

# 轴对称载荷加筋旋转壳的有限单元法

王 荣 亮

(新 中 华 机 器 厂)

**摘要** 本文用“等效”正交异性壳代替加筋旋转壳，采用六个自由度的锥壳元，考虑了加筋偏心的影响，对承受轴对称载荷，偏心密加筋（蒙皮内表面外表面或斜置对称方网格加强，肋条或正置正交网格加强肋条）的旋转壳进行分析，给出了变形、内力 and 应力计算方法。由于考虑了加筋偏心的影响，所以在内力与应变关系式中的弹性矩阵是满矩阵，这点是与其它分析加筋处理方法区别之处。

本文的计算程序能够计算母线形状、蒙皮厚度以及加筋沿母线方向任意变化的旋转壳对称弯曲问题。该计算方法在卫星运载结构强度计算中已被采用。最后文中还列出一些典型结构的计算结果。

## 一、单体划分和坐标系规定

加筋壳被分割成一系列的截锥段，每个锥段作为一个单体，单体之间以节点连接。于是加筋壳被近似地认为是由这些离散的截锥元所组成。单体节点选在蒙皮中面上，每个节点取三个自由度，一个单体有六个自由度，如图1所示。

旋转壳的加筋是斜置正方形网格或正置正交正方形网格，布置蒙皮一侧。加筋的截面形状可以是各种形式，如图2所示。

结构坐标系为  $XOR$ ，对应的单体节点位移用  $u_i, W_i, \beta_i, u_j, W_j, \beta_j$  表示，而单体坐标系为  $\bar{X}\bar{O}\bar{R}$ ，对应的单体节点位移用  $\bar{u}_i, \bar{W}_i, \bar{\beta}_i, \bar{u}_j, \bar{W}_j, \bar{\beta}_j$  表示。位移方向如图3所示。

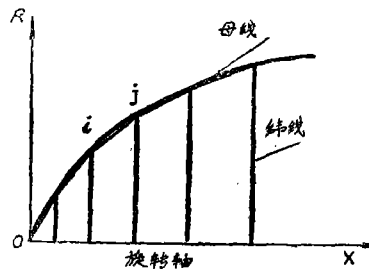


图 1

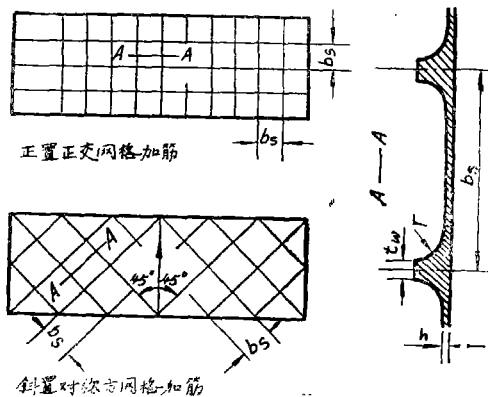


图 2

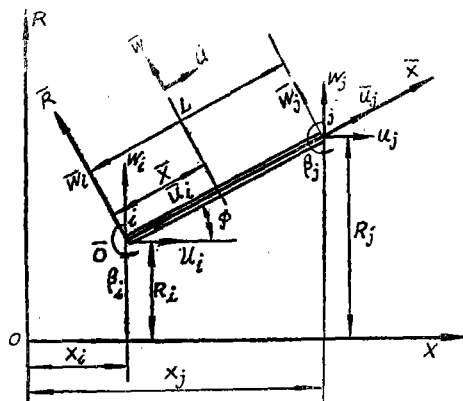


图 3

## 二、位移函数

$$\begin{cases} \bar{u} = a_1 + a_2 \bar{X} \\ \bar{W} = a_3 + a_4 \bar{X} + a_5 \bar{X}^2 + a_6 \bar{X}^3 \end{cases} \quad (1)$$

式中系数 $a_1 \sim a_6$ 由单体节点 $i$ 和 $j$ 的位移值求得:

$$\{a\} = [T]_{6 \times 6}^{-1} \{\bar{\delta}\}_{6 \times 1}^* \quad (2)$$

其中 $[T]^{-1}$ ,  $\{a\}$ 和 $\{\bar{\delta}\}$ 分别是

$$[T]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{L} & 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{L^2} & -\frac{2}{L} & 0 & \frac{3}{L^2} & -\frac{1}{L} \\ 0 & \frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} & 0 & -\frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \{a\} &= [a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5 \ a_6]^T \\ \{\bar{\delta}\}^* &= [\bar{u}_i \ \bar{W}_i \ \bar{\beta}_i \ \bar{u}_j \ \bar{W}_j \ \bar{\beta}_j]^T \end{aligned}$$

令 $[P_1] = [1 \ \bar{X}]$ ,  $[P_2] = [1 \ \bar{X} \ \bar{X}^2 \ \bar{X}^3]$ 代入(1)式, 于是位移函数又可写成

$$\begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{w} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 & O \\ O & P_2 \end{bmatrix}_{2 \times 6} [T]^{-1} \{\bar{\delta}\}^* \quad (3)$$

## 三、坐标变换

从图3可以看出, 节点在结构坐标系和单体坐标系中的位移分量有如下关系

$$\{\bar{\delta}\}^* = [\lambda] \{\delta\}^* \quad (4)$$

坐标变换矩阵为

$$[\lambda] = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 & & & \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ & & & \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ & & & -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

而 $\{\delta\}^* = [u_i \ W_i \ \beta_i \ u_j \ W_j \ \beta_j]^T$ 。(4)式代入(3)式, 位移函数写成用结构坐标系的节点位移表示。

$$\begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{W} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 & O \\ O & P_2 \end{bmatrix} [T]^{-1} [\lambda] \{\delta\}^* \quad (5)$$

## 四、应变—位移关系

对于轴对称情况和采用直母线锥壳元则有

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon^0\} + Z\{K\} \quad (6)$$

其中

$$\begin{aligned} \{\varepsilon\} &= [\varepsilon_\varphi, \varepsilon_\theta]^T \\ \{\varepsilon^0\} &= [\varepsilon_\varphi^0, \varepsilon_\theta^0]^T \\ \{K\} &= [K_\varphi, K_\theta]^T \\ \left( \begin{array}{l} \varepsilon_\varphi^0 = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{X}} \\ \varepsilon_\theta^0 = \frac{1}{R} (\bar{u} \sin \varphi + \bar{W} \cos \varphi) \\ K_\varphi = \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial^2 \bar{X}} \\ K_\theta = \frac{1}{R} \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{X}} \sin \varphi \end{array} \right) \end{aligned} \quad (7)$$

$\varepsilon_\varphi^0, \varepsilon_\theta^0$ —分别是蒙皮中面沿母线方向和圆周方向的线应变;

$\varepsilon_\varphi, \varepsilon_\theta$ —分别是非蒙皮中面沿母线方向和圆周方向的线应变;

$K_\varphi, K_\theta$ —分别是沿母线方向和圆周方向曲率变化;

$Z$ —壳内任一点到蒙皮中面距离, 其方向与 $\bar{R}$ 一致。

(3) 式代入 (7) 式, 得到以结构坐标系的节点位移表示的应变。

$$\{X\} = [\varepsilon_\varphi^0, \varepsilon_\theta^0, K_\varphi, K_\theta]^T = [B'] [T]^{-1} [\lambda] \{\delta\} \quad (8)$$

(4) 式代入 (8) 式, 又得到以单体坐标系的节点位移表示的应变。

$$\{X\} = [B'] [T]^{-1} \{\delta\} \quad (9)$$

式中

$$[B'] = \begin{pmatrix} P' & 0 \\ \frac{\sin \varphi}{R} P_1 & \frac{\cos \varphi}{R} P_2 \\ 0 & P_2'' \\ 0 & \frac{\sin \varphi}{R} P_2' \end{pmatrix}^{6 \times 6} \quad (10)$$

## 五、内力—位移关系

利用\*1已给出的正置加筋壳内力应变关系式, 再根据\*2正置加筋与斜置加筋两者内力、

\*1. 王荣亮: 加筋壳在轴压, 侧压以及轴侧压组合作用下的稳定性, 1973年。

\*2. 王荣亮: 斜置网格加筋筒壳在轴压, 侧压以及轴侧压组合作用下的稳定性。1975年。

应变之间关系式，经过转换后给出斜置加筋壳内力与节点位移关系式。

$\varphi', \theta'$  代表正置加筋壳经线和纬线方向坐标； $\varphi, \theta$  代表斜置加筋壳经线和纬线方向坐标。

正置加筋壳内力应变关系式

$$\{\bar{M}'\} = [D']\{X'\} \quad (11)$$

式中  $\{\bar{M}'\} = [N_{\varphi'}, N_{\theta'}, M_{\varphi'}, M_{\theta'}]^T$

$$\{X'\} = [\varepsilon_{\varphi}^0, \varepsilon_{\theta}^0, K_{\varphi'}, K_{\theta'}]^T$$

正置加筋壳与斜置加筋壳内力之间关系

$$\{\bar{M}\} = [A]\{\bar{M}'\} \quad (12)$$

式中

$$[A] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 \\ \text{对} & & 1 & 1 \\ & & \text{称} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\{M\} = [N_{\varphi}, N_{\theta}, M_{\varphi}, M_{\theta}]^T$$

正置加筋壳与斜置加筋壳应变之间关系

$$\{X'\} = [A]\{X\} \quad (13)$$

(13) 式代入 (11) 式，再将所得式子代入 (12) 式，得到斜置加筋壳内力应变关系式

$$\{\bar{M}\} = [D]\{X\} \quad (14)$$

(9) 式代入上式，得到所要求的斜置加筋壳内力位移关系式

$$\{\bar{M}\} = [D][B'] [T]^{-1} \{\bar{\delta}\} \quad (15)$$

式中

$$[D] = \begin{pmatrix} D_1 & D_2 & S & S \\ & D_1 & S & S \\ \text{对} & & B_1 & B_2 \\ & & \text{称} & B_1 \end{pmatrix} \quad \text{—斜置加筋壳弹性刚度矩阵}$$

$$\begin{pmatrix} D_1 = \frac{Eh}{1-\nu^2} + \frac{(1+\nu)EF}{2b_s} \\ D_2 = \frac{\nu Eh}{1-\nu^2} + \frac{(1+\nu)EF}{2b_s} \\ B_1 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} + \frac{(1+\nu)EI}{2b_s} \\ B_2 = \frac{\nu Eh^3}{12(1-\nu^2)} + \frac{(1+\nu)EI}{2b_s} \\ S = \frac{(1+\nu)ES_0}{2b_s} \end{pmatrix}$$

$S_0 = \sim \int Z dF$ —加筋截面对蒙皮中面静矩，取负值代表内加筋，取正值代表外加筋。

$I = \sim \int Z^2 dF$ —加筋截面对蒙皮中面惯性矩。

对于正置加筋壳内力位移关系式与 (15) 式类似

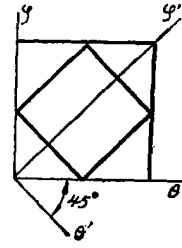


图 4

$$\{\bar{M}^1\} = [D'] [B'] [T]^{-1} \{\delta\}^e \quad (16)$$

式中

$$[D'] = \begin{pmatrix} D'_1 & D'_2 & S_1 & S_2 \\ & D'_1 & S_2 & S_1 \\ \text{对} & & B'_1 & B'_2 \\ & & & B'_1 \end{pmatrix} \quad \text{—正置加筋壳弹性刚度矩阵}$$

$$\left. \begin{aligned} D'_1 &= E \left( \frac{h}{1-\nu^2} + \frac{F}{b_s} \right) \\ D'_2 &= \nu E \left( \frac{h}{1-\nu^2} + \frac{F}{b_s} \right) \\ B'_1 &= E \left( \frac{h^3}{12(1-\nu^2)} + \frac{I}{b_s} \right) \\ B'_2 &= \nu E \left( \frac{h^3}{12(1-\nu^2)} + \frac{I}{b_s} \right) \\ S_1 &= \frac{FS_0}{b_s} \\ S_2 &= \frac{\nu FS_0}{b_s} \end{aligned} \right\}$$

从 (11) 式和 (14) 式看出, 由于考虑加筋偏心的影响, 弹性刚度矩阵  $[D']$  和  $[D]$  是满矩阵。如果不考虑加筋偏心的影响, 就是在矩阵  $[D']$  和  $[D]$  中分别令  $S_1, S_2$  和  $S$  等于零。

## 六、节点平衡方程

单体上作用有分布载荷  $P$  和集中载荷  $f$ , 如图 5 所示。

$$\{P\}^e = [P_u \quad P_v]^T \quad (17)$$

$$\{f\}^e = [\{f\}_i \quad \{f\}_j]^T \quad (18)$$

式中

$$\{f\}_i = [f_{xi} \quad f_{ri} \quad f_{\theta i}]^T$$

$$\{f\}_j = [f_{xj} \quad f_{rj} \quad f_{\theta j}]^T$$

在单体上施加任意假想的节点位移  $\{\delta^0\}^e$ , 则由 (5) 式可得单元体内任一点的位移为

$$\begin{aligned} \{\bar{f}^0\} &= \{\bar{u}^0 \quad \bar{w}^0\}^T = \\ &= \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} [T]^{-1} [\lambda] \{\delta^0\}^e \end{aligned} \quad (19)$$

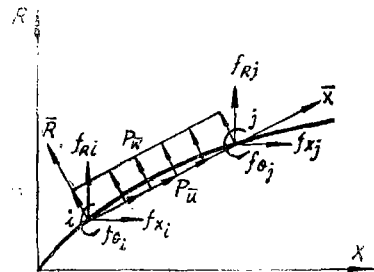


图 5

而对应的单元内任一点的假想应变由 (8) 式得

$$\{X^0\} = [B'] [T]^{-1} [\lambda] \{\delta^0\}^e \quad (20)$$

于是单体的内力在虚位移上做的功为

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} \int_0^L \{X^0\}^T \{\bar{M}\} R d\theta d\bar{X} \\ &= \int_0^L \{\delta^0\}^e{}^T ([B'] [T]^{-1} [\lambda])^T [D] [B'] [T]^{-1} [\lambda] \{\delta\}^e 2\pi R d\bar{X} \end{aligned}$$

单体分布载荷在虚位移上做的功为

$$\int_0^{2\pi} \int_0^L \{\bar{f}^0\}^T \{P\}^* R d\theta d\bar{X}$$

$$= \int_0^L \{\delta^0\}^* \left( \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} [T]^{-1} [\lambda] \right)^T \{P\}^* 2\pi R d\bar{X}$$

单体集中载荷在虚位移上做的功为

$$\{\delta^0\}^* \begin{bmatrix} 2\pi R_i \{f\}_i \\ 2\pi R_j \{f\}_j \end{bmatrix}$$

根据虚位移原理：整个结构上的内力功等于外力虚功。于是得到以节点位移作为未知量的平衡方程式

$$[K]\{\delta\} = \{F\} \quad (21)$$

式中  $[K] = \sum [K]^*$  — 结构刚度矩阵

$\{\delta\} = \sum \{\delta\}^*$  — 结构位移矩阵

$$[K]^* = \int_0^L ([B'] [T]^{-1} [\lambda])^T [D] [B'] [T]^{-1} [\lambda] R d\bar{X} \text{ — 单体刚度矩阵} \quad (22)$$

$\{F\}^* = \{F\}_i^* + \{F\}_j^*$  — 单体节点相当载荷矩阵

$$\{F\}_i^* = \int_0^L \left( \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} [T]^{-1} [\lambda] \right)^T \{P\}^* R d\bar{X} \text{ — 分布载荷引起的节点相当载荷}$$

$$\{F\}_j^* = \begin{bmatrix} R_i \{f\}_i \\ R_j \{f\}_j \end{bmatrix} \text{ — 集中载荷引起的节点相当载荷}$$

## 七、单体刚度矩阵

单体刚度矩阵  $[K]^*$  是  $6 \times 6$  的方阵，考虑对称性后，仍含有二十一个元素项。如果按文献 [1] 和 \*1 米那样，将每个元素项以显式给出，势必推演繁琐，而且式子很多，本文利用下面的关系式：

$$[P_1] = [\bar{X}]^{j-1}, \quad [P_1]^T = [\bar{X}]^{i-1} \quad i, j = 1, 2, \dots$$

$$[P_2] = [\bar{X}]^{j-1}, \quad [P_2]^T = [\bar{X}]^{i-1} \quad i, j = 1, 2, 3, 4, \dots$$

代入 (21) 式，经过推导得到

$$[K]^* = ([T]^{-1} [\lambda])^T \int_0^L \begin{bmatrix} K_{11,ij} & K_{12,ij} \\ \text{对} & \text{称} \\ & K_{22,ij} \end{bmatrix} R d\bar{X} [T]^{-1} [\lambda] \quad (23)$$

对于斜置加筋壳有

$$K_{11,ij} = \left\{ \frac{\sin \varphi}{R} \left[ \frac{D_1}{R} \sin \varphi + D_1 (i+j-z) \bar{X}^{-1} + D_1 (i-1) (j-1) \bar{X}^{-2} \right] \bar{X}^{i+j-2} \right. \\ \left. i, j = 1, 2 \right. \quad (24)$$

$$K_{12,ij} = \left\{ \frac{\cos \varphi}{R} \left[ \frac{D_1}{R} \sin \varphi + (i-1) D_2 \right] + (j-1) \bar{X} \right. \\ \left. \left[ \frac{\sin^2 \varphi}{R^2} \bar{X}^{-1} + (i-1) (j-1) \bar{X}^{-2} \right] \right\} \bar{X}^{i+j-2} \\ i = 1, 2; \quad j = 1, 2, 3, 4 \quad (25)$$

1\* 上海交通大学，有限单体法结构计算的程序汇编，1975，5。

$$\begin{aligned}
K_{22, ij} = & \left\{ \frac{D_1}{R_1} \cos^2 \varphi + \frac{(i+j-2)S}{R^2} \sin \varphi \cos \varphi \bar{X}^{-1} + \frac{(i-1)(j-1)B_1}{R^2} \sin^2 \varphi \right. \\
& + \frac{(i-1)(j-1)}{R} \cos \varphi + \frac{(j-1)(i-2)S}{R} \cos \varphi \bar{X}^{-2} \\
& + \frac{(i-1)(j-1)(i+j-4)B_2}{R} \sin \varphi \bar{X}^{-3} \\
& \left. + (i-1)(i-2)(j-1)(j-2)B_1 \bar{X}^{-4} \right\} \bar{X}^{i+j-4} \\
& i, j = 1, 2, 3, 4
\end{aligned} \quad (26)$$

对于正置加筋壳有

$$K_{11, ij} = \left[ \frac{D_1 \sin^2 \varphi}{R^2} + \frac{(i+j-2)D_2 \sin \varphi \bar{X}^{-1}}{R} + (i-1)(j-1) \bar{X}^{-2} \right] \bar{X}^{i+j-2} \quad (24)'$$

$i, j = 1, 2$

$$\begin{aligned}
K_{12, ij} = & \left[ \frac{D_1 \sin \varphi \cos \varphi}{R^2} + \frac{(i-1)D_2 \cos \varphi \bar{X}^{-1}}{R} + \frac{(j-1)S_1 \sin^2 \varphi \bar{X}^{-1}}{R^2} \right. \\
& \left. + \frac{(j-1)(i+j-3)S_2 \sin \varphi \bar{X}^{-2}}{R} + (i-1)(j-1)(j-2)S_1 \bar{X}^{-3} \right] \bar{X}^{i+j-2} \\
& i = 1, 2; j = 1, 2, 3, 4
\end{aligned} \quad (25)'$$

$$\begin{aligned}
K_{22, ij} = & \left\{ \frac{D_1 \cos^2 \varphi}{R^2} + \frac{(i+j-2)S_1 \sin \varphi \cos \varphi \bar{X}^{-1}}{R^2} + \frac{(i-1)(j-1) \sin^2 \varphi \bar{X}^{-2}}{R^2} \right. \\
& + \frac{[(i-1)(i-2) + (j-1)(j-2)]S_2 \cos \varphi \bar{X}^{-2}}{R} \\
& + \frac{(i-1)(j-1)(i+j-4)B_2 \sin \varphi \bar{X}^{-3}}{R} \\
& \left. + (i-1)(i-2)(j-1)(j-2)B_1 \bar{X}^{-4} \right\} \bar{X}^{i+j-2} \\
& i, j = 1, 2, 3, 4
\end{aligned} \quad (26)'$$

## 八、单体节点相当载荷矩阵

分布载荷：将  $P_1, P_2, [T]^{-1}, [\lambda]$  和  $R = R_i + (R_j - R_i)/L$  等代入  $\{F\}_e$ ，并积分得

$$\{F\}_e = \begin{pmatrix} P_{\bar{w}} \left( \frac{1}{3} R_i + \frac{1}{6} R_j \right) \cos \varphi - P_{\bar{w}} \left( \frac{7}{20} R_i + \frac{3}{20} R_j \right) \sin \varphi \\ P_{\bar{w}} \left( \frac{1}{3} R_i + \frac{1}{6} R_j \right) \sin \varphi + P_{\bar{w}} \left( \frac{7}{20} R_i + \frac{3}{20} R_j \right) \cos \varphi \\ P_{\bar{w}} L \left( \frac{1}{20} R_i + \frac{1}{30} R_j \right) \\ P_{\bar{w}} \left( \frac{1}{6} R_i + \frac{1}{3} R_j \right) \cos \varphi - P_{\bar{w}} \left( \frac{3}{20} R_i + \frac{7}{20} R_j \right) \sin \varphi \\ P_{\bar{w}} \left( \frac{1}{6} R_i + \frac{1}{3} R_j \right) \sin \varphi + P_{\bar{w}} \left( \frac{3}{20} R_i + \frac{7}{20} R_j \right) \cos \varphi \\ - P_{\bar{w}} L \left( \frac{1}{30} R_i + \frac{1}{20} R_j \right) \end{pmatrix} \quad (27)$$

集中载荷:

$$\{F\}_j^0 = [R_i f_{xi}, R_i f_{ri}, R_i f_{\theta i}, R_j f_{xj}, R_j f_{rj}, R_j f_{\theta j}]^T \quad (28)$$

## 九、边界条件

实际结构边界条件是各种各样的, 此处只给三种情况。

刚性约束: 限定约束的节点位移分量为零, 而刚度矩阵中相应的行和列去掉, 使该节点力不出现。

弹性约束: 节点的位移 $\delta_i$ 与该点支反力 $f_i$ 之间有下面关系:

$f_i = -K\delta_i$ ,  $K$ 是约束点刚度系数。在刚度矩阵中第 $K_{ii}$ 元素再附加上 $K$ 即可。

顶点条件: 母线与旋轴轴交点为顶点( $R=0$ )。根据顶点应变为有限值导出。

$$\bar{u} = \bar{\beta} = 0 \quad (\text{平顶点})$$

$$\bar{u} \sin \varphi + \bar{w} \cos \varphi = 0, \quad \bar{\beta} = 0 \quad (\text{尖顶点})$$

## 十、位移、内力和应力求值

有了结构刚度矩阵、载荷矩阵以及约束条件之后, 方程式(21)可以求解。其中积分 $\int f(S)ds$ 本文利用高斯数值积分

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k)$$

取 $n=6$ 已达到工程上允许的精度。

1) 单体中点位移, 当然也可以给出节点位移。

将 $\bar{S} = \frac{1}{2}L$ ,  $\bar{\beta} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial s}$ ,  $\{\bar{\delta}\}^0 = [\lambda]\{\delta\}$  代入(5)式, 给出中点位移。

$$\begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{w} \\ \bar{\beta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}(\bar{u}_i + \bar{u}_j) \\ \frac{1}{2}(\bar{w}_i + \bar{w}_j) + \frac{L}{8}(\bar{\beta}_i + \bar{\beta}_j) \\ \frac{3}{2L}(\bar{w}_j - \bar{w}_i) - \frac{1}{4}(\bar{\beta}_i + \bar{\beta}_j) \end{Bmatrix} \quad (29)$$

2) 单体中点内力

根据(15)式, 并以 $[B'']$ 矩阵取代 $[B]'$ 矩阵得:

$$\{\bar{M}\} = [D][B''] [T]^{-1} \{\bar{\delta}\}^0 \quad (30)$$

$$[B''] = \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2\sin\varphi}{R_i + R_j} & \frac{L\sin\varphi}{R_i + R_j} & \frac{2\cos\varphi}{R_i + R_j} & \frac{L\cos\varphi}{R_i + R_j} & \frac{L^2\cos\varphi}{2(R_i + R_j)} & \frac{L^2\cos\varphi}{4(R_i + R_j)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3L \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2\sin\varphi}{R_i + R_j} & \frac{2L\sin\varphi}{R_i + R_j} & \frac{3L^2\sin\varphi}{2(R_i + R_j)} \end{Bmatrix}$$

3) 单体中点应力

给出加筋壳中面、蒙皮表面和加筋条表面六个应力分量。首先计算截面的薄膜应力和弯曲应力分量。

$$\{\sigma\} = [\sigma_\varphi \quad \sigma_\theta \quad \sigma_{\varphi_1 \text{弯}} \quad \sigma_{\varphi_2 \text{弯}} \quad \sigma_{\theta_1 \text{弯}} \quad \sigma_{\theta_2 \text{弯}}]^T$$

$$= [S] \{\bar{M}'\} \quad (31)$$

$$[S] = \begin{pmatrix} \frac{1}{\bar{h}_1} & & & & & \\ & \frac{1}{\bar{h}_2} & & & & \\ & & \frac{1}{\bar{I}_{\varphi_1}} & & & \\ & & & \frac{1}{\bar{I}_{\varphi_2}} & & \\ 0 & & & & \frac{1}{\bar{I}_{\theta_1}} & \\ & & & & & \frac{1}{\bar{I}_{\theta_2}} \end{pmatrix}$$

$$\{\bar{M}'\} = [N_\varphi \quad N_\theta \quad M_\varphi \quad M_\varphi \quad M_\theta \quad M_\theta]^T$$

$\bar{h}_1$ —平均厚度； $\bar{I}$ —包含有效蒙皮加筋条断面系数。

对于不同加筋条截面形状， $\bar{h}$ 和 $\bar{I}$ 也不同，所以不能给出统一表达式来。

弯曲应力和薄膜应力叠加，得出单体中点截面六个应力分量：

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_{\varphi \text{中}} &= \frac{N_\varphi}{\bar{h}_1} \\ \sigma_{\theta \text{中}} &= \frac{N_\theta}{\bar{h}_2} \\ \sigma_{\varphi_1} &= \frac{N_\varphi}{\bar{h}_1} + \frac{M_\varphi}{\bar{I}_{\varphi_1}} \\ \sigma_{\varphi_2} &= \frac{N_\varphi}{\bar{h}_1} + \frac{M_\varphi}{\bar{I}_{\varphi_2}} \\ \sigma_{\theta_1} &= \frac{N_\theta}{\bar{h}_2} + \frac{M_\theta}{\bar{I}_{\theta_1}} \\ \sigma_{\theta_2} &= \frac{N_\theta}{\bar{h}_2} + \frac{M_\theta}{\bar{I}_{\theta_2}} \end{aligned} \right. \quad (32)$$

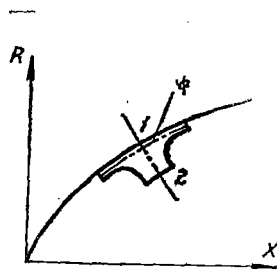


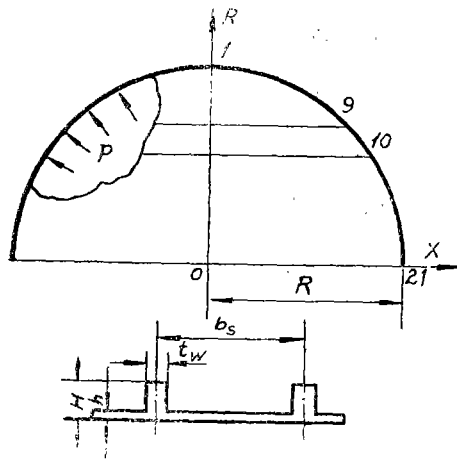
图 6

脚标“1”和“2”分别代表蒙皮和筋条表面，“中”代表蒙皮中面，如图6所示。

## 十一、计算实例

这里选八个实例，每个题只取二十个单体。为了和无矩理论计算结果比较，所以只列出部分典型截面计算值。

1) 斜置网格内加筋、外加筋和正置网格内加筋、外加筋的球壳内压计算 (四个算例)  
 这四个算例几何参数相同, 只是网格有斜置和正置, 内加筋和外加筋区别。载荷和材料也相同, 如图 7 所示。



几何参数:

$$R = 100 \text{ 厘米}$$

$$h = 1 \text{ 厘米}$$

$$H = 3 \text{ 厘米}$$

$$t_w = 2 \text{ 厘米}$$

$$b_s = 12.56 \text{ 厘米}$$

图 7

材料:  $E = 7 \times 10^5 \text{ 公斤/厘米}^2$

$$\nu = 0.3$$

载荷:  $P = 10 \text{ 公斤/厘米}^2$

加筋截面积以及它对蒙皮中面的静矩、惯性矩为

$$F = 4 \text{ 厘米}^2, \quad S_0 = 6 \text{ 厘米}^3, \quad I = 10.33 \text{ 厘米}^4$$

$$\text{平均厚度 } \bar{h} = h + \frac{2F}{b_s} = 1.637 \text{ 厘米}$$

由于轴对称, 所以只取球壳一半分析。半球壳按等圆弧长被分割成二十个单体, 如图 7 以示。

边界条件: 节点 1 按尖顶点条件处理:  $\bar{\beta} = 0, \bar{u} \sin \varphi + \bar{w} \cos \varphi = 0$ , 而节点 21 按对称轴条件处理,  $\bar{\beta} = 0, \bar{w} = 0$ , 计算结果在表 1 列出。

根据无矩理论, 壳体法向位移和中面内力解析解为

$$\bar{w} = \frac{PR^2}{2EH} (1 - \nu) = 3.055 \times 10^{-2} \text{ 厘米}$$

$$N_\varphi = N_\theta = \frac{PR}{2} = 500 \text{ 公斤/厘米}$$

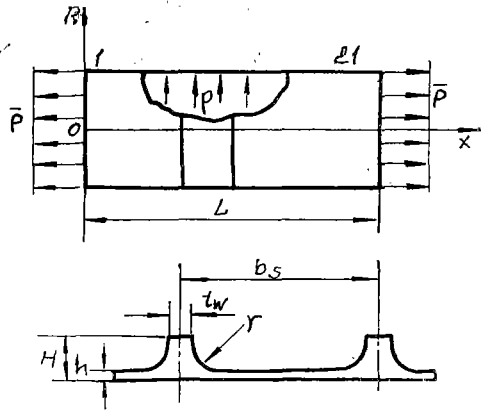
2) 斜置网格内加筋、外加筋和正置网格内加筋、外加筋的筒壳轴向拉伸和内压组合作用计算 (四个算例)。

这一组算例几何参数也相同, 只是网格有斜置和正置, 内加筋和外加筋区别。载荷和材料也相同, 如图 8 所示。

材料:  $E = 7 \times 10^5 \text{ 公斤/厘米}^2, \quad \nu = 0.3$

载荷:  $P = 1 \text{ 公斤/厘米}^2, \quad \bar{P} = 286.05 \text{ 公斤/厘米}$

加筋截面积以及它对蒙皮中面的静矩、惯性矩为



几何参数:

$$R = 167 \text{ 厘米}$$

$$L = 89.2 \text{ 厘米}$$

$$h = 0.23 \text{ 厘米}$$

$$r = 0.3 \text{ 厘米}$$

$$H = 1.15 \text{ 厘米}$$

$$t_w = 0.82 \text{ 厘米}$$

$$b_s = 11.9 \text{ 厘米}$$

图 8

$$F = 0.793 \text{ 厘米}^2, S_0 = 0.4407 \text{ 厘米}^3, I = 0.304 \text{ 厘米}^4$$

筒壳被均匀分割成二十个单体, 如图 8 所示。

边界条件: 节点 1 和壳体 21 母线方向和法线方向位移等于零, 即  $\bar{u} = \bar{w} = 0$  计算结果在表 2 列出。

无矩理论给出的环向中面内力为  $N_\theta = PR = 167 \text{ 公斤/厘米}$

从表 1 和 2 列出的计算结果可知: 内力  $N$  两种方法计算结果比较一致; 而位移  $\bar{w}$  相差比较大, 估计主要是用无矩理论计算取的平均厚度不合理造成的。

表 1 加筋球壳内压计算结果

类型	节点	数值	符号	位 移			内 力			
				$\bar{u}$ (厘米)	$\bar{w}$ (厘米)	$\bar{\beta}$ (弧度)	$N_\varphi$ (公斤/厘米)	$N_\theta$ (公斤/厘米)	$M_\varphi$ (公斤·厘米/厘米)	$M_\theta$ (公斤·厘米/厘米)
斜置外加筋	9	$0.1611 \times 10^{-4}$		$0.3885 \times 10^{-1}$		$-0.6917 \times 10^{-5}$	499.6	500.6	-0.2974	-0.2623
	10	$0.4902 \times 10^{-5}$		$0.3875 \times 10^{-1}$		$-0.7659 \times 10^{-5}$	499.8	500.1	0.1179	0.1118
斜置内加筋	9	$-0.1545 \times 10^{-4}$		$0.3857 \times 10^{-1}$		$0.9479 \times 10^{-5}$	499.5	498.6	0.1817	0.1567
	10	$-0.3479 \times 10^{-5}$		$0.3864 \times 10^{-1}$		$0.9008 \times 10^{-5}$	499.6	499.1	-0.2091	-0.1948
正置外加筋	9	$-0.6425 \times 10^{-6}$		$0.3871 \times 10^{-1}$		$0.3422 \times 10^{-4}$	499.6	499.6	129.5	77.68
	10	$0.2557 \times 10^{-5}$		$0.3871 \times 10^{-1}$		$0.6328 \times 10^{-4}$	499.6	499.6	129.5	77.69
正置内加筋	9	$-0.1503 \times 10^{-5}$		$0.3871 \times 10^{-1}$		$0.3315 \times 10^{-5}$	499.6	499.6	129.5	-77.68
	10	$-0.4374 \times 10^{-6}$		$0.3871 \times 10^{-1}$		$0.6166 \times 10^{-5}$	499.6	499.6	-129.5	-77.69
无矩理论结果					$0.3055 \times 10^{-1}$		500	500		

表 2 加筋筒壳轴向拉伸和内压组合作用计算结果

类型	节点	数值 符号	位 移			内 力			
			$\bar{u}$ (厘米)	$\bar{w}$ (厘米)	$\bar{\beta}$ (弧度)	$N_{\varphi}$ (公斤/厘米)	$N_{\theta}$ (公斤/厘米)	$M_{\varphi}$ (公斤·厘米/厘米)	$M_{\theta}$ (公斤·厘米/厘米)
斜置外加筋	9		$0.46 \times 10^{-3}$	0.1378	$-0.3369 \times 10^{-3}$	64.28	168.2	0.6235	0.5072
	10		$0.2674 \times 10^{-3}$	0.1369	$-0.1049 \times 10^{-3}$	64.29	167.1	0.660	0.6322
斜置内加筋	9		$0.294 \times 10^{-3}$	0.1379	$-0.3838 \times 10^{-3}$	64.85	168.4	0.6669	0.6388
	10		$0.1141 \times 10^{-3}$	0.1367	$-0.1347 \times 10^{-3}$	64.85	167.3	0.7061	0.6764
正置加外筋	9		$0.461 \times 10^{-3}$	0.1291	$-0.3616 \times 10^{-3}$	42.56	168.3	-0.8316	6.223
	10		$0.1522 \times 10^{-3}$	0.1280	$-0.121 \times 10^{-3}$	42.56	167.1	-0.7522	6.196
正置内加筋	9		$-0.5712 \times 10^{-3}$	0.1264	$-0.3297 \times 10^{-3}$	54.43	169.1	0.8254	-6.093
	10		$-0.4042 \times 10^{-3}$	0.1254	$-0.1154 \times 10^{-3}$	54.43	167.9	0.8978	-6.018
无矩理论结果							167		

参 考 文 献

[1] P. E. Grafton, R. Stiroml, JAIAA 1963, 1, 2342.