简单加载条件”。但是，正如李敏华、王仁在总结塑性应力应变关系的理论时指出<sup>〔11〕</sup>：“很多人的实验证明，在离开简单加载相当大的范围的复杂加载和在变形相当大的情况下，变形理论仍可适用。”杨南生也指出<sup>〔12〕</sup>：“对于加载过程中应力分量无一减少的复杂加载，在变形的塑性程度较小时应用变形理论没有明显的误差。”考虑到在接触问题中加载过程是满足诸应力分量无一减少的条件，而这时塑性区又被周围的弹性区所包围，其塑性程度一般不

会很大，所以我们认为采用全量理论不会带来很大误差。作为本文的续篇，我们将采用增量理论研究弹塑性接触问题。

全量理论的应力应变关系为（见[10]）

$$\{\sigma'\} = \frac{2E_D'}{3}\{\varepsilon'\} \quad (2-3)$$

式中 $\{\sigma'\}$ 、 $\{\varepsilon'\}$ 分别代表应力偏量和应变偏量的列矢量。而 $E_D'$ 为进入塑性后偏分量的变形关系中的相当弹性模量。一旦某一单元的应力状态（或应变状态）确定之后便可由（2-1）式（或（2-2）式）求出相当应力 $\sigma_i$ （或相当应变 $\varepsilon_i$ ）。在这里顺便指出，对进入塑性的单元在应用（2-1）或（2-2）式时其材料的泊桑比应取为 $\mu_p$ ，其值应为介于 $\mu$ 与 $0.5$ 之间的某个值，可按以下公式

$$\mu_p = 0.5 - (0.5 - \mu) \frac{\sigma_s}{\sigma_i} \quad (2-4)$$

取定。当 $\sigma_i$ 或 $\varepsilon_i$ 求出后，按材料的单向拉伸试验的 $\sigma-\varepsilon$ 曲线便可求出 $E'$ （见图1）。这里 $E'$ 为材料进入塑性后的相当弹性模量，由于其中包含有球形分量的变形关系，所以必须从中剔除才能求得 $E_D'$ ，其关系式为

$$E_D' = \frac{E}{\frac{E'}{E} - \frac{1-2\mu}{3}} \quad (2-5)$$

全量理论的基本公式除（2-3）式外还有

$$\varepsilon_{c,p} = \frac{1-2\mu}{E} \sigma_{c,p} \quad (2-6)$$

式中 $\varepsilon_{c,p}$ 、 $\sigma_{c,p}$ 分别表示平均应力和平均应变。由应力、应变的偏量和球量的定义，可将（2-3）式改写成

$$\{\sigma\} = \frac{2E_D'}{3} \left( \{\varepsilon\} - \begin{pmatrix} \varepsilon_{c,p} \\ \varepsilon_{c,p} \\ \varepsilon_{c,p} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} \sigma_{c,p} \\ \sigma_{c,p} \\ \sigma_{c,p} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

将（2-6）式代入，经整理后，上式便可化为

$$\{\sigma\} = [D]_p \{\varepsilon\} \quad (2-7)$$

式中

$$\{\sigma\} = [\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z \ \tau_{xy} \ \tau_{yz} \ \tau_{zx}]^T$$

$$\{\varepsilon\} = [\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \varepsilon_z \ \gamma_{xy} \ \gamma_{yz} \ \gamma_{zx}]^T$$

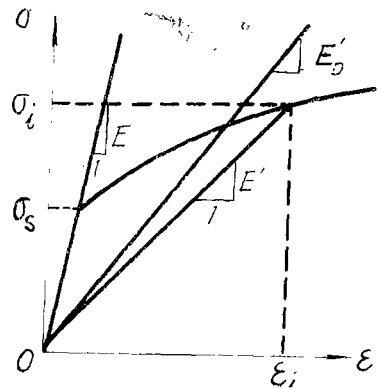


图1

$$[D]_p = \begin{pmatrix} \frac{E}{3(1-2\mu)} + \frac{4E_{d'}}{9} & \frac{E}{3(1-2\mu)} - \frac{2E_{d'}}{9} & \frac{E}{3(1-2\mu)} - \frac{2E_{d'}}{9} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{E}{3(1-2\mu)} + \frac{4E_{d'}}{9} & \frac{E}{3(1-2\mu)} - \frac{2E_{d'}}{9} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{E}{3(1-2\mu)} + \frac{4E_{d'}}{9} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{2E_{d'}}{3} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{2E_{d'}}{3} & 0 \\ & & & & & \frac{2E_{d'}}{3} \end{pmatrix}$$

对 称

(2-8)

称(2-8)式为弹塑性矩阵,它相当于在弹性状态下的弹性矩阵 $[D]$ ,代表了在塑性状态下的应力应变关系。由于(2-8)式中各元素包含有相当弹性模量 $E_{d'}$ ,而 $E_{d'}$ 在整个塑性变形阶段中不再是常数,而与当时的应力水平有关,所以说塑性状态下的应力应变关系不再是线性的。

在平面应变状态下弹塑性矩阵表达式为

$$[D]_p = \begin{pmatrix} \frac{E}{3(1-2\mu)} + \frac{4E_{d'}}{9} & \frac{E}{3(1-2\mu)} - \frac{2E_{d'}}{9} & 0 \\ & \frac{E}{3(1-2\mu)} + \frac{4E_{d'}}{9} & 0 \\ & & \frac{2E_{d'}}{3} \end{pmatrix} \quad \text{对 称} \quad (2-8')$$

对于小变形情况,几何矩阵 $[B]$ 仍成立。这样,一旦 $[D]_p$ 确定,其它的计算步骤完全与弹性状态下的有限元法步骤相同,不再在这里赘述。

### 三、接触理论

接触理论是研究物体之间通过接触而实现力的传递的现象。具体来说,在已知初始接触状态条件下,对接触体系施加一定外载荷,计算接触面的大小、接触应力的分布(包括法向正压力和切向摩擦力)和刚体接近量等参数。

为简化计算,本文只考虑平面应变状态的两个接触物体 $\Omega_1$ 和 $\Omega_2$ ,在单一方向外载荷(法向表面载荷)作用下,产生法向接触应力的情况,如图3-1所示。同时采用下述假设:

1. 接触物体的材料是各向同性的。
2. 变形是微小的,并且接触点对在变形过程中,上下始终一一相对应。
3. 接触表面光滑,且具有一阶连续导数。

4. 忽略切向摩擦。

5. 单调加载条件，即加载过程中无卸载情况。

在初始接触区及其周围（合称可能接触区）将接触体 $\Omega_1$ 、 $\Omega_2$ 离散化成接触点对（如图2—1上点1、2、…… $n$ ），这样，由于外载作用在接触区上产生的分布压力可用离散的节点接触力来代替。可能接触区的任一点对 $k$ 在变形后必须满足以下接触条件，即其弹塑性变形和初始距离之和必须大于或等于刚体接近量（见图3）。

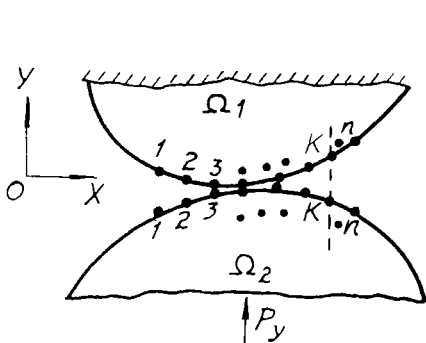


图2

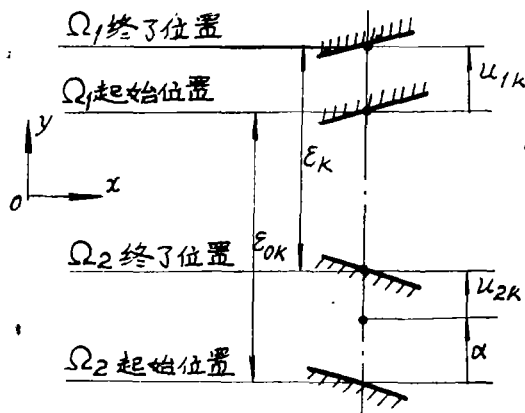


图3

其数学表达式为

$$\epsilon_k = \epsilon_{0k} + u_{1k} - u_{2k} - \alpha \quad (3-1)$$

式中， $\epsilon_{0k}$ 是 $k$ 点对的初始间距； $u_{1k}$ 、 $u_{2k}$ 分别是各物体 $k$ 点的弹塑性位移； $\alpha$ 是刚体接近量； $\epsilon_k$ 则是物体刚体位移和弹塑性变形后 $k$ 点对的间距，它当然必须大于等于零。将全部可能接触点对的(3-1)式写成矩阵形式，则为

$$\{e\} = \{\epsilon_0\} + \{u_1\} - \{u_2\} - \alpha\{e\} \quad (3-1')$$

式中 $\{e\}$ 为单位列矢量。

由矩阵位移法原理可知

$$\{u_1\} = [F_1]\{R_1\}$$

$$\{u_2\} = [F_2]\{R_2\}$$

式中 $[F_1]$ 、 $[F_2]$ 为 $\Omega_1$ 、 $\Omega_2$ 对应于可能接触节点的柔度矩阵，它是由材料的性质决定的，可以从表征材料应力水平的相当总刚阵求逆得到； $\{R_1\}$ 、 $\{R_2\}$ 则为接触节点力，并有 $\{R_1\} = -\{R_2\}$ ，若以 $\Omega_1$ 为基准，记 $\{R_1\} = \{R\}$ ， $[F_1] + [F_2] = [F]$ ，则(3-1')式可改写作为典型的接触问题的位移协调方程，即

$$\{e\} = \{\epsilon_0\} + [F]\{R\} - \alpha\{e\} \quad (3-2)$$

作用在各分散点上的力 $R_k$  ( $k=1, 2, \dots, n$ )的总和必须等于法向外载荷 $P$ 。所以平衡条件可以写作

$$\sum_{k=1}^n R_k = P \quad (3-3)$$

同时，对可能接触区各节点来说，只有接触时才存在接触力。即

$$\left. \begin{aligned} R_k &\geq 0 \quad (\text{当 } \varepsilon_k = 0 \text{ 时}) \\ R_k &= 0 \quad (\text{当 } \varepsilon_k > 0 \text{ 时}) \end{aligned} \right\} \quad (3-4)$$

一般称(3-4)式为接触准则。

这样，接触问题就是求一组解 $(\{R\}, \alpha, \{\varepsilon\})$ ，使它满足上述条件（即(3-2)、(3-3)、(3-4)式），或改写为

$$\left. \begin{aligned} \text{连续条件} \quad & -[F]\{R\} + \alpha\{e\} + [I]\{\varepsilon\} = \{e_0\} \\ \text{平衡条件} \quad & \{e\}^T \{R\} = P \\ \text{接触准则} \quad & \left. \begin{aligned} R_k &\geq 0 \quad (\text{当 } \varepsilon_k = 0 \text{ 时}) \\ R_k &= 0 \quad (\text{当 } \varepsilon_k > 0 \text{ 时}) \end{aligned} \right\} (k=1, 2, \dots, n) \\ \text{非负性约束} \quad & R_k \geq 0, \varepsilon_k \geq 0, \alpha \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-5)$$

文献[6]详细介绍了(3-5)式用单纯形法求解的过程，其实质也就是按文献[13]提供的解一般线性规划的计算方案和流程进行，只是在判定进入基底的条件中增加(3-4)式的接触准则，在此不再赘述。

#### 四、弹塑性接触问题

对于弹塑性问题一般采用非线性数值方法求解，即把非线性问题化作一系列线性的近似计算，不断迭代以逼近真实解。文献[14]、[15]、[16]给出了各种迭代方案。为了配合全量理论，本文采用割线刚度迭代法，即在每次迭代过程中，均加以全部外载荷，按当时各单元达到的应力水平来确定其材料性质（弹性或塑性），即求出对应的弹性或弹塑性矩阵和刚度矩阵，组合成总体刚度矩阵，求出本次迭代过程所得的位移及应力分布，以作为下一次迭代的初始数据（第一次迭代所需的初始数据可按全部是弹性单元计算而得）。有关公式如下：

单元刚度矩阵

$$\left. \begin{aligned} [K]^e &= \int_0 [B]^T [D]_p [B] dv \quad (\text{塑性单元}) \\ [K]^e &= \int_0 [B]^T [D] [B] dv \quad (\text{弹性单元}) \end{aligned} \right\} \quad (4-1)$$

单元应变列阵

$$\{e\}^e = [B]\{u\}^e \quad (4-2)$$

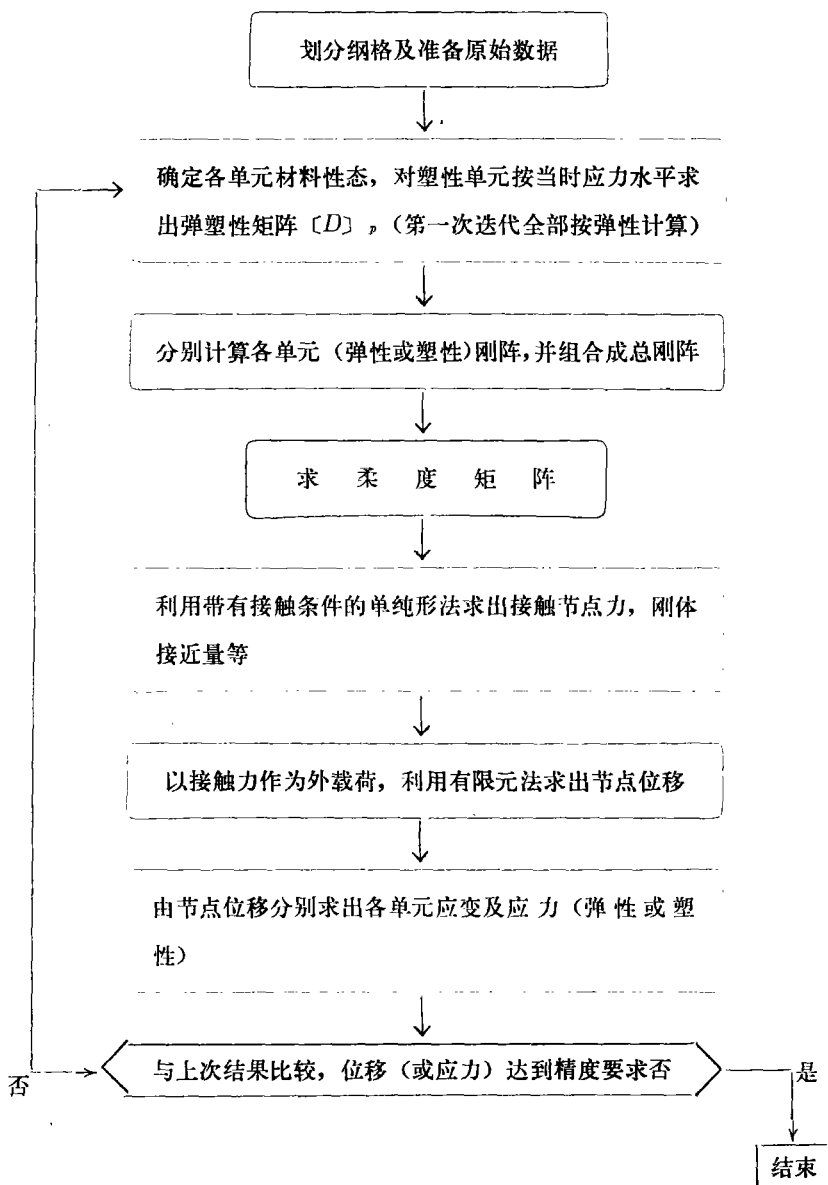
单元应力列阵

$$\left. \begin{aligned} \{\sigma\}^e &= [D]_p \{e\}^e \quad (\text{塑性单元}) \\ \{\sigma\}^e &= [D] \{e\}^e \quad (\text{弹性单元}) \end{aligned} \right\} \quad (4-3)$$

对于弹性接触问题，非线性性质局限于接触区附近。采用线性规划的单纯形法实质上是对各极点进行选择以找到满足接触条件的一组接触参数的迭代过程。由于材料性态不发生变

化，所以调用一次单纯形法即可求得所要求的解答。

对于弹塑性接触问题，求解过程要繁琐得多。我们知道，在外载一定条件下，只有当各单元的材料性态一定时（即柔度矩阵为定值）才有唯一的一组与之相对应的接触参数。当局部材料进入塑性后，性态发生改变，反过来又影响到接触区的应力分布和各单元的应力状态，从而使某些单元的材料性态进一步发生变化，所以需要对接触状态和材料性态进行双重迭代。有效地组织好这双重迭代的次序对提高计算效率，节省机时会产生很大的影响。我们所采用的基本计算流程框图如下，这是以割线刚度法为基础而编制的。计算表明当进入塑性的程度不大时这一方法比较有效，一般在迭代6次以下便可达到1%的误差精度要求。当进入塑性的程度较大时这种方法收敛太慢，可采用该文所介绍的“改进的割线刚度法”来加快其收敛速度，或对原基本计算流程稍作修改而采用“初应力法”，即可大为节省机时。我们按以下基本流程框图编制了相应的计算程序，采用 *FORTRAN-IV* 语言，适用于 *FELIX*



## 五、计算例题

### 两圆柱体接触问题 (Hertz问题)

为了校核提供的方法和计算程序的正确性,首先计算了两个柱体的接触问题(图4)。各原始参数取值如下:半径 $R_1 = R_2 = R = 1$ 毫米,外载荷 $P = 10$ 公斤/毫米,材料均为钢,其弹性模量 $E = 20400$ 公斤/毫米<sup>2</sup>,屈服限 $\sigma_s = 85$ 公斤/毫米<sup>2</sup>,强度限 $\sigma_b = 100$ 公斤/毫米<sup>2</sup>,最大延伸率 $\delta = 0.12$ ,应力应变曲线采用双线性形式。

认为圆柱体呈平面应变受力状态。考虑到对称性可取1/4柱体。划分成三角形单元,计有61个单元,44个节点(如图5所示)。接触节点对数 $n = 9$ (图上标出的节点1—5)。

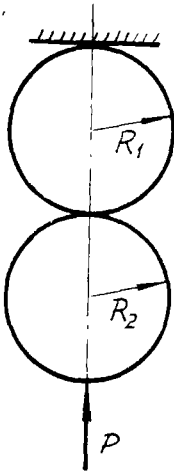


图4

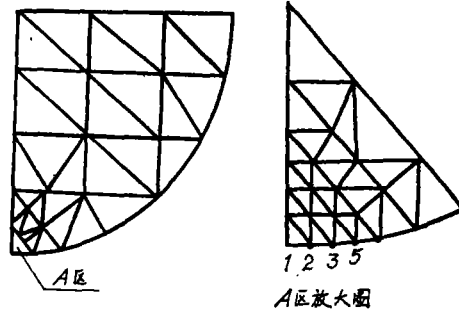


图5

首先,令全部单元处于弹性状态,将上述数据按规定格式作为原始数据进行运算,求出了接触区宽度、接触压力及接触区应力的分布,并与理论解进行比较(见表1及图6),可见结果与Hertz理论解十分接近。

表1

分 类		最大接触压力 $q_r$ (公斤/毫米 <sup>2</sup> )	接触区宽度 $b$ (毫米)	刚体接近量 $\alpha$ (毫米)
弹 性	解 析 解	266	0.0239	0.00270
	计 算 结 果	267	0.0235	0.00237
弹塑性计算结果		222	0.031	0.00257
说 明		其中刚体接近量的解析解按[17]给出的公式求得,其余解析解按[1]给出的公式求得		

然后,考虑材料进入塑性状态后的情况。图6上的带“o”虚线给出了进行塑性迭代后接触压力分布和接触区应力分布变化情况,图7则给出了由于考虑材料进入塑性状态后应力分

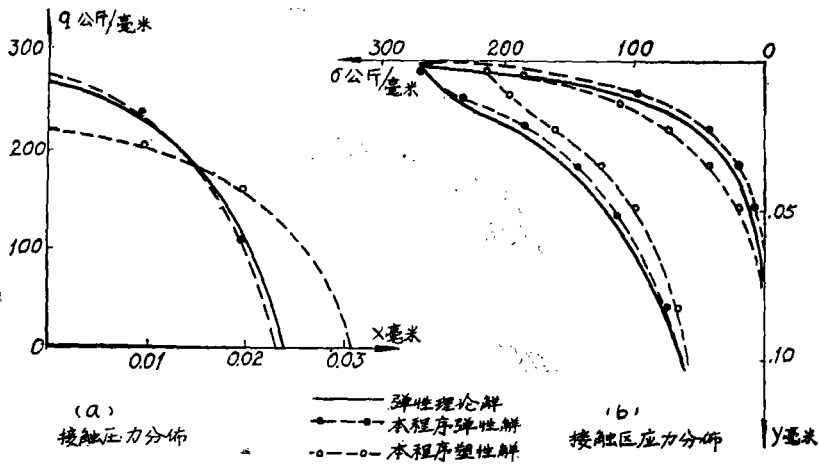


图 6

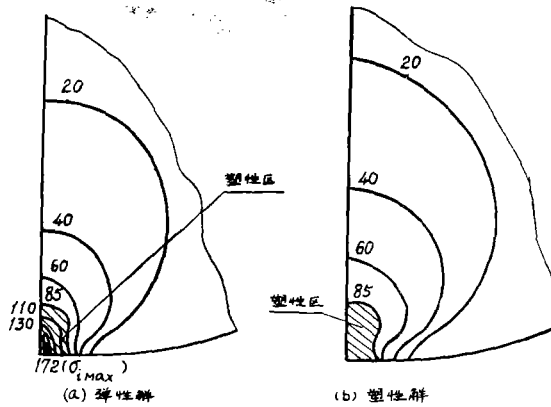


图 7

布（这里为相当应力  $\sigma_i$ ）和塑性区的变化情况。由图可见当考虑材料塑性之后其塑性区稍有扩大而其最大应力则被均匀化了。所以说其塑性区域的分布及其增长过程均属合理。上述计算的精度要求为两次迭代位移结果最大误差不超过 1%。在材料进入塑性后迭代 7 次便得到了满意结果（每次迭代需 55 秒左右）。

综合本例题计算结果可以看出，应用本程序进行弹性接触计算结果正确，考虑塑性后迭代过程收敛性好，消费机时较少，结果合理。由此可见，本文提供的方法与程序能满足一般工程上弹塑性接触问题的需要。

#### 参 考 文 献

1. 铁摩辛柯, 古地尔; “弹性理论”, 人民教育出版社, 1964, 8.
2. Л. А. 加林; “弹性理论的接触问题” 科学出版社, 1958, 8.
3. S. K. Chan, I. Stubs; Int. J. mech. Sci 1971, 13, 615—625.
4. T. Tsute, S. Yamaji; Proceedings of the 1973 Tokyo Seminar on Finite Element Analysis.
5. 陈万吉; 大连工学院学报, 1979, 2.

6. T.F.Conry A. Scireg; "A Mathematical Programming Method for Design of Elastic Bodies in Contact" JAM ASME 1971 38 № 2 387—390.
  7. R.Hill, "The Mathematical Theory of Plasticity" 1950.
  8. 鹭津久一郎; "塑性论" 上海科技出版社, 1961.
  9. O. Hoffman, G. Sachs; "工程塑性理论基础", 中国工业出版社. 1964
  10. A. A. 伊留辛; "塑性", 建筑工程出版社, 1958.
  11. 李敏华、王仁; 力学学报, 1958, 2, 第1期, 2.
  12. 杨南生; 力学学报, 2, 第1期, 1958, 1.
  13. Dantzig, G. W; "Linear Programming and Extensions"
  14. J. H. Argyris, D.W. Schapf; «ISD Report No. 105» University of stuttgart, 1971.
  15. C.S. 德赛, J. F. 阿贝尔; "有限元素法引论", 科学出版社, 1978.
  16. 李大潜等; "有限元素法续讲", 科学出版社, 1979.
  17. J. Roark, C. Young; "Formulas for stress and strain" 1975, 517.
-