

飞轮模型的自振频率冲击响应及应力

王钟球

一、前言

飞轮是卫星姿态控制的执行机构。设计要求飞轮经受各种环境考验，保证它在运输、发射及运行中安全可靠。同时还要求尽量减轻它的重量。所以，对飞轮进行振动，冲击和应力分析，就成了研制飞轮过程中的重要一环。

解决这些力学问题，过去采用材料力学和弹性力学中的解析解，但只局限于形状简单的构件如杆、梁、轴和壳等问题。而实际工程中的大部分构件，其几何形状和边界条件要复杂得多。材料力学和弹性力学的古典解析解仍就无法满足。有限单元法是一种有效的近似的数值解法，它把连续弹性体看作有限个单元的集合体。通过对各单元的特性分析后、再考虑每个单元在整体结构中相互联系的特征，这样就能比较方便地计算出构件各处的位移及应力。为了使计算尽可能地符合实际状态，往往把构件的单元划分得适当的小。但由此建立起来的平衡方程组将是一个高阶的线性代数方程组。解这样的高阶方程组是十分繁重的工作，用一般的计算工具是无法完成的。电子计算机的应用可以使得这样繁重的计算工作及时获得所需的结果。有限单元法与电子计算机结合解决实际工程问题，已经得到广泛的应用，成为弹性力学问题数值解的有效手段。

SAP程序 (STRUCTURAL ANALYSIS PROGRAM) 是为了分析线性结构系统静力和动力问题的通用有限元计算程序，它是美国加利福尼亚大学伯克利分校的 WILSON BATHE PETERSON 等人领导下发展起来的。根据国际有限元会议上的调查，SAP程序被列为全世界用得最多的十几个有限元程序之一。我国经多年来的考核，证明其结果是可靠的。

在飞轮的计算中，我们直接运用了SAP V程序。先后计算了：

1. 飞轮的自振频率及振型；
2. 飞轮在40g冲击下的动力响应。
3. 飞轮在40g过载情况下的应力及位移。

二、计算机采用的工作状况

每个卫星上，用于姿态控制的飞轮共有三个，结构完全相同，分别安装在互相垂直的俯仰轴，偏航轴和翻滚轴上。在轨道上运行的卫星所受的载荷是很小的。在发射过程中卫星所受的力最大。由于飞轮轴线方向的刚度比径向的刚度弱得多，所以飞轮轴线与发射方向一致的，即装在翻滚轴上的飞轮应力最大。所以，我们在计算中施加的载荷方向都在飞轮轴线的方向。载荷工作状况分别为40g冲击和40g过载。

三、飞轮的自振频率及振型、40g冲击下的动力响应

(一) 计算图单元的划分和节点编号用有限单元法解决实际工程构件

第一步就是将连续体离散为单元组合体。首先要画计算图。为了简化计算,节省计算机的存储量,节省计算的机时,要考虑结构与载荷的对称性。凡是结构形状对称,载荷对称的构件,可以沿对称轴线切开,只计算其中的一部分。对飞轮而言,因为结构是对称的,载荷是自身的惯性力,所以也是对称的。这样就可沿着轮辐的中心线,将飞轮切成对称的两半。对称轴上节点位移在与对称轴垂直的方向上的分量应为零。如图1(b)所示,在进行飞轮静力计算时,就只需要计算一半。画计算图还要考虑构件的厚度与材料。由于单元的应力矩阵,刚度矩阵与节点载荷列阵,都是在厚度与材料于单元内不变的情况下推导出来的。即同一单元内的厚度 t 、弹性模量 E 和泊松系数 μ 以及比重 ρ 等都是常量。另外,厚度或材料的突变必须伴随应力的突变,而这样突变不可能在一个单元中得到反映,只可能在不同的单元中得到一定程度的反映。所以在画计算图时,若整个构件的厚度与材料都不变,则画出构件的外形图即可;若构件具有不同的厚度,或者由几种材料组合成,那末除了画出外形图外,还要画出不同厚度和不同材料的分界线。按厚度材料把单元分成不同的批数。对飞轮这个构件而言,我们目前的模型,采用的是整体式,即同一种材料。但是、轮缘、轮辐和轮毂的尺寸各不相同。所以划分单元时应分成三批。

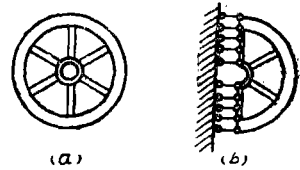


图1 飞轮

如上所述、这次飞轮的计算,采用两种工作状况。尽管计算静力时,由于对称的缘故、计算半个飞轮就行。考虑到节点数据及单元数据要在两个计算中通用,以减少数据输入的麻烦。最后决定二个计算都采用同样的整体计算图。

为了使节点坐标的信息填写和卡片穿孔简单,少出错误。选择一个合理的坐标系也是很重要的。根据飞轮结构对称的特点、选择飞轮旋转的轴线为 Z 轴,与旋转轴垂直的平面为 XOY 平面。

按照飞轮结构的特点,在SAP程序的十种单元类型中,我们可选用8—21节点三维单元。这种单元的节点数可由8~21之间任意变化,从而提高计算精度。载荷包括面力,静水压力,温度力和加速度力等。一次可以最多输出包括21个节点和六个方面中心中的任意七个位置上的应力。

单元的多少要根据计算精度的要求和计算机容量来确定。从有限元法本身来说,单元越多越小,计算结果越精确。但同时计算所用的机时也就越长,而且有可能超出计算机的容量。所以应在计算机容量范围内,根据所要求的精度,来决定单元的多少。对于具有不同厚度组成的构件,应将同一批的分界线作为单元的分界线。在划分单元时要注意使一个单元中的多边长度不应相差过大,以避免计算中出现过大的误差,一般的经验是最大和最小的边长比不超过3:1。由于总体刚度矩阵是由节点平衡方程而形成的,而建立节点平衡方程时要把围绕该节点所有单元对它的节点力考虑进去。所以任一单元的节点,必须同时也是相邻单元的节点。参照上述原则把飞轮划分成50个单元。由于飞轮的对称性,六根轮辐的应力分布

是一样的，四根不需求应力的轮辐，将整根作为一个单元。

节点编号时，主要考虑尽量减少计算机的存贮量，存贮量取决于总体刚度阵各行的半带宽，而半带宽又取决于节点的编号。合理的结点编号使带宽变窄，节省存贮量，缩短计算机时。编号时要使所有相邻点之间的编号相差最小。一般来说沿结构尺寸较小的方向排列编号比较合理。但实际上，人工输入和自动生成的节点编号往往会形成较大的带宽，对计算时间和存贮的占用来说都不大合理。SAP V 程序中有节点带宽优化处理，输入节点编号以后，若给了优化控制讯息，则程序就自动根据节点和单元讯息，将节点重新编号，使带宽相对最小，并可将新旧节点编号都打印出来。所以用SAP V 程序计算时，节点编号可任意规定，只要便于人工检查数据就行。并在程序中给予优化信息。在本计算的打印结果可以看出优化后的带宽只有优化前带宽的四分之一，优化的效果是十分明显的。

(二) 载荷及约束

一个物体在跌落式冲击台上做冲击实验的情况和一个物体的基础在垂直方向有加速度运动的情况是相似的。如果在基础上输入的加速度函数与冲击时的激振函数相同，两者所产生的响应就相同。所以我们采用SAP V 中用输入基础加速度求强迫响应的方法来计算飞轮的冲击响应。基础输入加速度的脉冲为梯形脉冲，在 1 毫秒之内加速度从零升到 40g，保持 3 毫秒后，又在 1 毫秒之内降至零。

在飞轮这个部件中，有环形弹簧起缓冲作用。滚动轴承也有一定的刚度，两者串联在一起组成一个等效的弹簧，参照实验所得的轴承刚性曲线（见附录）和选用的轴承预紧力，我们取计算时的轴承刚度 $K_1 = 3 \times 10^4$ 千克/厘米，同时选用刚性 $K_2 = 1.67 \times 10^4$ 千克/厘米的缓冲环形弹簧。两者串联后的等效刚度为：

$$K = \frac{k_1 k_2}{2k_1 + 2k_2} = \frac{3 \times 10^4 \times 1.67 \times 10^4}{2 \times 3 \times 10^4 + 2 \times 1.67 \times 10^4} = 0.536 \times 10^4 \text{ 千克/厘米}$$

以此作为计算冲击响应的原始数据之一。计算时我们将刚性为 $\frac{1}{3} \times 0.536 \times 10^4$ 千克/厘米的三个弹簧作为边界元，放在飞轮节点13、17和21三个节点上。这三个边界元的另一端固定在基础上，其节点号分别为241、242和243。

(三) 计算结果

在计算过程中，首先要计算固有频率及振型。然后利用已经被存贮的自振频率及振型再启动，使用再启动操作符—2，作响应历程分析。因此，节点、单元、节点载荷等数据均可沿用，不必重复输入。计算结果如下：

表 1

	有 减 震 弹 簧	无 减 震 弹 簧
一阶固有频率H _z	241.1	549.1
二阶固有频率H _z	1146.3	1146.3
三阶固有频率H _z	1342.6	1342.7

对于每一个固有频率，计算机都能输出所有节点在三个坐标轴方向的相对位移和转角，所以振型是一目了然的。例如要知道轮缘外侧在 Z 轴方向的振型，只要将轮缘外侧各点 Z 方向的位移作图即可，如图 2 所示。

表 2

飞轮受40g冲击时，计算出的最大位移点在Z轴方向，轮缘的外侧点，其值为：

节 点 号	位 移 分 量 方 向	最 大 值 (毫 米)	时 间
152	Z	0.307	冲击后2.6毫秒

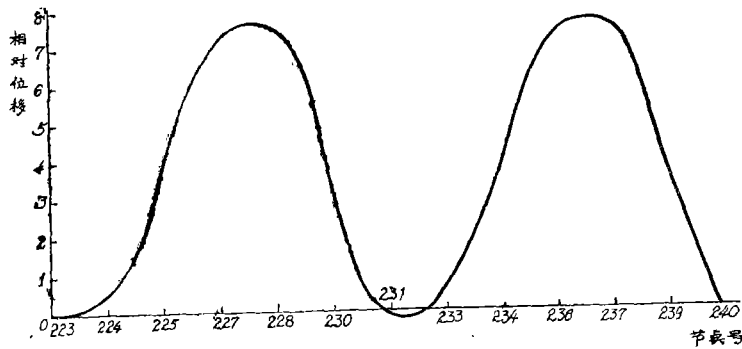


图 2 轮缘振形

在SAP程序中，计算三维立体单元，计算机可以输出单元面心的动应力的时间历程。例如在第25单元中面心5的 x 方向的应力 $\sigma_{xx}(5)$ 的时间历程如图3所示。应力波在冲击一开始迅速升高，第26毫秒时达到最大值，以后逐渐变小并形成幅值小得多的脉动衰减波。在计算机给出的数据中还可看出第25单元面心 σ 的 x 方向的应力 $\sigma_{xx}(6)$ 同样在第26毫秒时达到最大，但是符号相反。 $\sigma_{xx}(5)$ 为拉应力，而 $\sigma_{xx}(6)$ 为压应力。这符合材料力学中梁受弯时中性两侧应力的分布规律。

四、飞轮在40g过载工作状况下的应力及位移

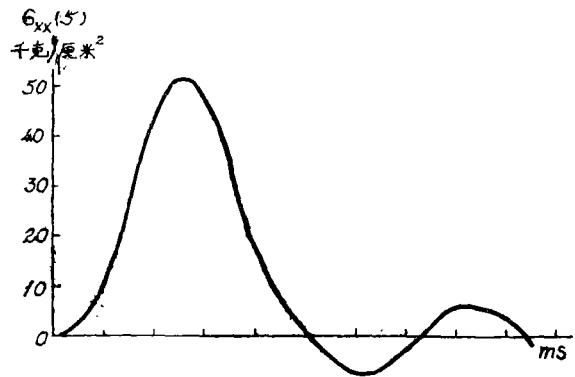


图 3 冲击应力波

当飞轮进行过载试验时，作用力作用在飞轮轴上，使得整个飞轮作等加速度运动。由于惯性力的结果，使得飞轮各个部分产生应力。按照动力学中的达朗伯原理，我们可以用静力学的办法来解这个动力学的问题。质点惯性力的大小等于质点的质量与加速度的乘积，方向与加速度方向相反，并作用在使该质点运动状态发生改变的其他施力物体上。就飞轮而言，当飞轮在轴线方向作等加速度运动时，飞轮轴通过轴承带动轮辐作等加速度运动，这时轮辐就把自身的惯性力施加给飞轮轴，当轮辐带动轮缘作等加速度运动时，轮缘就把自身的惯性力施加给轮辐。这样，飞轮在过载试验时的应力分析就是求解飞轮在惯

力作用下的应力分析。由于过载试验时，加速度为常量，所以这个问题就可作为静力学问题来解了。

采用SAP V静力程序，求自重作用下飞轮的应力时，当一个质点所产生的加速度为40g时，其惯性力为

$$F = m 40g$$

可将上式写成

$$F = 40mg$$

即对一个运动的质点而言，在40g的等加速度情况下所产生的惯性力与质点的质量加大40倍以后在1g的加速度情况下所产生的惯性力相比，两者的值是相等的。而一个物体的质量正比于它的质量密度，质量密度又正比于它的重量密度。由此可知要计算等加速度为40g时的飞轮应力，只要在SAP V静力程序中将重量密度加大40倍后，求在1g情况下，由自重引起的应力。

计算结果表明最大应力点位于轮辐与轮毂的交接处，即位于轮辐的根部。如果将40g冲击和40g等加速度两种工况下轮辐根部的应力作一比较的话，可以看出动应力的最大值大约是静应力的两倍，设计时可以考虑动荷系数为2。从应力的角度来看，这个模型飞轮的设计偏向保守，以后改进设计时可考虑减小轮辐的截面尺寸。

计算所得最大位移在轮缘上，其值仅3.7微米。

五、实 验

我们在汽车研究所，将飞轮放在法国制造的多点激振台上进行激振，测量其自振频率。飞轮垂直放置，轮轴法兰紧固在地基上。用一个电磁激振器在飞轮的轮缘上作垂直方向的激振，如图4所示。

表3 实测结果如下

	有减振弹簧	无减振弹簧
一阶固有频率	270	464
二阶固有频率		1036
三阶固有频率		1296

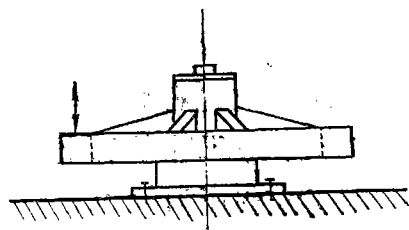


图4 激振方式

以上结果与计算结果很相近，说明计算是可行的。但也有误差，因为计算方法本身是一种有误差的近似方法。再则在实验时弹簧预紧力也未精确的规定，这些都能产生差异。

设计要求飞轮的自振频率必须在200赫以上，就轴向振动而言，飞轮模型是满足要求的但是在实测过程中，我们还测得一个大约85赫的自振频率。我们认为这是因为在轮缘上单边激振所造成的。激振器使飞轮轴产生弯曲振动。85赫的自振频率就是这个飞轮的横向振动频率。说明这个飞轮的横向刚度大小。要使其横向自振频率也在200赫以上，必须加大轴的刚性，或从结构上加以改进，增大横向刚度。

附 录

轴承和环形弹簧刚性的测定

为了弄清6200轴承和环形弹簧的刚性，我们进行了实验，用砝码通过加力杠杆加力，用电感比较仪测量位移。为了使作用力对准中心，力通过一个钢球加到轴承和弹簧上。同时在两个对称点上进行。轴承刚性的测量结果如下：

表 1

载荷P公斤	轴承内环相对外环的位移量 ΔL 微米	轴承刚性 $P/\Delta L \cdot 10^4$ 公斤/厘米
0	0	0
5	3.3	1.51
10	5.9	1.70
15	7.6	1.97
20	7.9	2.53
25	8.5	2.94
30	8.6	3.49

按上述测得的数据所画的曲线如图 1 所示。如果再把每一个载荷下轴承的刚性作图，其曲线如图 2。可以看出，轴承的刚性不是一个常数，而是随着载荷的增大而增大的。这是因为滚珠与内外环的接触随着载荷的增大而增大的。这是因为滚珠与内外环的接触随着载荷的增加由点到面逐渐增大的缘故。

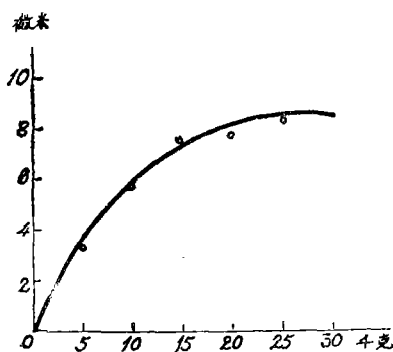


图 1 6200轴承的载荷变形曲线

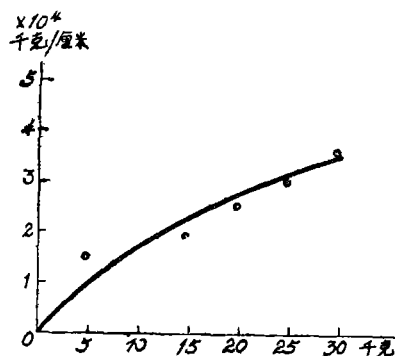


图 2 6200轴承的刚性曲线

我们对环形弹簧的刚性用上述同样的方法进行了测定。所得结果如图 3 所示。曲线所包围的面积为环形弹簧吸收的功，消耗在环与环之间的摩擦上。可见，这种弹簧的消振能力是很强的。

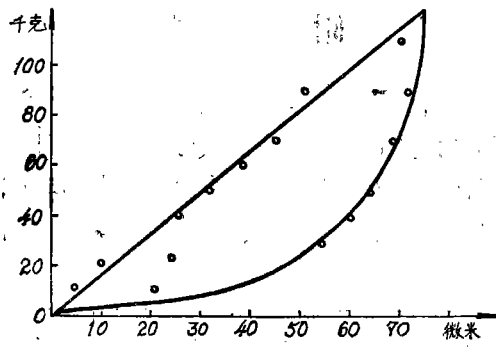


图3 环形弹簧的载荷位移曲线

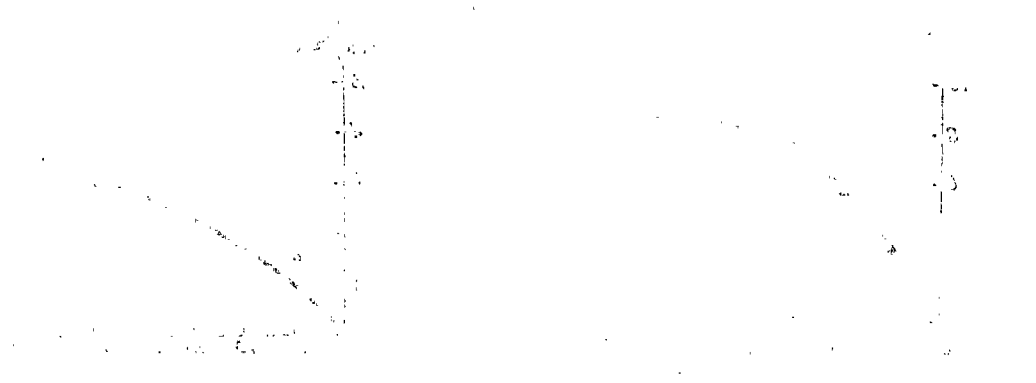


图4 环形弹簧的示意图

该图显示了环形弹簧在受到外力作用时的变形情况。图中(a)部分展示了弹簧在初始状态下的几何形状和尺寸，(b)部分则展示了在施加一定载荷后，弹簧发生压缩变形的状态。通过对比两种状态，可以观察到弹簧的位移与所受载荷之间的关系，这与图3中的曲线数据相吻合。