

基本干涉场及全息成象

周 万 治

摘要 本文认为下面五种非定域干涉场是干涉领域里的基本干涉场,即:平面波和发散球面波的干涉场,平面波和会聚球面波的干涉场,发散球面波和发散球面波的干涉场,发散球面波和会聚球面波的干涉场以及平面波和平面波的干涉场。着重分析了前四种干涉场的空间分布和性质,给出表示每种干涉场的标准方程。在干涉场的记录方面,说明了干涉场和干涉图形之间的关系以及每种干涉图形的性质。然后,比较四种干涉图形,得出它们在径向分布上的共同点和在纵向分布上的不同点。由共同点得出:在非涅尔近似条件下,四种干涉场所形成的干涉图都可以认为是波带片或全息透镜,并且分析了它们的成象性质。由不同点的分析得出,理想全息成象应满足两个条件,即:衍射成象条件和反射成象条件。最后,分析了干涉场的形状对平面全息图记录位置的影响。

干涉场从空间分布情况来看,可分为定域干涉和非定域干涉。定域干涉的干涉场具有一定的形状和范围,非定域干涉则不同,它能充满相干光所能同时达到的整个空间。一般来讲,全息术中的干涉场,基本上属于非定域干涉场。最简单的非定域干涉场可以认为是由以下五种情况产生的(假定满足相干条件):

1. 平面波和发散球面波的干涉;
2. 平面波和会聚球面波的干涉;
3. 发散球面波和发散球面波的干涉;
4. 发散球面波和会聚球面波的干涉;
5. 平面波和平面波的干涉。

我们称这五种干涉场是干涉术里的基本干涉场。它们具有确定形状的空间分布,在全息术和干涉术里经常遇到它们。从应用角度来看,它们可以用来确定干涉仪或干涉光路的调整状态,可以做为一般干涉场分析的基础。在全息术里,可以用它们分析全息成象关系,还可以通过它们制做全息成象元件——全息透镜。下面,我们分析前四种干涉场,第五种干涉场的形状是众所周知的(空间平面),故从略。

一、基本干涉场的数学分析

首先建立空间直角坐标系 $O-xyz$ 。设两束相干光波的复振幅分别为:

$$U_1 = A_1 e^{ik\phi_1}$$

$$U_2 = A_2 e^{ik\phi_2}$$

其中 $K = \frac{2\pi}{\lambda}$; A_1, A_2 是 U_1, U_2 的振幅; ϕ_1, ϕ_2 是 U_1, U_2 的相位,它们都是空间位置的函数。 ϕ 为常数的点的集合构成等相位面。

根据干涉理论,在 U_1, U_2 相遇的空间里将产生干涉现象,干涉的光强分布为:

$$I = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos K(\Phi_1 - \Phi_2) \quad (1)$$

很明显, 对于满足:

$$\Phi_1 - \Phi_2 = m\lambda \quad (m \text{ 为整数}) \quad (2)$$

的点的集合, 产生增强干涉。(2) 式确定一组空间曲面, 它的形状取决于 Φ_1, Φ_2 的形状。

1. 平面波和发散球面波的干涉场

首先规定相位的正负: 以延迟的相位为正, 超前的相位为负。设在坐标系的原点有一点光源发出球面波 U_1 , 另一束传播方向平行于 Z 轴的平面波 U_2 (图1):

$$U_1 = \frac{A_1}{r} e^{ikr}$$

$$U_2 = A_2 e^{ikz}$$

即:

$$\Phi_1 = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\Phi_2 = z$$

代入 (2) 式得:

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - z = m\lambda \quad (m \geq 0) \quad (3)$$

移项化简后得:

$$\rho^2 = 2mz\lambda + m^2\lambda^2 \quad (4)$$

其中:

$$\rho^2 = x^2 + y^2$$

这是一组对称于 Z 轴的回转抛物面 (如图1 虚线所示。)

当 $\rho = 0$ 时,

$$Z = -\frac{m\lambda}{2} \quad (m \geq 0);$$

当 $Z = 0$ 时,

$$\rho = m\lambda$$

即对于某一确定的干涉级 m , 曲面和 xy 平面相交成半径为 $m\lambda$ 的圆; 它的顶点在 Z 轴的 $-\frac{m\lambda}{2}$ 处。最小干涉级为零级, 没有最大干涉级。随着 m 的增加, 抛物面的“口”逐渐张开。

如果在 Z 轴正方向 $Z = a$ 处放一垂直于 Z 轴的屏, 则在屏上可观察到一系列的同心圆环, 它们是屏和抛物面组相截的交线, 其半径满足:

$$\rho = \sqrt{2ma\lambda + m^2\lambda^2} \quad (5)$$

对于满足菲涅尔近似的区域, 上式可简化为:

$$\rho = \sqrt{2ma\lambda} \quad (6)$$

其条纹间隔为:

$$\Delta\rho = \frac{2a\lambda \Delta m}{2\sqrt{2ma\lambda}} = \frac{a\lambda}{\rho} \quad (\Delta m = 1) \quad (7)$$

2. 平面波和会聚球面波的干涉场

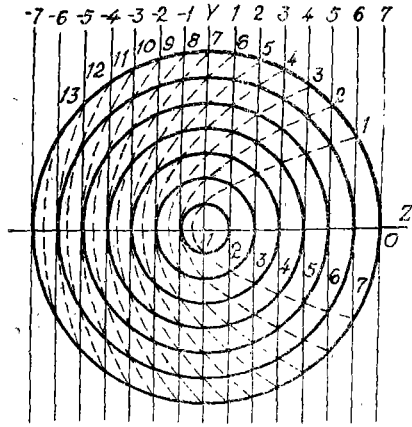


图1 平面波和发散球面波的干涉场

在这种情况下,

$$\Phi_1 = -r, \quad \Phi_2 = z$$

于是:

$$-r - z = m\lambda \quad (m \leq 0) \quad (8)$$

移项整理后得:

$$\rho^2 = 2mz\lambda + m^2\lambda^2 \quad (m \leq 0) \quad (9)$$

这也是一组对称于Z轴的回转抛物面(图2虚线所示),所不同的是,抛物面的顶点在Z轴的正方向。它相当于第一个干涉场绕y轴旋转180°所形成的干涉场,其性质和第一个干涉场相同。如果在Z的负方向某处 $Z = a$ (a 为负) 放一垂直于Z轴的屏,则屏上的同心圆环同样满足:

$$\rho^2 = 2m \cdot a \cdot \lambda + m^2\lambda^2 \quad (a < 0, m \leq 0) \quad (10)$$

在满足菲涅尔近似条件下,上式可化为:

$$\rho = \sqrt{2m \cdot a \cdot \lambda} \quad (a < 0, m \leq 0) \quad (11)$$

条纹间隔为:

$$\Delta\rho = \left| \frac{a\lambda}{\rho} \right| \quad (12)$$

可以证明,以上两种空间干涉场互相正交。

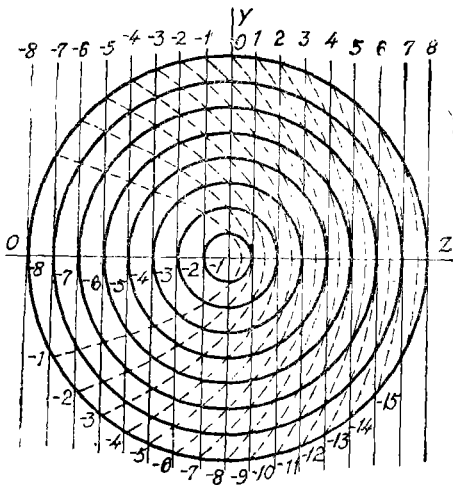


图2 平面波和会聚球面波的干涉场

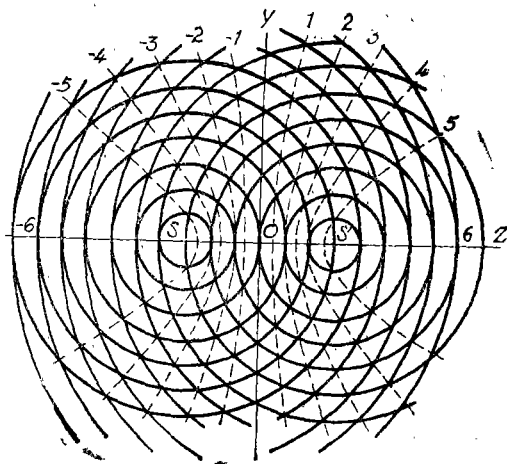


图3 两组发散球面波的干涉场

3. 两组发散球面波的干涉场

设Z轴上有两点光源 S, S' 分别位于原点 O 的两侧,且 $SO = OS' = d$ (图3),于是

$$\Phi_1 = \sqrt{(z+d)^2 + x^2 + y^2}, \quad \Phi_2 = \sqrt{(z-d)^2 + x^2 + y^2},$$

代入公式(2)得:

$$\sqrt{(z+d)^2 + x^2 + y^2} - \sqrt{(z-d)^2 + x^2 + y^2} = m \cdot \lambda. \quad (13)$$

整理后得.

$$\frac{z^2}{\left(\frac{m\lambda}{2}\right)^2} - \frac{\rho^2}{d^2 - \left(\frac{m\lambda}{2}\right)^2} = 1. \quad (14)$$

可见干涉场是双叶回转双曲面组(图3虚线所示)。当 $m > 0$ 时,“开口”指向Z轴的正方向,当

$m < 0$ 时, “开口” 指向 Z 轴的负方向, $m = 0$ 时, 双曲面化为 $x-y$ 平面。 m 级的双曲面顶点在 $Z = \frac{m}{2}\lambda$ 处。 另外, 从 (14) 式可以看出:

$$d^2 - \left(\frac{m\lambda}{2}\right)^2 \geq 0.$$

所以这个干涉场有一个最大干涉级:

$$\begin{aligned} d &= \frac{M\lambda}{2}, \\ M &= \frac{2d}{\lambda}. \end{aligned} \quad (15)$$

干涉场从零级的 $x-y$ 平面开始, 随着干涉级绝对值的增加, “开口” 逐渐变小, 同时, 和 Z 轴的交点也逐渐向两点光源处移动。 当达到最大干涉级时, 双曲面化为从两点光源开始分别指向 Z 轴正负方向的直线。

如果在两点源外侧某处放一垂直于 Z 轴的屏, 在屏上可以看到一系列的同心圆环。 为了分析方便, 我们重新建立坐标系。 令屏在 $x-y$ 平面上, S, S' 分别在离屏为 $-L, -L'$ 处 (图4)。 对于屏上任一点 $A(x, y)$, 我们有:

$$\sqrt{L^2 + x^2 + y^2} - \sqrt{L'^2 + x^2 + y^2} = m'\lambda \quad (m' \geq 0)$$

如果 A 点在菲涅尔近似区, 则上式可写成:

$$\left(-L - \frac{\rho^2}{2L}\right) - \left(-L' - \frac{\rho^2}{2L'}\right) = m\lambda.$$

化简后得:

$$(L' - L) + \frac{\rho^2}{2} \left(\frac{1}{L'} - \frac{1}{L}\right) = m'\lambda. \quad (16)$$

由 (15) 式可知:

$$L' - L = 2d = M \cdot \lambda \quad (M > 0),$$

代入 (16) 式得:

$$\begin{aligned} \frac{\rho^2}{2} \left(\frac{1}{L'} - \frac{1}{L}\right) &= m'\lambda - M\lambda = m\lambda. \\ (m \leq 0) \end{aligned} \quad (17)$$

如果令:

$$\frac{1}{L'} - \frac{1}{L} = \frac{1}{f'}, \quad f' < 0, \quad (18)$$

则 (17) 式可写成:

$$\rho^2 = 2f'm\lambda. \quad (f' < 0, m \leq 0) \quad (19)$$

条纹间隔为:

$$\Delta\rho = -\frac{f'\lambda}{\rho} = \left|\frac{f'\lambda}{\rho}\right|. \quad (20)$$

如果在 $y = y_0$ 处放一个垂直于 y 轴的屏, 对于原来的坐标系, (14) 式变为:

$$\frac{z^2}{\left(\frac{m\lambda}{2}\right)^2} - \frac{y_0^2 + x^2}{d^2 - \left(\frac{m\lambda}{2}\right)^2} = 1 \quad (21)$$

这是一组双曲线方程。 如果观察区只限于 y 轴附近, 则可由 (13) 式简化为:

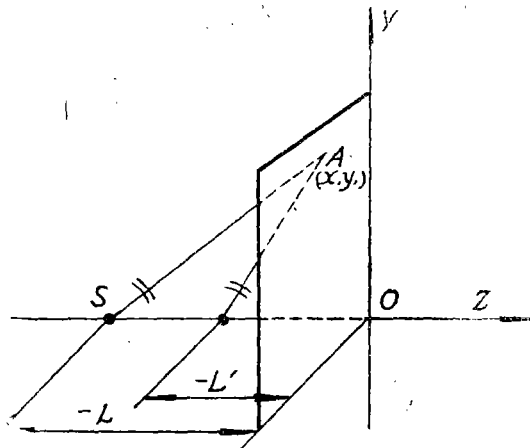


图4 记录双曲面干涉场示意图

$$y_0 + \frac{(z+d)^2 + x^2}{2y_0} - y_0 - \frac{(z-d)^2 + x^2}{2y_0} = m\lambda_0$$

整理后得:

$$Z = \frac{my_0\lambda}{2d} \quad (22)$$

这是一组平行于 x 轴的直线, 实际上就是杨氏干涉条纹方程。

4. 发散球面波和会聚球面波的干涉场

设 S 为发散点源, S' 为会聚点源, 坐标同前 (图5)。根据正负号规定,

$$\Phi_1 = \sqrt{(z+d)^2 + x^2 + y^2},$$

$$\Phi_2 = -\sqrt{(z-d)^2 + x^2 + y^2}.$$

代入 (2) 式得: $\sqrt{(z+d)^2 + x^2 + y^2} + \sqrt{(z-d)^2 + x^2 + y^2} = 2d + m\lambda \quad (m \geq 0), \quad (23)$

即:
$$\frac{z^2}{\left(d + \frac{m\lambda}{2}\right)^2} + \frac{\rho^2}{\left(d + \frac{m\lambda}{2}\right)^2 - d^2} = 1. \quad (24)$$

这是一组绕 Z 轴的回转椭球 (图5虚线所示)。

m 级的椭球, 和 Z 轴相交在 $\pm\left(d + \frac{m\lambda}{2}\right)$ 处,

和 $x-y$ 平面相交成半径为 $\sqrt{dm\lambda + \frac{m^2\lambda^2}{4}}$ 的圆。

可见, 两点源之间椭球和 Z 轴无交点。 $m=0$ 时, 椭球化为 S, S' 之间的线段。随着 m 的增加, 椭球以 $\frac{\lambda}{2}$ 的间隔向外延伸。同时在 $x-y$ 平面上的半径也逐渐变大。

如果在 S, S' 之间放一垂直于 Z 轴的屏, 将看到一系列的同轴圆条纹。仿上面的作法重新建立坐标系, 使屏和 $x-y$ 平面重合 (图6)。

对于屏上的任一点 A , 其干涉条件满足:

$$\sqrt{x^2 + y^2 + L^2} + \sqrt{x^2 + y^2 + L'^2} = (-L + L') + m\lambda. \quad (m \geq 0)$$

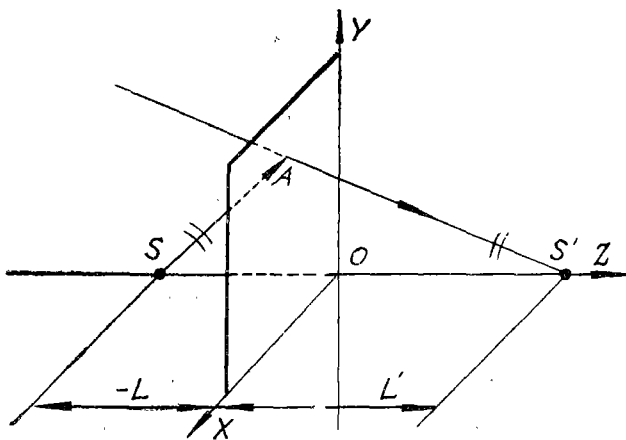


图6 记录椭球干涉场示意图

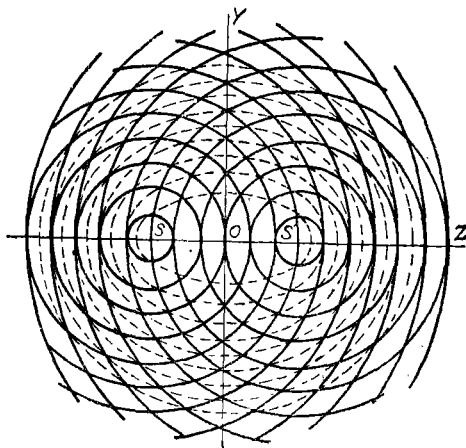


图5 发散球面波和会聚球面波的干涉场

如果 A 点在满足菲涅尔近似的位置上, 上式可简化为:

$$-L - \frac{\rho^2}{2L} + L' + \frac{\rho^2}{2L'}$$

$$= (-L + L') + m\lambda,$$

$$\rho^2 = 2f'm\lambda.$$

$$(f' > 0, m \geq 0) \quad (25)$$

其中:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{L'} - \frac{1}{L},$$

可以证明: 双曲面干涉场和椭球干涉场互相正交。

二、基本干涉场和全息成象的关系

这一部分讨论两个问题。第一,讨论基本干涉场对全息记录的影响;第二,讨论基本干涉场对全息成象的影响。

由以上四种情况的分析可知,基本干涉场都具有确定的空间分布。所以,要记录平面全息图,全息干板必须放到适当的位置上,否则,将达不到预期的目的。假定还利用上述的坐标关系,很容易发现:

1. 平面波和发散球面波的干涉场,记录位置应在点光源的右侧;
2. 平面波和会聚点源的干涉场,记录位置应在会聚点源的左侧;
3. 两组发散球面波的干涉场,记录位置应在两点源的外侧;
4. 发散球面波和会聚球面波的干涉场,记录位置应在两点源之间。

从上一节的分析可以发现,不论属于哪一种干涉场,只要记录满足菲涅尔近似条件,所得的干涉图形就可以用一个统一的方程表示:

$$\rho = \sqrt{2f'm\lambda}. \quad (f' > 0, m \geq 0; f' < 0, m \leq 0) \quad (26)$$

其中:

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{L'} - \frac{1}{L},$$

L 、 L' 分别是两点源(发散或会聚的)到干板的距离。

我们知道,牛顿环和波带片也满足这个方程,所以,我们把基本干涉场形成的干涉图称为波带片。 f' 是它的焦距,它不仅决定了干涉条纹的分布,也决定了它的成象性质。

假定 Z 轴上有一对可移动的点光源 s 、 s' (发散或会聚),它们距干板分别为 l 、 l' 。我们要求在 s 、 s' 的移动过程中,始于保持干板上形成同样的条纹分布,即要求所形成的波带片具有相同的焦距 f' 。由(18)式得 l 和 l' 的关系为:

$$l' = \frac{lf'}{l+f'}. \quad (27)$$

另外,由(26)式可知,同一波带片,既可以认为是 $f' > 0$, $m \geq 0$;又可以认为是 $f' < 0$, $m \leq 0$,这两种情况都对应着相同的条纹分布。就是说,对于 Z 轴上的可移动点源 s 、 s' ,如果满足:

$$\frac{1}{l'} - \frac{1}{l} = -\frac{1}{f'},$$

即:

$$l'_1 = \frac{lf'}{f'-l}, \quad (28)$$

那么,干板上同样可记录到相同的干涉图。通过上面的分析可以得出这样的结论:一对点光源只能对应一个固定焦距的波带片,但是一个固定焦距的波带片却对应于无数对满足一定关系的点光源。在记录时,如果确定了 f' 的大小,那么,每确定一个点源 s (距干板为 l),就对应另外两个点源 s' 和 s'_1 (距干板为 $\frac{lf'}{f'+l}$ 和 $\frac{lf'}{f'-l}$),使 s 和 s' 以及 s 和 s'_1 能在干板上产生相同的干涉图, s' 和 s'_1 是发散点源还是会聚点源以满足记录条件而定。同样,在再现时,对于某一焦距的波带片,如果照明波带片的点源距波带片为 l ,那么,在波带片的透射

光中，除了从s的直接透射光外，还衍射出两束光，它们好象是从距波带片为 $\frac{lf'}{f'+l}$ 和 $\frac{lf'}{f'-l}$ 处发出的。这是必然的，因为不管它实际上是怎样形成的，我们总可以认为是由位于再现的照明光源处的点光源和另外两个满足(27)，(28)式的点光源形成的。根据全息成象原理，再现时，一定会出现这两束光。这两束光的会聚点可以认为是s的象点，或象全息术所说的那样，是s的正负1级象点。所以，一个波带片可以看成是由两个互不相干的焦距的绝对值相等的正负透镜所组成，它有类似普通透镜的成象性质，因此，也常称为全息透镜。所不同的是成象的方法上，如果说普通透镜是折射成象的话*，那么，全息透镜就是衍射成象和反射成象。

现在假定照明点光源s和形成全息透镜时的点源S重合。很明显，正1级象在S'处(距全息透镜为L')，负一级象可表示为：

$$L'_1 = \frac{f'L}{f'-L} = \frac{L}{1 - \frac{L}{f'}} = \frac{L}{1 - L\left(\frac{1}{L'} - \frac{1}{L}\right)}$$

$$= \frac{L^2 L'}{LL' - L(L-L')} = \frac{LL'}{2L' - L} \quad (29)$$

下表以两发散点光源形成的全息图为例，说明当照明光源和S重合时，负1级象的位置随S的位置变化情况。

表1 负1级象位置随S的位置变化情况

S 的位置 (L)	负1级象的位置 (L' ₁)
$-\infty$	$L'_1 = -L'$
$-\infty < L < 2L'$	$-L' < L'_1 < \infty$
$L = 2L'$	$L'_1 = \infty$
$2L' < L < L'$	$-\infty < L'_1 < L'$
$L = L'$	$L'_1 = L'$

由上表可以看出，平行光和点源形成的全息透镜，正负1级象对称于全息图，当两点源和干板的距离满足 $L = 2L'$ 时，负1级光为平行光。

另外，在分析全息透镜的条纹间隔时，我们得出：

$$\Delta\rho = \frac{|f'\lambda|}{\rho}$$

我们知道：

$$\text{相对孔径} = \frac{2\rho}{f'}$$

所以：

$$\Delta\rho = \frac{2\lambda}{\text{相对孔径}}$$

条纹的空间频率为：

$$\nu = \frac{\text{相对孔径}}{2\lambda} \quad (30)$$

* 从广义上讲，普通透镜的成象也应该看成是衍射成象。

随着孔径的增加，条纹要不断加密。所谓平面全息图，是不考虑乳胶厚度对成象的影响。实际上，一般的全息干板的乳胶大约有3-20微米的厚度，由于每一种干涉场具有确定的空间分布，虽然不同的干涉场有可能形成具有相同径向分布的全息透镜，但是由于厚度的影响，在纵深方向不可能形成相同的分布。这种不同点必然要影响成象质量上。随着条纹的变密，厚度的影响也增加。所以，如果低频区可以认为是平面全息图的话，那么，高频区就应看成是体积全息图了。一般的全息图总包括有低频部分和高频部分，所以，全息成象只有同时满足衍射成象和反射成象条件（布拉格条件）才能形成理想象。要做到这一点，照明光源必须和形成全息图时的参考光重合才能达到。对于其它位置，由于只能满足衍射成象条件不满足反射成象条件，所以象的质量要下降。

本文分析了基本干涉场的空间分布性质，并以此为基础，分析了全息记录和全息成象的条件和性质。其中全息记录是假定在满足线性条件下进行的；全息成象则假定满理想成象条件，没有涉及象差问题。

在写本文过程中，顾去吾同志给予了很大的帮助，提出了很好的建议并审阅了全文，在此表示深切的感谢。