

气体静压球轴承的计算

刘 瞰 刘育华

(哈尔滨工业大学)

气体轴承具有回转精度高，摩擦力极小的优点。特别是球型气体静压轴承，可以提供三个方向的回转自由度。在卫星姿态模拟和其他装置中应用极广。本文是总结了我们的分析设计此类轴承的经验并提供了一种可行的工程计算方法。

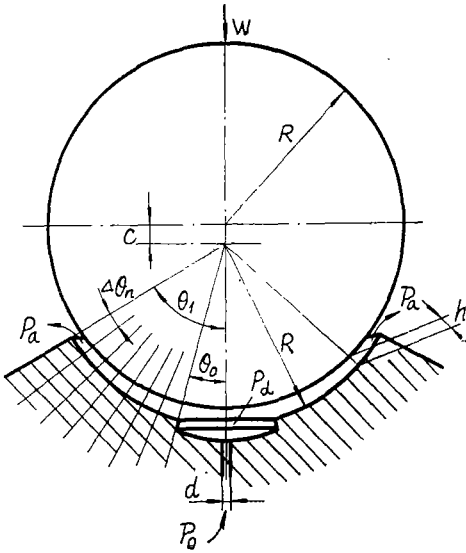


图 1—1

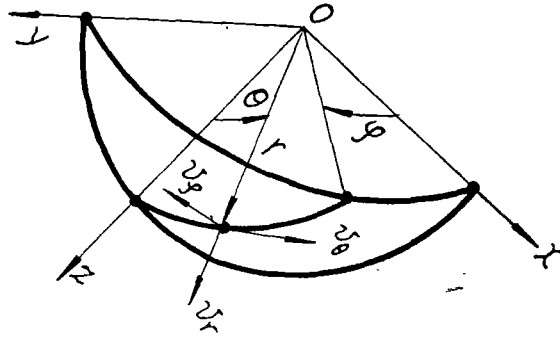


图 1—2

一、第一类球轴承的理论分析

第一类球轴承的结构形式如图 1—1 所示。在其下端中部有一节流孔，孔的前端为一气室槽，球及球窝具有相同的半径 R 。

基本假设：

球面坐标系如图 1—2 所示。由于雷诺数 Re 比较低，所以气体在气膜中的流动认为是层流亚音速无惯性的定常流动。由于流动系相对 Z 轴对称并由于气膜厚度远较其它方向尺寸为小，认为速度 $v_\phi = v_r = 0$ 。气体的粘性系数与温度、压力无关。气膜中气体的变化过程为等温过程。由于小阻尼孔长度比较短，摩擦力较小，故认为是绝热过程。

在气膜中流动的气体厚度非常小，按上述假设，气膜中气体流动的运动方程中除 $\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2}$

外, 都为相对高阶小量^[5], 且压力 p 只为 θ 角的函数。因此, 气膜中气体流动的运动方程可写成

$$\frac{dp}{d\theta} = \eta r \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0 \dots\dots\dots (2)$$

上述式中 p 为气膜中的压力, η 为气体粘性系数, v_θ, v_φ, v_r 分别为气体沿 θ, φ, r 方向上的分速度。

气体在气膜中流动的质量流量为

$$\dot{m} = \int_R^{R+h} 2\pi r \sin\theta \rho v_\theta dr \dots\dots\dots (3)$$

由于 $\frac{\partial p}{\partial r} = 0$ 及状态方程 (7) 易知, ρ 在 r 方向上为常数。所以

$$\dot{m} = 2\pi \sin\theta \rho \int_R^{R+h} r v_\theta dr \dots\dots\dots (4)$$

R 与 h 如图 1-3 所示。

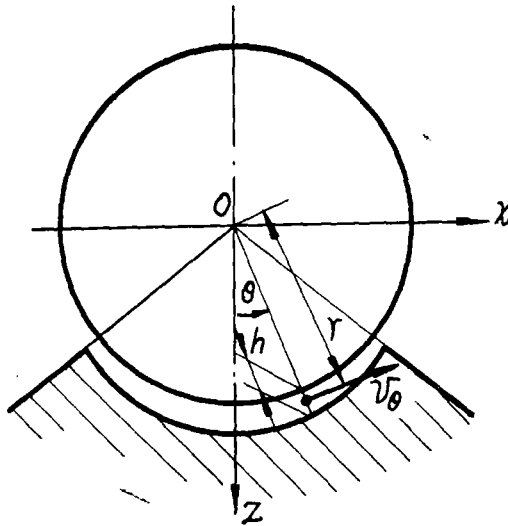


图 1-3

气体流经阻尼小孔的质量流量方程为

$$\dot{m} = \phi A p_0 \sqrt{\frac{2}{T_0 R_0}} \psi \dots\dots\dots (5)$$

$$\psi = \begin{cases} \left\{ \frac{K}{K-1} [\beta^{21K} - \beta^{(K+1)/(K-1)}] \right\}^{1/2}, & (\beta \geq \beta_K \text{ 时}) \\ \left[\frac{K}{2} \left(\frac{2}{K+1} \right)^{(K+1)/(K-1)} \right]^{1/2}, & (\beta < \beta_K \text{ 时}) \end{cases}$$

其中: ϕ 为修正系数, 一般取 0.8 左右; A 为节流孔截面积; T_0 及 R_0 为气体绝对温度和气体常数。 $\beta = p_a / p_0$, p_0 及 p_a 为气源及节流孔出口的压力值; K 为气体比热比。节流孔的临界压力比 β_K 为

$$\beta_K = \left(\frac{2}{K+1} \right)^{K/(K-1)} \quad \dots \quad (6)$$

根据等温假设, 气体状态方程为

$$\frac{p}{\rho} = \frac{p_a}{\rho_a} \quad \dots \quad (7)$$

p_a 及 ρ_a 为环境压力和密度。

以上共有(1)、(4)、(5)、(7)四个基本方程式, 其未知量也为四个(v_θ 、 \dot{m} 、 ρ 、 p), 方程可解。

现将(1)式乘 dr^2 对 r 积分二次。注意到 $r \gg h$, 积分时可认为 r 为常量而提出于积分号之前并利用边界条件: 在 $r=R, r=R+h$ 处 $v_\theta = 0$ 。得到

$$v_\theta = -\frac{1}{2\pi r} \frac{dp}{d\theta} (r-R)(h-r+R) \quad \dots \quad (8)$$

将式(8)代入(4)式进行积分, 并考虑到式(7)则有

$$\dot{m} = -\frac{\pi \sin\theta h^3 \rho_a}{6\eta p_a} p \frac{dp}{d\theta} \quad \dots \quad (9)$$

将上式 p 和 θ 分列方程两端, 再积分得

$$\frac{p^2}{2} = -\frac{6 \dot{m} \eta p_a}{\pi \rho_a} \int \frac{d\theta}{h^3 \sin\theta} + D \quad \dots \quad (10)$$

其中 D 为积分常数。而右端积分式可利用近似关系式 $h = c \cdot \cos\theta$ 代入。 c 为球体起浮量。这样

$$\int \frac{d\theta}{h^3 \sin\theta} = \frac{1}{c^3} \left[\ln(\operatorname{tg}\theta) + \frac{1}{2\cos^2\theta} \right] \quad \dots \quad (11)$$

利用边界条件: $\theta = \theta_1$ 处 $p = p_a$ 来确定积分常数 D , 从而得到气膜中的压力表达式

$$p^2 = p_a^2 - \frac{12 \dot{m} \eta p_a}{\pi \rho_a c^3} \left[\ln(\operatorname{tg}\theta) + \frac{1}{2\cos^2\theta} - \ln(\operatorname{tg}\theta_1) - \frac{1}{2\cos^2\theta_1} \right] \quad \dots \quad (12)$$

当 $\theta = \theta_0$ 时 $p = p_a$, 又得到节流孔出口的压力 p_a

$$p_a^2 = p_a^2 - \frac{12 \dot{m} \eta p_a}{\pi \rho_a c^3} \left[\ln(\operatorname{tg}\theta_0) + \frac{1}{2\cos^2\theta_0} - \ln(\operatorname{tg}\theta_1) - \frac{1}{2\cos^2\theta_1} \right] \quad \dots \quad (13)$$

从(12)和(13)中消去括号前的系数, 则可得到

$$p^2 = p_a^2 + (p_a^2 - p_a^2) \frac{\ln(\operatorname{tg}\theta) + \frac{1}{2\cos^2\theta} - \ln(\operatorname{tg}\theta_1) - \frac{1}{2\cos^2\theta_1}}{\ln(\operatorname{tg}\theta_0) + \frac{1}{2\cos^2\theta_0} - \ln(\operatorname{tg}\theta_1) - \frac{1}{2\cos^2\theta_1}} \quad \dots \quad (14)$$

在 $|\theta| \leq \theta_0$ 的范围内, 由于气室槽的气膜厚度远远大于其他地方的气膜厚度 h , 则气室槽内的压力可以认为是不变的, 且与 p_a 相等。所以, 正个轴承的承载能力为

$$W = \int_0^{\theta_0} (p_d - p_a) \pi R^2 \sin 2\theta d\theta + \int_{\theta_0}^{\theta_1} (p - p_a) \pi R^2 \sin 2\theta d\theta$$

或
$$W = \pi R^2 [(p_d \sin^2 \theta_0 - p_a \sin^2 \theta_1) + \int_{\theta_0}^{\theta_1} p \sin 2\theta d\theta \dots \dots \dots (15)$$

上式的积分很难得出解析解表达式,为了适于手算,下面给出一种近似积分方法。将 θ_0 到 θ_1 间的角度分成 n 等分,每一份为 $\Delta\theta_n = \frac{\theta_1 - \theta_0}{n}$ (见图1-1),每一等份上的压力认为是不变的,其值等于这等份中点上的压力值。这样可将(15)式积分求出,因而轴承的承载能力为

$$W = \pi R^2 \{ p_d^2 \sin^2 \theta_0 - p_a^2 \sin^2 \theta_1 + \sin \Delta\theta_n \sum_{i=1}^n p_i \sin [2\theta_0 + (2i-1)\Delta\theta_n] \} \dots \dots \dots (16)$$

其无因次承载能力表达式为

$$C_w = \frac{W}{\pi R^2 p_a} = \left\{ \frac{\beta}{\sigma} \sin^2 \theta_0 - \sin^2 \theta_1 + \frac{1}{\sigma} \sin \Delta\theta_n \sum_{i=1}^n \delta_i \sin [2\theta_0 + (2i-1)\Delta\theta_n] \right\} \dots \dots \dots (17)$$

其中: $\sigma = p_a/p_0$; $\delta_i = p_i/p_0$, p_i 为第 i 等分中点的压力,可用 $\theta = \theta_0 + (n - \frac{1}{2})\Delta\theta_n$ 代入(14)式求得。

气体轴承的另一个重要指标为刚度 K_w ,其物理意义为单位位移引起的承载能力的变化量,即

$$K_w = \frac{dW}{dC} \dots \dots \dots (18)$$

在计算时可用差分代替微分

$$K_w = \frac{\Delta W}{\Delta C} \dots \dots \dots (19)$$

上述计算中, $\beta(p_d)$ 尚未求得。为求该量将(5)式代入(13)式可得

$$\frac{\beta^2 - \sigma^2}{\sigma \psi} = \zeta \dots \dots \dots (20)$$

其中

$$\zeta = -\frac{12\eta}{\pi} \sqrt{\frac{2}{p_a \rho_a}} \frac{\phi A}{c^3} \left[\ln(\operatorname{tg} \theta_0) + \frac{1}{2\cos^2 \theta_0} - \ln(\operatorname{tg} \theta_1) - \frac{1}{2\cos^2 \theta_1} \right] \dots \dots \dots (21)$$

由于无论对任何一种静压气浮轴承都可以求得形如(20)式的表达式,因此称该式为通

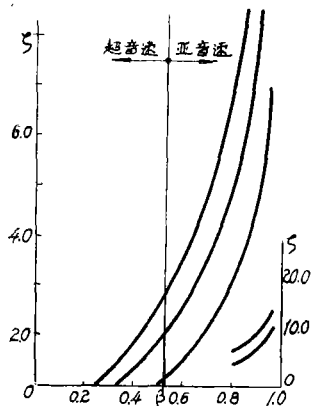


图 1-4

用曲线计算式⁽¹⁾。有了通用曲线计算式 (20) 之后, 任一类型的静压气体轴承的计算问题均可划分为两大步骤: ①依据轴承的具体结构形式, 使用的气体性质等参数, 经 (20) 式求得轴承工作点的 β 值; ②根据求得的 β 值和各类轴承导出的类似于 (15) 式的表达式计算该轴承的承载能力。可见 (20) 式使计算工作条理化了。图 (1-4) 示出了通用曲线的形状, 可由 ζ 值直接查出 β 值, 以免求解 (20) 式。

对不同的轴承, (21) 式有着不同的表述形式, (21) 式又可分为三部份数组计算, 即

$$f_1 = \frac{\phi A}{c^3},$$

$$f_2 = \frac{12\eta}{\pi} \sqrt{\frac{2}{p_a \rho_a}},$$

$$f_3 = \left[\ln(\operatorname{tg} \theta_0) + \frac{1}{2\cos^2 \theta_0} - \ln(\operatorname{tg} \theta_1) - \frac{1}{2\cos^2 \theta_1} \right]$$

所以

$$\zeta = -f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \dots \dots \dots (22)$$

对不同的轴承, (22) 式 f_2 都是相同的, 但 f_1, f_3 则不同。 f_1 中的参数只与气膜和节流孔尺寸有关, 所以称为气流通道系数; f_2 为工作介质参数的函数, 故称为介质系数 (对于标准状态下的空气, 其值为 268×10^{-6} 毫米); f_3 和结构形式及其尺寸有关, 称为结构系数。对于各类不同的轴承, f_3 的函数形式相差较多, 而 f_1 则变化不大。

在计算轴承性能时, 我们可以根据结构尺寸, 气膜通道的参数及工作介质, 计算出 f_1, f_2, f_3 。利用公式 (20) 解出 β 值, 从而可由 (16) 或 (17) 式算出承载能力 W 或其系数 C_w 。改变轴承起浮量 C 之后, 经同样的方法算出新的 W 值或 C_w 值。并可用 (19) 式计算出对应于各 C 值的刚度 K_w 。比较各 K_w 值, 便可求出其最大值。

上述计算较为精确但仍很繁琐。在初步估算这类轴承性能时, 还可以采用下述近似办法: 假设气体压力在气膜中与 θ 角成线性关系, 即认为在节流孔出口直到 $\theta = \theta_0$ 处气体压力为 p_a , 然后随 θ 角线性变化到轴承边缘 $\theta = \theta_1$ 处, 此处气体压力为 p_a , 所以

$$p = \begin{cases} p_a & (\theta < \theta_0) \\ p_a - (p_a - p_a) \frac{\theta - \theta_0}{\theta_1 - \theta_0} & (\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1) \end{cases} \dots \dots \dots (23)$$

把该式代入 (15) 式中, 经推导求得

$$W = \pi R^2 \left(\frac{p_a - p_a}{2} \right) \left[1 - \frac{\sin 2\theta_1 - \sin 2\theta_0}{2(\theta_1 - \theta_0)} \right] \dots \dots \dots (24)$$

或写成无因次承载能力系数

$$C_w = \frac{1}{2} \left(\frac{\beta}{\sigma} - 1 \right) \left[1 - \frac{\sin 2\theta_1 - \sin 2\theta_0}{2(\theta_1 - \theta_0)} \right] \dots \dots \dots (25)$$

经实际计算证实，此法所得结果与前一种方法比较，误差在10%以内，而计算量却很小。

二、第二类球轴承的理论分析

此类轴承结构如图 2—1 所示。其特点为节流孔共有 n 个，沿顶角为 θ_0 的锥面均匀分布。因此气体在压力为 p_0 的气源推动下，经过 n 个节流孔流入气膜，压力下降为 p_a ，然后分为两路：一路向外，在顶角为 θ_2 的锥面处以质量流量 \dot{m}_2 流入周围大气；另一路则向内，在顶角为 θ_1 的锥面处以质量流量 \dot{m}_1 流入周围大气。两气流在流入大气时，压力都下降至大气压力 p_a 。

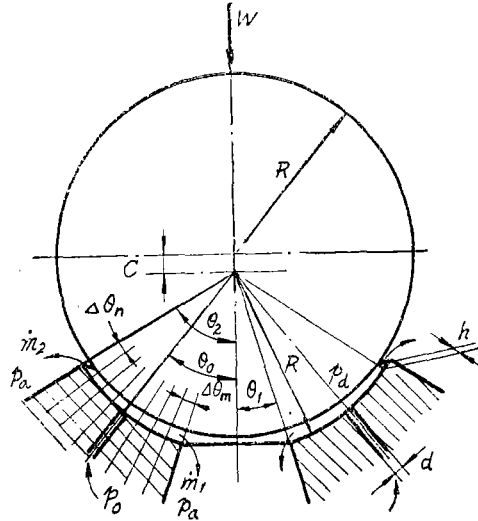


图 2—1

此类轴承仍用前节的基本方程式求解。运动方程的解仍为(8)式，但质量流量方程有两个，利用前面相同的方法可得：

$$\dot{m}_1 = \frac{\pi \sin \theta h^3 \rho_a}{6 \eta p_a} p \frac{dp}{d\theta} \quad (\theta_1 < \theta < \theta_0) \quad \dots\dots\dots (2-1)$$

$$\dot{m}_2 = \frac{\pi \sin \theta h^3 \rho_a}{6 \eta p_a} p \frac{dp}{d\theta} \quad (\theta_0 < \theta < \theta_2) \quad \dots\dots\dots (2-2)$$

应用上述类似的方法，便可得到气膜中的压力表达式：

$$p^2 = p_a^2 + (p_0^2 - p_a^2) \frac{\ln(\operatorname{tg} \theta) + \frac{1}{2 \cos^2 \theta} - \ln(\operatorname{tg} \theta_1) - \frac{1}{2 \cos^2 \theta_1}}{\ln(\operatorname{tg} \theta_0) + \frac{1}{2 \cos^2 \theta_0} - \ln(\operatorname{tg} \theta_1) - \frac{1}{2 \cos^2 \theta_1}} \quad (\theta_1 < \theta < \theta_0) \quad \dots\dots\dots (2-3)$$

$$p^2 = p_a^2 + (p_0^2 - p_a^2) \frac{\ln(\operatorname{tg} \theta) + \frac{1}{2 \cos^2 \theta} - \ln(\operatorname{tg} \theta_2) - \frac{1}{2 \cos^2 \theta_2}}{\ln(\operatorname{tg} \theta_0) + \frac{1}{2 \cos^2 \theta_0} - \ln(\operatorname{tg} \theta_2) - \frac{1}{2 \cos^2 \theta_2}}$$

$$(\theta_0 < \theta < \theta_2) \dots \dots \dots (2-4)$$

承载能力 W 为

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_0} (p - p_a) 2\pi R^2 \sin\theta \cos\theta d\theta$$

$$+ \int_{\theta_0}^{\theta_2} (p - p_a) 2\pi R^2 \sin\theta \cos\theta d\theta$$

经简化后得

$$W = -\pi R^2 [p_a (\sin^2 \theta_2 - \sin^2 \theta_1) - \int_{\theta_1}^{\theta_0} p \sin 2\theta d\theta$$

$$- \int_{\theta_0}^{\theta_2} p \sin 2\theta d\theta] \dots \dots \dots (2-5)$$

或写成无因次形式

$$C_w = \frac{W}{\pi R^2 p_a} = \int_{\theta_1}^{\theta_0} \frac{\delta}{\sigma} \sin 2\theta d\theta + \int_{\theta_0}^{\theta_2} \frac{\delta}{\sigma} \sin 2\theta d\theta$$

$$- (\sin^2 \theta_2 - \sin^2 \theta_1) \dots \dots \dots (2-6)$$

和前节一样，可以用差分方法简化积分，即把 θ_1 至 θ_0 分成 m 等分 ($\Delta\theta_m = \frac{\theta_0 - \theta_1}{m}$)，而将 θ_0 至 θ_2 分为 n 等分 ($\Delta\theta_n = \frac{\theta_2 - \theta_0}{n}$)，每等分内的压力视为不变，利用前节相同的方法可得：

$$C_w = \sin \Delta\theta_m \sum_{i=1}^m \frac{\delta_i}{\sigma} \sin [2\theta_1 + (2i-1)\Delta\theta_m]$$

$$+ \sin \Delta\theta_n \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\sigma} \sin [2\theta_0 + (2i-1)\Delta\theta_n]$$

$$- (\sin^2 \theta_2 - \sin^2 \theta_1) \dots \dots \dots (2-7)$$

同样，我们还可以导出压力 p 随 θ 线性变化时的简化计算。此时压力为

$$p = p_a - (p_a - p_0) \frac{\theta - \theta_0}{\theta_2 - \theta_0} \quad (\theta_0 < \theta < \theta_2) \dots \dots \dots (2-8)$$

$$p = p_a - (p_a - p_0) \frac{\theta - \theta_0}{\theta_1 - \theta_0} \quad (\theta_1 < \theta < \theta_0) \dots \dots \dots (2-9)$$

承载能力为

$$W = \pi R^2 \left[2 - \frac{\sin 2\theta_0 - \sin 2\theta_1}{2(\theta_0 - \theta_1)} - \frac{\sin 2\theta_2 - \sin 2\theta_0}{2(\theta_2 - \theta_0)} \right] \frac{p_a - p_0}{2} \dots \dots \dots (2-10)$$

承载能力系数为

$$C_w = \frac{1}{2} \left(\frac{\beta}{\sigma} - 1 \right) \left[2 - \frac{\sin 2\theta_0 - \sin 2\theta_1}{2(\theta_0 - \theta_1)} - \frac{\sin 2\theta_2 - \sin 2\theta_0}{2(\theta_2 - \theta_0)} \right] \dots \dots \dots (2-11)$$

上述计算中的 $\beta(p_a)$ 值的求解可仿照前节方法进行, 其结果⁽³⁾是

$$\frac{\beta^2 - \sigma^2}{\sigma\psi} = \xi$$

而

$$\xi = -f_1 \cdot f_2 \cdot f_3$$

$$f_1 = \frac{12\eta}{\pi} \sqrt{\frac{2}{p_a \rho_a}}$$

$$f_2 = \frac{\phi A n}{c^3}$$

(n 为节流孔个数)

$$f_3 = \frac{\ln(\operatorname{tg}\theta_2) + \frac{1}{2\cos^2\theta_2} - \ln(\operatorname{tg}\theta_1) - \frac{1}{2\cos^2\theta_1}}{\ln(\operatorname{tg}\theta_0) + \frac{1}{2\cos^2\theta_0} - \ln(\operatorname{tg}\theta_1) - \frac{1}{2\cos^2\theta_1}} \cdot \frac{1}{\ln(\operatorname{tg}\theta_0) + \frac{1}{2\cos^2\theta_0} - \ln(\operatorname{tg}\theta_2) - \frac{1}{2\cos^2\theta_2}}$$

轴承的刚度也和前节计算相同, 不重述。

由于电子计算机在工程计算上提供了方便, 因此, 本文还以数字计算机直接计算(15)式, 求得比较精确的数字解。现以第一类轴承计算为例, 编制了计算框图及计算机程序, 并做了一些具体的计算。

为计算方便, 编写了几个过程:

1. 计算 $\xi = \frac{\beta^2 - \sigma^2}{\sigma\psi}$ 过程 $FRTI(\beta)$

当假设一个 β 值时, 利用本过程计算 ψ 和 $\xi = \frac{\beta^2 - \sigma^2}{\sigma\psi}$, 后者用于下一过程从方程 $\xi -$

$$\frac{\beta^2 - \sigma^2}{\sigma\psi} = 0$$

中解 β 值。将结果送进 $FRTI(\beta) \leftarrow \xi - \frac{\beta^2 - \sigma^2}{\sigma\psi}$ 。

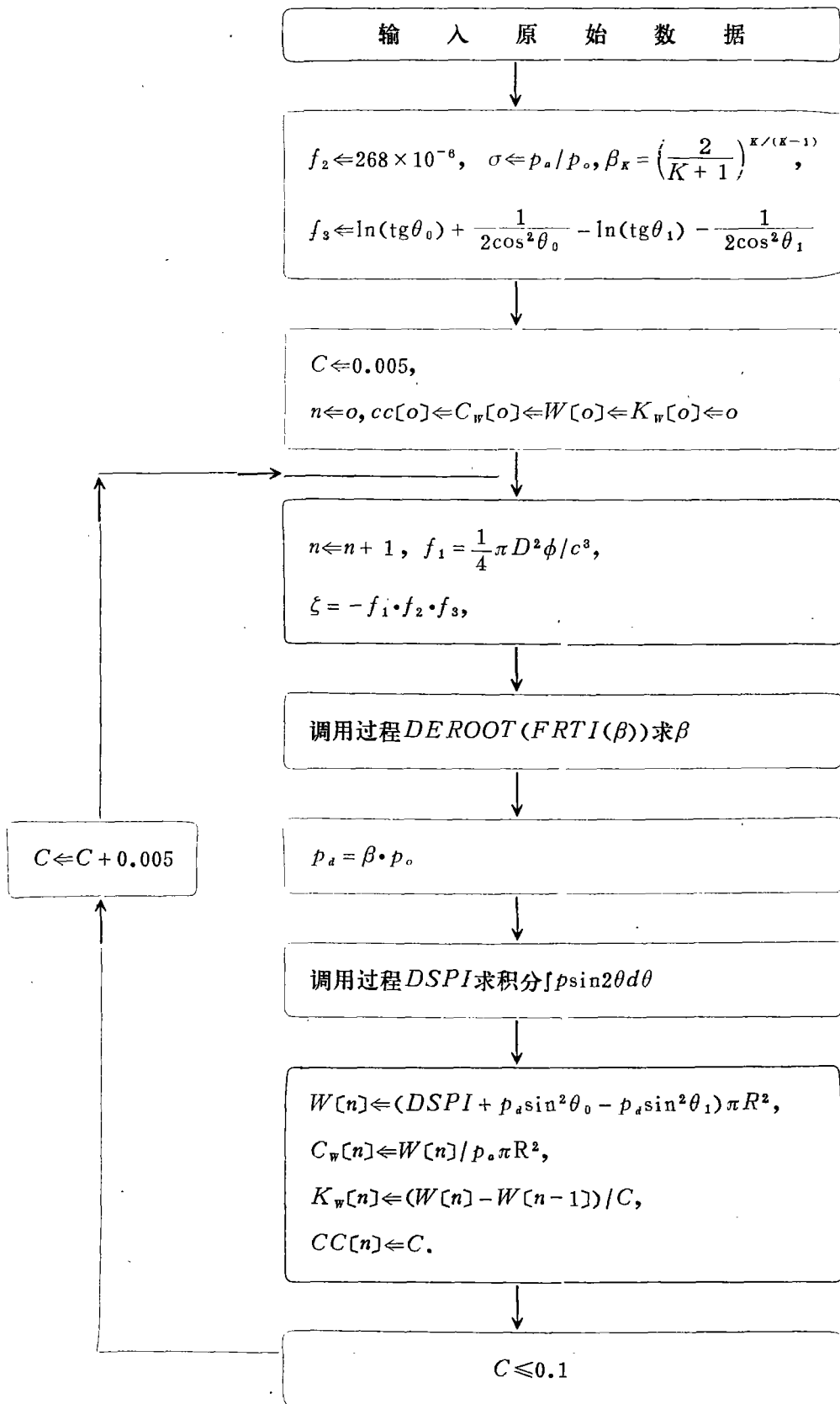
2. 求解方程 $\xi - \frac{\beta^2 - \sigma^2}{\sigma\psi} = 0$ 的过程 $DEROOT$:

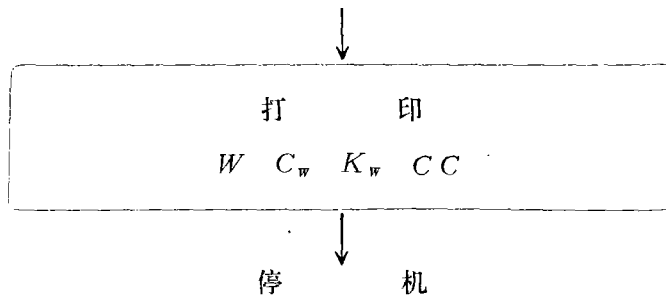
利用给定的数值计算 ξ 及假定的 β 值求出上面过程计算结果 $FRTI(\beta)$, 使 β 变步长变化, 以使 $FRTI(\beta)$ 值趋于零(或小于给定的小量 ϵ), 此时, β 即为方程的解, 将其值送给 $ROOT \leftarrow \beta$ 。

3. $TQ-16$ 数字计算机库过程“辛卜生积分” $DSPI$ 。利用该库过程编制了 $\int p \sin 2\theta d\theta$ 过程。

起浮量 C 从0.005计算起, 步长0.005, 计算到 $C = 0.1$ 为止。

计算框图为





W : 承载能力, C_w : 承载能力系数, K_w : 刚度, CC : 起浮量。

根据上面计算框图, 用 *ALGOL* 语言编制了计算程序, 并在 *TQ-16* 计算机上进行了计算。设 $R = 100$ 毫米, $\phi = 0.8$, $K = 1.4$, $p_a = 1$ 公斤/厘米², $p_s = 3$ 公斤/厘米², $\theta_0 = 12^\circ$, $\theta_1 = 50^\circ$, $d = 0.3, 0.4, 0.5, \dots$ 进行计算, 结果见图 2-2。

从计算结果可看出, 随着起浮量的增加, 承载能力由大变小, 而气膜刚度则由小变大而后再变小。对于一个固定的 d 值, 可得一相对应的最大刚度值、相应的起浮量和承载能力。此工作点为静态最佳工作点。当 d 变化时, 最佳工作点要变化。

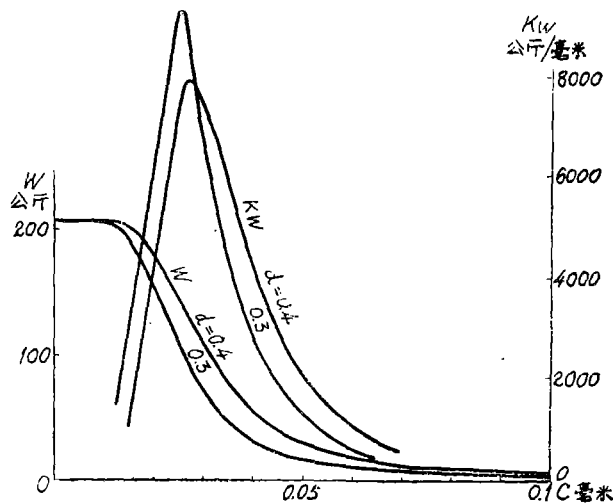


图 2-2

参 考 文 献

1. 刘曦、王以德、吴广玉, 外压气浮轴承承载能力的计算, 哈工大技术情报资料室, 1974.
2. “7191”项目总体设计组, 几种气浮轴承的静载计算方法(提要)和计算结果, 1973.
3. 刘曦, 常用气体静压轴承承载能力计算, 哈工大科学研究报告第四期, 1979.
4. 石原智男等, 油压工学ハンドブック, 38-48, 84-85, 朝倉書店1972.
5. V. N. Constan, Gas Lubrication 15-25, The American Society of Mechanical Engineers, 1969.