

# 弹塑性接触问题的全量初应力解法

姜晋庆 尚世英

(西北工业大学)

**摘要** 弹塑性接触问题是几何和材料联合的非线性问题,解题过程必须交替进行两类非线性的迭代计算,使计算工作量十分庞大,所以寻求更加有效的计算方法,以便减少机时消耗,当然会引起人们的兴趣。本文提出在弹塑性接触问题的全量变刚度分析的基础上改用全量初应力的方法,可以有效地利用这两类非线性迭代的耦合作用,减少迭代次数,提高机时效用,为弹塑性接触问题的全量分析提供一种快速的计算方法。

## 一、引言

对于一般的弹塑性接触问题,我们在文献〔1〕中提出一种应用塑性全量理论和带有接触条件的单纯形法相结合的分析方法,解决了不考虑摩擦,没有卸载情况的弹塑性接触问题。由于这类问题属于几何和材料联合的非线性问题,解题过程必须交替进行这两类非线性的迭代计算,使计算工作量十分庞大,所以有必要对处理这类问题的方法的有效性和快速性进行深入探讨。文献〔1〕在处理接触问题时采用了T. F. Conry〔2〕提出的带有接触条件的单纯形法,通过一种处理线性规划问题的标准格式,直接求出了接触应力、刚体接近量等接触参数,避免了一般有限元法解接触问题时所遇到的繁琐迭代过程,表现出一定的快速性。在处理塑性问题时采用了文献〔3〕介绍的全量变刚度法,虽然这是应用塑性全量理论解题的最基本方法,它具有精度高、适应性强等优点,但由于每次迭代均需重新形成和分解总刚阵,所以具有机时消耗量大的缺点。在两种非线性交替迭代的过程中,尽管文献〔1〕注意了利用它们之间的耦合作用,以求尽量减少迭代次数,但正如文中所指出“当进入塑性程度较大时,迭代次数显著增加,收敛太慢,致使机时消耗过大,经济性不够理想”所以有必要寻求更加有效的方法。

文献〔3〕介绍了进行结构弹塑性全量分析的初应力法,它每次迭代均使用固定不变的弹性总刚阵作为方程组的系数矩阵,消除了因每次迭代形成并分解总刚阵而消费机时过多的弊病。另外,考虑到接触问题的迭代是使接触中心区应力下降的过程,它可以和弹塑性全量分析中受力中心区应力逐渐增加的作用相互抵消,从而可以部分解决全量初应力法当其迭代接近真实应变时收敛性变坏的缺点。所以采用初应力法和单纯形法相结合的方法进行全量弹塑性接触分析定会显示出它的有效性和快速性。

本文作为文献〔1〕的改进和补充,其目的就是在带有接触条件的单纯形法的基础上推导出带有初始塑性位移的形式,以便与全量初应力法相配合,并探讨一种使两类非线性迭代有效地进行耦合的形式。从而使整个解题过程的速度有所改善。

最后,为验证本文所提出的方法的有效性,利用按照该方法所编制的FORTRAN—IV

程序,对文献〔1〕所计算过的Hertz问题进行了计算和对比,完全取得了预期的结果,可以认为该方法和程序完全适用于一般工程中所遇到的弹塑性接触问题。

## 二、塑性全量理论的初应力法

应用塑性全量理论进行结构的弹塑性分析的依据和基本公式,在文献〔1〕中已作了介绍。本文所要采用的初应力法在文献〔3〕中已经给出,其基本公式和步骤摘录如下:

1, 划分单元, 赋初值。

2, 形成弹性总刚阵 $[K]_e$ , 并运用位移边界条件后分解(或求逆), 得到总柔阵 $[K]_e^{-1}$ 。

3, 由前次迭代所得到的位移 $\{u\}$ (第一次可取 $\{u\}=0$ ), 取出每个单元的节点位移 $\{u\}_e$ , 按下述公式求得其等效塑性初应力节点载荷 $\{P_e\}_e$ 。

$$\{P_e\}_e = - \int_V [B]^T ([D]_e - [D]_p) [B] dV \cdot \{u\}_e \quad (2.1)$$

其中,  $[B]$  为单元的几何矩阵,  $[D]_e$  为材料的弹性矩阵,  $[D]_p$  为材料的弹塑性矩阵, 它由该单元当时所处的应力水平所决定。以上各量的具体表达式可参阅文献〔3〕。

4, 对进入塑性的各单元叠加求得总的塑性初应力节点载荷矢量 $\{P_e\}$

$$\{P_e\} = \sum_{\text{塑性元}} \{P_e\}_e \quad (2.2)$$

5, 按以下迭代公式求得各次迭代的位移结果

$$\{u\} = \{u_e\} + \{u_p\} = [K]_e^{-1} \{P\} + [K]_e^{-1} \{P_e\} \quad (2.3)$$

其中

$$\{u_e\} = [K]_e^{-1} \{P\} \quad (2.4)$$

为在给定外载荷 $\{P\}$ 作用下求出的弹性位移, 它一旦求出后便不再改变, 而

$$\{u_p\} = [K]_e^{-1} \{P_e\} \quad (2.5)$$

为在等效的塑性初应力节点载荷作用下产生的位移, 称为“塑性位移”, 在各次迭代中它将随着 $\{P_e\}$ 的改变而改变。

6, 判定两次相邻迭代求得的位移相对差值是否达到精度要求, 若尚未达到则回到第三步开始下一次迭代计算。在迭代过程中由于随着材料进入塑性的程度不同而使 $\{P_e\}$ 有所改变, 从而 $\{u_p\}$ 和 $\{u\}$ 也在不断改变, 直到达到其精度要求, 则认为 $\{u\}$ 收敛到接近其真实结果, 即计算结束。

有关全量初应力法的其他计算细节可参阅文献〔3〕。

## 三、带有塑性位移的单纯形法公式

为了利用线性规划中的单纯形法解没有摩擦的弹性接触问题, 对于图1所示的接触体系, 文献〔2〕给出如下的一组基本方程:

连续条件

$$-[F]^c \{R\}^c + \alpha \{e\} + [I] \{\delta\}^c = \{\delta_0\}^c \quad (3.1)$$

平衡条件

$$\{e\}^T \{R\}^c = P \quad (3.2)$$

接触准则

$$\left. \begin{aligned} R_k &\geq 0 \text{ (当 } u_k = 0 \text{ 时)} \\ R_k &= 0 \text{ (当 } u_k > 0 \text{ 时)} \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

非负性约束条件

$$\left. \begin{aligned} R_k &\geq 0, \delta_k \geq 0 \text{ (} K = 1, 2, \dots, n \text{)} \\ \alpha &\geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

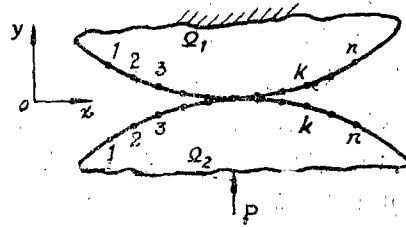


图 1

其中,  $[F]^c$  为接触体系中与可能接触节点对相对应的柔度系数所组成的系数矩阵;  $[R]^c$  为接触节点力, 由于作用在两个接触体上的接触节点力大小相等, 方向相反, 所以统一用  $\{R\}^c$  来表示, 并用  $\Omega_2$  的接触节点力的方向来表示其正向;  $\alpha$  为刚体接近量;  $\{\delta_0\}^c$ 、 $\{\delta\}^c$  分别为各可能接触点对的初始间距和受力后的实际间距;  $\{e\}$ 、 $[I]$  分别为单位列矢量和单位矩阵; 而以上各量的上标  $C$  则表示对应于  $n$  个可能接触节点对的。

对于上述基本方程, 按文献 [4] 提供的解一般线性规划的计算方案和流程, 便可直接解出  $\{R\}^c$ 、 $\alpha$ 、 $\{\delta\}^c$  等有关的接触参数。

下面推导适合于全量初应力法的单纯形法基本方程。

由于上面给出的弹性接触问题的基本方程中除 (3.1) 式以外其它均与材料性态无关, 所以在考虑材料的塑性问题以后不会改变。现在仅考虑 (3.1) 式中左边第一项, 它代表各可能接触点对的相对位移量

$$\{u\}^c = [F]^c \{R\}^c \quad (3.5)$$

而实际上则是两个接触物体单独在接触节点力  $\{R\}^c$  作用下所产生的节点相对位移量  $\{u\}$ , 在这里只是取用了对应于可能接触节点对的相应值 (所以加上标  $C$ )。由于在  $\{R\}^c$  作用下总的节点相对位移量为

$$\{u\} = \{u_1\} - \{u_2\} = ([K_1]^{-1} + [K_2]^{-1}) \{R\} \quad (3.6)$$

从中便可以看出它与材料性态有关。当接触区有局部进入塑性以后, 由于材料性态的改变,  $[K_1]$ 、 $[K_2]$  将随之发生变化, 也就意味着为求得与之相对应的  $\{u\}$ , 必须重新形成和分解总刚阵。现在为适应全量初应力法对右端项进行调节以代替对总刚阵进行修正的处理方式, 可将 (3.6) 式按 (2.3) 式的形式改写为

$$\begin{aligned} \{u\} &= (\{u_{e1}\} + \{u_{p1}\}) - (\{u_{e2}\} + \{u_{p2}\}) \\ &= ([K_1]^{-1} + [K_2]^{-1}) \{R\} + \{u_{p1}\} - \{u_{p2}\} \end{aligned} \quad (3.7)$$

从而, 对应于可能接触节点对的相对位移量也可改写为

$$\{u\}^c = [F]^c \{R\} + \{u_{p1}\}^c - \{u_{p2}\}^c \quad (3.8)$$

在这里称

$$\{u_p\}^c = \{u_{p1}\}^c - \{u_{p2}\}^c \quad (3.9)$$

为“塑性位移”, 其物理意义可以看作是材料进入塑性后由于性态的改变而引起的可能接触节点对初始间距所产生的附加改变量。这样 (3.1) 式也就可以改写为带有塑性位移的连续条件

$$-[F]^c \{R\}^c + \alpha \{e\} + [I] \{\delta\}^c = \{\delta_0\}^c + \{u_p\}^c \quad (3.10)$$

其中,  $[F]^c$  便只是关于可能接触点对弹性柔度系数, 它们在一且形成之后便不再改变, 而用调整右端项来实现由于材料性态的改变对接触问题所产生的影响。

最后, 我们进一步来探讨一下 (3.10) 式的物理意义。把 (3.10) 式右端项记为

$$\{\bar{\delta}_0\}^0 = \{\delta_0\}^0 + \{u_p\}^0 \quad (3.11)$$

称作带有塑性位移的“相当初始间距”，它可以很明显地在图2上表示出来。图中的实线表示原来的接触问题，它可以给出(3.1)式的连续条件，但由于随着外载的增加，材料局部进入塑性将引起 $[F]^0$ 的改变。而图中的虚线则表示采用(3.10)式的情况，这时材料状态改变所起的作用由塑性位移项 $\{u_p\}^0$ 来代替， $[F]^0$ 改用 $[F]^0$ ，不再随外载的增加而有所改变，于是接触体系相当的初始接触状态变为在初始间距上增加了一个塑性位移的量值，与纯弹性计算相比较，其所起的作用必然是使刚体位移量增加和接触区宽度加大，这一点也正是为后来的计算结果所证实。

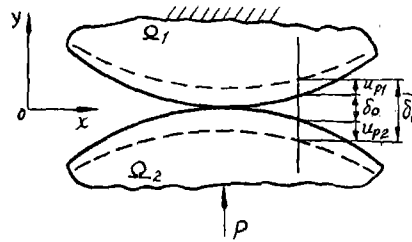


图 2

#### 四、弹塑性接触问题的全量初应力解法

采用全量初应力法和带有塑性位移的单纯形法解弹塑性接触问题，实质上就是分别在前述两类非线性处理方法的基础上交替进行迭代计算。在这里，基本的方法是把单纯形法放在初应力迭代之前，即在(3.10)式中先取 $\{u_p\} = 0$ ，按第三节的单纯形法公式解出一个纯弹性的接触问题。当求出接触节点力后，即以此作为外载荷按第二节的初应力法迭代计算，求得 $\{u\}$ 及 $\{u_p\}$ ，于是从中取出 $\{u_p\}^0$ ，则可再按(3.10)式求出其弹塑性接触节点力，从而实现了整个弹塑性接触问题的交替迭代运算。

两类非线性迭代交替进行，相互要利用对方的计算结果，二者便必然有耦合作用。按照其耦合作用的强弱可以有两种交替的方式。第一种是尽量减弱其耦合作用，各自都利用对方的迭代终值。它实际上是对于一定的接触节点力把塑性迭代进行完毕，求出其最终的塑性位移值，据此再开始下一次接触迭代。显然，这种方式总的交替次数较少，而初应力迭代次数必然增多。另一种是尽量加强其耦合作用，也就是对应于一定的接触节点力，当塑性迭代中求出其第一次塑性位移值时即作为下次接触运算的初值，开始交替，这样可以充分利用整个运算过程中接触迭代使中心区应力下降而塑性迭代使之增加的作用，发挥互为补充的妙用，从而塑性位移可以更快地收敛到其真实状态的水平上。表1给出了按照上述两种方式所编制的程序在两圆柱弹塑性接触计算中迭代次数和机时消耗的对比情况。由表中可以看出采用强耦合方式比较合理，下面仅给出这种强耦合方式的计算框图（见图3）。

表1

项目 方式	交替次数	单纯形法次数	初应力迭代 总计次数	机时消耗(秒)
强耦合	7	7	7	210.0
弱耦合	3	3	54	663.7

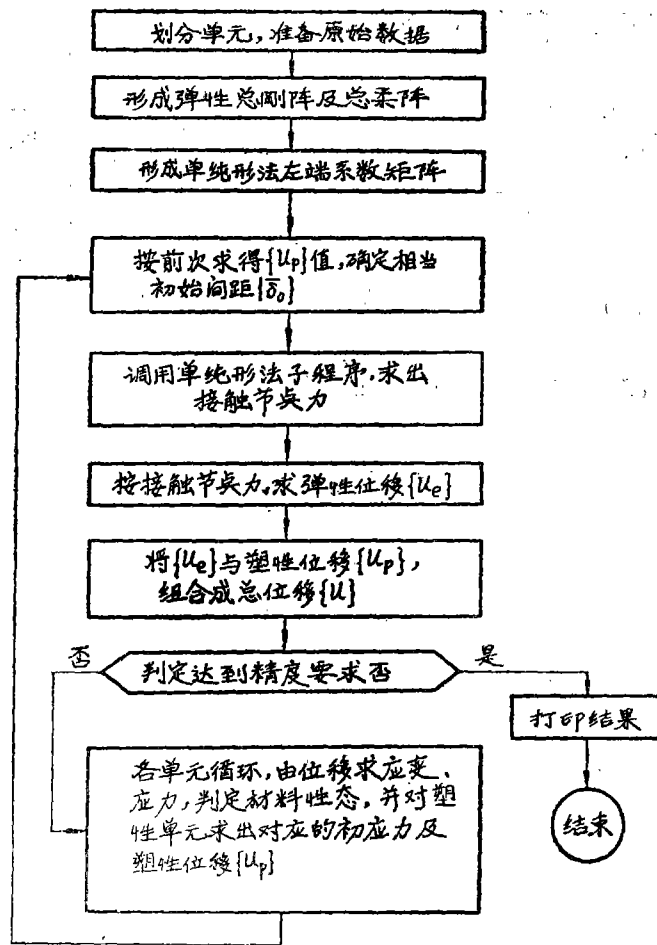


图 3

## 五、计算例题及结论

为验证本文所提供的方法和程序的可靠性和有效性, 我们对文献〔1〕所提出的两圆柱的接触问题进行了计算, 所取接触体系的结构简图及原始参数与文献〔1〕相同, 其接触区压力分布及沿接触区深度应力分布的计算结果及对比情况见图 4, 与全量割线刚度法进行计算所需的迭代次数及时消耗的比较见表 2。

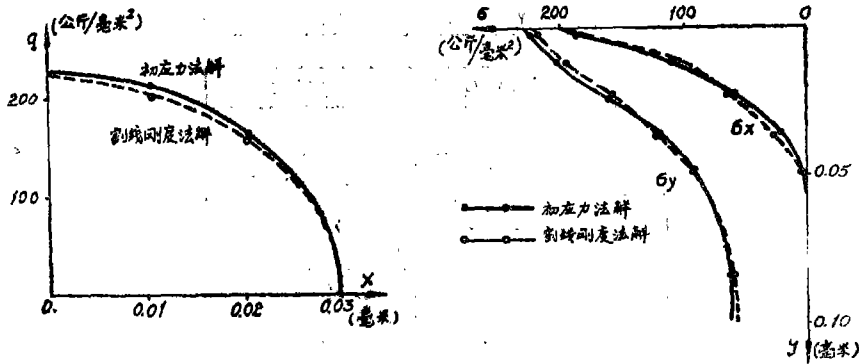
表 2

方 法	总迭代次数	机时消耗 (秒)
全量割线刚度法	5	485.6
全量初应力法	7	210.0

从以上对比情况可以看出, 两种方法的计算结果完全吻合, 从而证明了这种方法的可靠性。从机时消耗对比可以看出, 采用初应力法可以比割线刚度法节约一半以上的机时, 并且

当进入塑性的程度愈大时，这种方法的经济效果会愈加显著。

本文是在许玉赞教授亲切指导下完成的。



(a) 接触区压力分布

(b) 沿接触深度应力分布

图 4

### 参 考 文 献

1. 姜晋庆、竺润祥、尚世英；光学机械，1981，6，
2. T.F.Conry, A.Seireg; J.Am.ASWE.1971,38, No.2,387—390,
3. 姜晋庆；航空科技文献，1982.第37期，
4. Dantzig,G.W.;《Linear Programming and Extensions》,1963.