利用星空标校提高电影经纬仪测量精度

李 晋 年

前 言

随着航天和兵工事业的发展，对电影经纬仪测量精度的要求愈来愈高，但单靠光机电工艺改善来提高是有一定困难的，为此本文提出使用现有设备，利用星空标校提高电影经纬仪测量精度的方法。[1]

一、星体的选择及拍摄

1. 星体亮度的选择

拍摄恒星时可根据电影经纬仪的口径及使用胶片的感光度来选择适当亮度的星体，星体的亮度可由星等来确定，星体像点在胶片上照度可用公式（1）计算。

$$Z_N = \frac{Z_i D^4 \tau}{18 \times 10^{-7} f^2} \quad \cdots\cdots (1)$$

式中

Z_i：星体在光具组入瞳处所形成的照度

D：电影经纬仪口径

τ：光具组的透过率

Z_N：影像处在理想情况下的照度

f：主摄影系统的焦距

能拍上由公式（1）算出星体照度的胶片感光度可由公式（2）计算

$$S = \frac{1}{Z_N t_{拍}} \quad \cdots\cdots (2)$$

式中

S：选用胶片的感光度（单位为ASA或гост）

$t_{拍}$：曝光时间

上述公式为理论上的计算公式，实际上由于有大气干扰、曝光时星体的移动，并且还有主摄影系统的像差，为此将使影像面积增大，星像处照度减小，而选用比理想情况感光度高的胶片（据资料[3]及其引用参考资料记载，实际照度将比理想情况下约低5倍）

2. 星体位置的选择

利用星图和测站天文经纬度及拍摄时间，选择高低角在20°～65°之间，方位角在0°～360°之间尽量均匀分布的星体。星体的高低角及方位角可按下式计算[6]。

$$h' = \sin^{-1}(\sin\varphi\sin\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos t) \quad \cdots\cdots (3)$$

$$h = h' + R = h' + R_0(1 + a + b) \quad \cdots\cdots (4)$$

对 $h < 45°$ 者用 $\alpha' a$ 代替 a

$$A = \sin^{-1}(\sin t\cos\delta / \cos h) \quad \cdots\cdots (5)$$

$$A = \cot^{-1}(\sin\varphi\cot t - \cos\varphi\csc t\tan\delta) \quad \cdots\cdots (6)$$

（A用（5）、（6）2式表示是为了确定星体在坐标系中的象限）

$$t = S_0 + (1+\mu)T + \lambda - \alpha \cdots\cdots (7)$$

式中：

h'：星体的理论高低角

h：星体的理论视高角

A：星体的方位角

α：星体的赤经

δ：星体的赤纬

t：星体的时角

λ：测量点的经度

φ：测量点的纬度

T：观测时间（世界时）

μ：世界时间恒星时的转换系数

R：矇气差

R_0、a、a'和为求R时用的参数，它们分别由高低角、温度和压力做引数在天文年历中查出。

选出上述星体后，可利用人工识星拍照或利用电子计算机引导拍星。

二、主要系统误差的校正

本文所述的主要系统误差，系指照准差、横轴差、竖轴差和零位差。

1．照准差c影响的校正

照准差c系指电影经纬仪视轴与横轴的不垂直度。

1）c的求得

c可用电影经纬仪正倒镜瞄准靶标的办法来求得，可按（8）式计算c。

$$c = \frac{d_{o正} - d_{o倒} \pm \pi}{2} \cdots\cdots (8)$$

式中

c：照准差

$d_{o正}$：电影经纬仪正镜准瞄靶标时的方位角读数。

$d_{o倒}$：电影经纬仪倒镜准瞄靶标时的方位角读数。

2）、c对测角的影响

对测方位角的影响ΔA_c，它可由球面三角公式推得如下式

$$\Delta A_c = c\sec E \cdots\cdots (9)$$ [4]

对测高角的影响近似为0。

根据（9）式可校正照准差的影响

2．横轴差H影响的校正

横轴差系指电影经纬仪横轴和竖轴的不垂直度。

1）H的求得

利用电影经纬仪正倒镜拍照高角在65°左右的某一星体，其计算公式如下

$$H=\left(\frac{d_{H正}-d_{H倒}-\Delta d_{H}\pm\pi}{2}-c\sec E\right)\cot E \quad\cdots\cdots(10)$$

式中

H：为横轴差

$d_{H正}$：为正镜拍照星体得到的方位角测量值

$d_{H倒}$：为倒镜拍照星体得到的方位角测量值

Δd_{H}：倒、正镜拍星由时间差造成星体在方位方向的移动量。

2）H对测角的影响

H对方位角测量的影响ΔA_{H}可由球面三角学推得下列关系[3]。

$$\Delta A_{H}=H\tan E \quad\cdots\cdots(11)$$

利用（11）可校正H对测方位角的影响

H对测高低角的影响，利用球面三角公式推得近似为0[3]。

3．竖轴差V影响的校正

竖轴差为竖轴与大地水平面的不垂直度（或者与某一要求位置的不垂直度）。

1）竖轴差的求得

在场外可用二种办法求得，即类室内法和拍星法。

a、类室内法

在经纬仪内转台近似平行横轴位置放一格值为一角秒的水准器，每隔一定等间隔角度正倒镜转动转台720°，得到水准器读数d_{vi}，用付立叶级数求其零次谐波和一次谐波$a_0/2$及c_1。c_1为倾斜误差；d_{vi}减掉0次及一次谐波影响后即为幌动误差，计算公式如下。

$$a_0/2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}d_{vi} \quad\cdots\cdots(12)$$

$$a_1=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}d_{vi}\cos x_i \quad\cdots\cdots(13)$$

$$b_1=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}d_{vi}\sin x_i \quad\cdots\cdots(14)$$

$$c_1=\sqrt{a_1^2+b_1^2} \quad\cdots\cdots(15)$$

$$A_{v1}=tan^{-1}(a_1/b_1) \quad\cdots\cdots(16)$$

式中

$a_0/2$：为零次谐波分量

c_1：为一次谐波的振幅

A_{v1}：为一次谐波的相角

a_1、b_1：为求一次谐波用到的中间量

x_i：为经纬仪转角

可见垂直轴倾斜量为c_1；垂直轴的幌动量由下式求得

$$V_{si}=d_{vi}-a_0/2-a_1\cos x_i-b_1\sin x_i \quad\cdots\cdots(17)$$

b、拍星法

利用前面选出的星体（20颗星以上）进行拍照，从其修正单项差后的实测高角$E_{i实}$和理论高角$E_{i理}$之差，利用曲线拟合的办法分裂出垂直轴调平误差和幌动误差，即求得c_1'及A_{v1}'

使下式之值为最小

$$\sum_{j=1}^{m}[E_{i实}-E_{i理}-c'_1\cos(x_i-A'_{V1})]^2 \cdots\cdots (18)$$

式中

c'_1：用拍星办法求得的垂直轴倾斜量。

A'_{V1}：用拍星办法求得的垂直轴倾斜方向。

x_i：第 i 颗星的方位角。

用拍星法求得的垂直轴幌动V'_{xj}，它由下式得出。

$$V'_{xj}=E_{i实}-E_{i理}-c'_1\cos(x_i-A'_{V1}) \cdots\cdots (19)$$

2）、竖轴差对测角的影响ΔA_V、ΔE_V

按球面三角公式可得下式

$$\Delta A_V=c_1\tan E_i\sin(x_i-A_{V1})+V_{xi}\tan E_i \cdots\cdots (20)$$

$$\Delta E_V=c_1\cos(x_i-A_{V1})+V_{xi} \cdots\cdots (21)$$

对拍星法用c'_1、A'_{V1}代替c_1、A_{V1}

式中

E_i：为第 i 颗星的高低角

A_{V1}：为垂直轴倾斜方向

其它符号仍按前面规定理解

4．零位差影响的校正

零位差有方位零位差$L_方$和高低零位差$L_高$。

1）$L_方$的求得

在前面选的m颗星中，经拍照判读后求得其方位实测值$A_{i实}$和理论值$A_{i理}$（按公式5和6计算）之差，再修正其余单项差的影响，则可得如下公式：

$$L_方=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[A_{i实}-A_{i理}-H\tan E_i-c_1\tan E_i\sin(x_i-A_{V1}) -c\sec E_i] \cdots\cdots (22)$$

2）、$L_方$对测方位角的影响ΔA_L

显然$\Delta A_L=L_方$，并且很容易从实测值中修正此影响，而对测高低角影响为0。

3）、$L_高$的求得

在前面选的n颗星中，可任选一星体，最好选北极星（小熊座α星），正倒镜拍摄此星后按下式计算

$$L_高=\frac{d_{L正}+d_{L倒}-\Delta d_L\pm\pi}{2} \cdots\cdots (23)$$

式中

$d_{L正}$：正镜拍照求得的星体高低角测量值

$d_{L倒}$：倒镜拍照求得的星体高低角测量值

Δd_L：正倒镜拍摄期间星体的移动量

4）$L_高$对测角的影响

对测高低角的影响ΔE_L

$$\Delta E_L=L_高 \cdots\cdots (24)$$

$L_{高}$对测方位角的影响为0。

三、总体误差的校正

该总体误差是指修正掉上述四项单项误差后，剩余各项误差的综合影响。其校正的具体过程如下：首先在执行任务前，在预飞行的轨道附近选m颗星（5颗以上），其亮度应亮于4等，用电影经纬仪对它们进行拍照之后，求出星体实测值和按公式（3）到（7）算出的理论值在高低和方位方向之差ΔE_K，ΔA_K，再求出按ΔE_K和ΔA_K拟合的误差函数$F_{高}(x)$、$F_{方}(x)$。

$F_{高}(X)$和$F_{方}(X)$的求得过程如下：

取星体排号如下：

$x_1 < x_2 < \cdots\cdots < x_m$

组成下列方程

$$\sum_{K=1}^{m}[F_{高}(x_K) - \Delta E_K]^2 \cdots\cdots \quad (25)$$

$$\sum_{k=1}^{m}[F_{方}(x_K) - \Delta A_K]^2 \cdots\cdots \quad (26)$$

并使其值为最小

为求$F_{高}(x)$、$F_{方}(x)$可设

$$F_{高}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_{高i}\, x^i \cdots\cdots \quad (27)$$

$$F_{方}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_{方i}\, x^i \cdots\cdots \quad (28)$$

一般再选n个基函数

$\varphi_{高1}(x)$、$\varphi_{高2}(x)$ $\qquad\qquad$ $\varphi_{高n}(x)$

$\varphi_{方1}(x)$、$\varphi_{方2}(x)$ $\qquad\qquad$ $\varphi_{方n}(x)$

并考虑它们的线性组合

$$F_{高}(x) = \sum_{j=1}^{n} u_{高j}\, \varphi_{高j}(x) \cdots\cdots \quad (29)$$

$$F_{方}(x) = \sum_{j=1}^{n} u_{方j}\, \varphi_{方j}(x) \cdots\cdots \quad (30)$$

命 $a_{高kj} = \varphi_{高j}(x_k) \cdots\cdots \quad (31)$

$a_{方kj} = \varphi_{方j}(x_k) \cdots\cdots \quad (32)$

$K = 1, \cdots\cdots, m;\ j = 1, \cdots\cdots, n$

于是（25）和（26）式是$u_{高1}$，$u_{高2}$，$\cdots\cdots u_{高n}$和$u_{方1}$，$u_{方2}$，$\cdots\cdots$，$u_{方n}$的二次函数

并命

$$J_{高} = \sum_{k=1}^{m}[F_{高}(x_K) - \Delta E_K]^2 \cdots\cdots \quad (33)$$

$$J_{方}=\sum_{k=1}^{m}[F_{方}(x_K)-\Delta A_K]^2 \quad (34)$$

为求$J_{高}$和$J_{方}$的值极，使其满足下列方程式

$$\partial J_{高}/\partial u_{高i}=0 \qquad i=1,2,\cdots\cdots,n \quad (35)$$

$$\partial J_{方}/\partial u_{方i}=0 \qquad i=1,2,\cdots\cdots,n \quad (36)$$

则$$\partial J_{高}/\partial u_{高i}=2\left[\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m}a_{高ki}\,a_{高kj}\right)u_{高j}-\sum_{k=1}^{m}a_{高ki}\Delta E_k\right] \quad (37)$$

$$\partial J_{方}/\partial u_{方i}=2\left[\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m}a_{方ki}\,a_{方kj}\right)u_{方j}-\sum_{k=1}^{m}a_{方ki}\Delta A_k\right] \quad (38)$$

如使用矩阵符号表示

$$\|C_{高}\|=\|A_{高}\|^T\|A_{高}\| \quad (39)$$

$$\|g_{高}\|=\|A_{高}\|^T\|\Delta E\| \quad (40)$$

$$\|C_{高}\|\,\|u_{高}\|=\|g_{高}\| \quad (41)$$

$$\|J_{高}\|=\|u_{高}\|^T\|C_{高}\|\,\|u_{高}\|-2\|u_{高}\|^T\|g_{高}\|+\|\Delta E\|^T\|\Delta E\| \quad (42)$$

$$\|J_{高}\|_{极小}=-\|u_{高}\|^T\|g_{高}\|+\|\Delta E\|^T\|\Delta E\| \quad (43)$$

$$\|u_{高}\|=\|(\Delta E^T\Delta E-J_{高极小})\,g_{高}^{-1}\|^T \quad (44)$$

$$\|C_{方}\|=\|A_{方}\|^T\|A_{方}\| \quad (45)$$

$$\|g_{方}\|=\|A_{方}\|^T\|\Delta A\| \quad (46)$$

$$\|C_{方}\|\,\|u_{方}\|=\|g_{方}\| \quad (47)$$

$$\|J_{方}\|=\|u_{方}\|^T\|C_{方}\|\,\|u_{方}\|-2\|u_{方}\|^T\|g_{方}\|+\|\Delta A\|^T\|\Delta A\| \quad (48)$$

$$\|J_{方}\|_{极小}=-\|u_{方}\|^T\|g_{方}\|+\|\Delta A\|^T\|\Delta A\| \quad (49)$$

$$\|u_{方}\|=\|(\Delta A^T\Delta A-J_{方极小})\,g_{方}^{-1}\|^T \quad (50)$$

式中

$$\|u_{高}\|=\|u_{高1}\cdots\cdots u_{高n}\|^T \quad (51)$$

$$\|u_{方}\|=\|u_{方1}\cdots\cdots u_{方n}\|^T \quad (52)$$

$$\|\Delta E\|=\|\Delta E_1\cdots\cdots\Delta E_m\|^T \quad (53)$$

$$\|\Delta A\|=\|\Delta A_1\cdots\cdots\Delta A_m\|^T \quad (54)$$

$$\|A_{高}\|=\begin{Vmatrix} a_{高11} & \cdots\cdots & a_{高1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{高n1} & \cdots\cdots & a_{高nm} \end{Vmatrix} \quad (55)$$

$$\|A_{方}\|=\begin{Vmatrix} a_{方11} & \cdots\cdots & a_{方1m} \\ \vdots & & \\ a_{方n1} & \cdots\cdots & a_{方nm} \end{Vmatrix} \quad (56)$$

$u_{高k}$，$u_{方k}$求得后，可按（29）、（30）式求得$F_{高}(x)$，$F_{方}(x)$。

前述校正为执行任务前的校正，对执行任务后还要做一次校正，这样可复查其校正值准确到何程度。

四、总体校正的误差

对应m颗星的方位角，取$F_{高}(x)$和$F_{方}(x)$在执行任务前后的各m个差值$\Delta F_{高}(x_1)$，……，$\Delta F_{高}(x_m)$；$\Delta F_{方}(x_1)$，……，$\Delta F_{方}(x_m)$。则按下式计算总体校正误差。

$$\sigma_{高} = \pm\sqrt{\frac{\frac{J_{高}}{m-1} + \sum_{i=1}^{m}[\Delta F_{高}(x_i)]^2}{2m}} \quad \cdots\cdots (57)$$

$$\sigma_{方} = \pm\sqrt{\frac{\frac{J_{方}}{m-1} + \sum_{i=1}^{m}[\Delta F_{方}(x_i)]^2}{2m}} \quad \cdots\cdots (58)$$

讨　　论

1. 当星数m较大可采用分段插值，或者用样条插值。

2. 前面选择的星体因都为离预用轨道很近的星体，所以都以等权形式考虑，如选用了偏移较大的星体，应考虑加权处理，其权大小应根据具体情况考虑。

3. 前面的单项误差校正中，单项差的求得误差都在最后以剩余误差形式表现在总体误差校正中。

4. 在有条件的情况下，可在电影经纬仪上加上测星体的天文头甚至加上跟太阳头，那么校正工作会加快完成，并且在加上跟太阳头后可将校正工作从夜间移到白天来进行，这样对工作非常有利。

参 考 文 献

[1] 唐九华；光学学报，1·(1981)，67。
[2] 李晋年；光学机械，4·(1981)，54。
[3] 古塞夫；矿山大地测量学，测绘出版社。
[4] 冯康等编；数值计算方法，国防工业出版社。
[5] А·В·Загребин，Введение в астрометрию，изд·‹Наука›，1966。