

# 圆光栅的莫尔条纹

朱应时

**摘要：**文中作者推导出了两块相同角栅距的圆光栅配对时产生莫尔条纹的轨迹方程。接着又介绍圆光栅产生“直形”莫尔条纹和圆环形莫尔条纹的条件。最后，提出了莫尔条纹宽度的分布规律。

我们把两块角栅距相接近的圆光栅面对面叠在一起时，在光线的照明下，能看到按一定规律分布的明暗相间的条纹，这种条纹称为圆光栅的莫尔条纹。

近年来，利用圆光栅产生莫尔条纹的这一特性成功地研制了高精度和高分辨率的圆分度设备<sup>[1][2]</sup>，因此对圆光栅及其产生的莫尔条纹引起了重视。由于从圆光栅中能取得近似正弦的莫尔条纹光电信号<sup>[3]</sup>，因而通过电子学方法可以把位移量转换成数字信息量、模拟信息量、数字和模拟相结合的信息量，这就给自动测量和控制角位移提供了条件。目前已经成功地把圆光栅用在测量滚齿机的传动链精度、自动校准滚齿机的传动误差、动态测量齿轮误差<sup>[4]</sup>、控制圆分度机<sup>[5]</sup>、测量光学玻璃的折射率<sup>[6]</sup>、测量角速度<sup>[7]</sup>以及自动测量和控制角位移的设备上<sup>[8]</sup>。

为了更好地使用圆光栅，必须知道圆光栅的莫尔条纹的轨迹和莫尔条纹宽度的分布规律。为此，本文讨论一下两块等角栅距圆光栅无误差时配对产生的莫尔条纹轨迹和条纹宽度的分布规律。

## 一、圆光栅的莫尔条纹轨迹

### 1. 圆光栅及其术语

圆光栅是一种在玻璃圆盘表面的一个圆环形区域上刻有大量均匀分布的、透明和不透明相间的圆分度元件，由于其刻线呈辐射状的，又称辐射光栅（图1）。在实际应用中，圆光栅又分为中心辐射圆光栅（图1a）和非中心辐射圆光栅（图1b）。

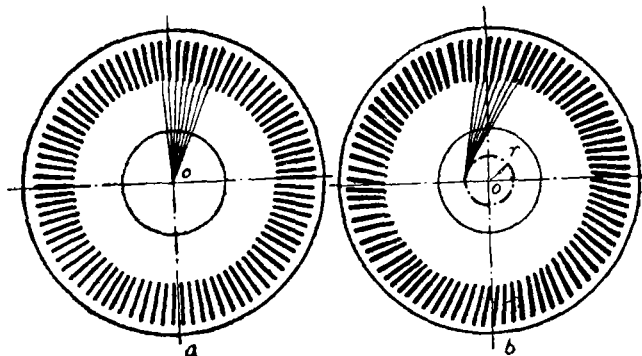


图 1

在中心辐射圆光栅中，刻线延长线都交于O点，此点称圆光栅中心；在非中心辐射圆光栅中，刻线的延长线都切于半径为r的小圆，此小圆的圆心也是圆光栅的中心。从圆光栅的中心到刻线区域的距离称为圆光栅半径（圆光栅的外径、中径和内径都是圆光栅半径的特殊情况），用R表示。在非中心辐射圆光栅中，根据刻线和小圆相切的方向不同，可分为左切非

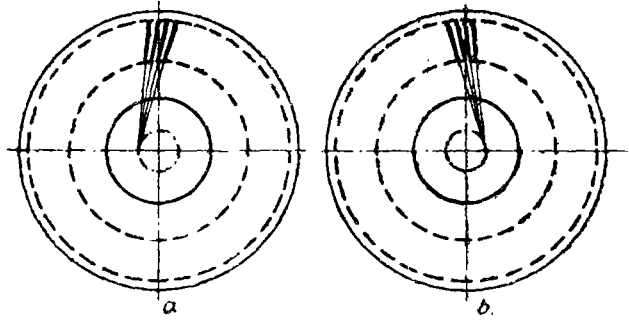


图2

中心辐射圆光栅（简称左切圆光栅）和右切非中心辐射圆光栅（简称右切圆光栅）（见图2）。

圆光栅的相邻两条刻线之间的夹角称为圆光栅的角栅距，用 $\delta$ 表示（单位为弧度）；相邻两条刻线之间占有的弧长称为圆光栅的线栅距，用 $w$ 表示；圆光栅的全周刻线总数用 $n$ 表示。 $n$ 、 $\delta$ 和 $w$ 三者有下列关系：

$$\left. \begin{aligned} \delta &= \frac{2\pi}{n} \\ w &= \delta R \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

当两块圆光栅配对使用时，它们的中心不一定重合，其中心间的距离称为中心距，用 $e$ 表示。

### 2. 圆光栅的莫尔条纹轨迹

对一般的计量光栅而言，明亮的莫尔条纹轨迹就是两块光栅刻线交叉点的连线的轨迹。推导圆光栅的莫尔条纹轨迹方程的方法有多种<sup>[3][12][13]</sup>，本文采用一种比较简单的方法：即在等角栅距的两块圆光栅产生的莫尔条纹上，刻线交叉角是等值的，根据此等值原理可推导出莫尔条纹的轨迹方程。具体推导简述如下。

设相互配对两块圆光栅：一块为 $G_I$ ，另一块为 $G_{II}$ 。 $G_I$ 的刻线序号（按顺时针方向排列）为0、1、2、……（ $n-1$ ）（为了使序数连续，使 $n-1=-1, n-2=-2, \dots$ ）。 $G_{II}$ 的刻线序号（按反时针方向排列）亦为0、1、2、……（ $n-1$ ）。两块圆光栅中心距的中点为极坐标的原点O，OX为极轴（见图3）。两块都是左切（或都是右切）的圆光栅面对面叠在一起， $G_I$ 中的序号0刻线和 $G_{II}$ 中的0刻线的交点为 $P_{(0,0)}$ ，正好与OX极轴重合，其他序号刻线的交点分别为 $P_{(1,1)}$ 、

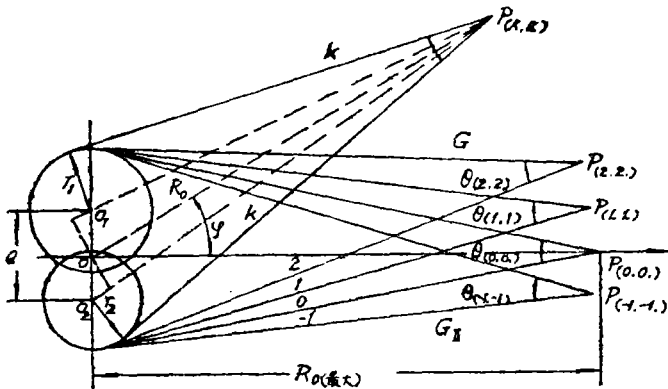


图3  $O_1$ 为 $G_I$ 的中心， $O_2$ 为 $G_{II}$ 的中心。

$P_{(2,2)} \dots P_{(k,k)} \dots$ 。这些刻线交点的夹角为 $\theta_{(0,0)}$ 、 $\theta_{(1,1)}$ 、 $\theta_{(2,2)}$ 、…… $\theta_{(k,k)}$ ……。根据莫尔条纹轨迹就是光栅刻线交点连线的轨迹的原理可知 $P_{(0,0)}$ 、 $P_{(1,1)}$ 、 $P_{(2,2)} \dots P_{(k,k)} \dots$ 连线就是圆光栅的莫尔条纹轨迹之一，由于两块光栅刻线的序号之差为0称为0条纹，交点至坐标原点的距离为 $R_0$ ，在轨迹上取 $P_{(k,k)}$ 点， $P_{(k,k)}$ 点刻线夹角为 $\theta_{(k,k)}$ ，根据图3可建立下列近似关系：

$$\theta_{(k, k)} = \frac{1}{R_0} (|r_1 \pm r_2| + e \cos \varphi) \dots\dots\dots (2)$$

其中数值  $|r_1 \pm r_2|$ , 在圆光栅的切向相同时为  $r_1 + r_2$ , 切向相反时为  $r_1 - r_2$ , 为了计算方便和符合使用条件, 以下采用切向相同的条件。从图 3 中很易证得:

$$\theta_{(0, 0)} = \theta_{(1, 1)} = \theta_{(2, 2)} = \dots\dots\dots = \theta_{(k, k)} = \theta_0$$

因此式 (2) 可写成

$$R_0 = \frac{1}{\theta_0} (r_1 + r_2 + e \cos \varphi) \dots\dots\dots (3)$$

当  $\varphi = 0$  时, 可得  $\theta_0 = \frac{r_1 + r_2 + e}{R_{0(m_{0,2})}}$ , 将它代入 (3) 式便得

$$R_0 = \frac{R_{0(m_{0,2})}}{r_1 + r_2 + e} (r_1 + r_2 + e \cos \varphi) \dots\dots\dots (4)$$

方程 (4) 就是序号 0 莫尔条纹的轨迹方程, 其中  $R_{0(m_{0,2})} = OP_{(0,0)}$

在序号  $k$  莫尔条纹轨迹上, 也同样可建立如下的关系:

$$R_k = \frac{1}{\theta_k} (r_1 + r_2 + e \cos \varphi) \dots\dots\dots (5)$$

其中  $R_k$ ——从座标原点至序号为  $k$  的莫尔条纹轨迹上距离。

$\theta_k$ ——位于序号  $k$  条纹上两块圆光栅刻线的夹角, 其值为一常量。

根据图 3 可以求得:

$$\theta_k = \theta_0 + k\delta = \frac{r_1 + r_2 + e + k\delta R_{0(m_{0,2})}}{R_{0(m_{0,2})}} \dots\dots\dots (6)$$

其中  $k = \dots\dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \dots\dots$ 。

将 (6) 式代入 (5) 式便得下列序号  $k$  莫尔条纹的轨迹方程:

$$R_k = \frac{e R_{0(m_{0,2})}}{r_1 + r_2 + e + k\delta R_{0(m_{0,2})}} (\beta + \cos \varphi) \dots\dots\dots (7)$$

方程 (7) 是以  $R_k$  和  $\varphi$  为变量的极坐标形式的曲线方程, 对应一个  $k$  值, 就有一条莫尔条纹的轨迹曲线, 因此在一定的两块圆光栅配对时, 在偏心距  $e$  一定的情况下, 方程 (7) 表示着一族莫尔条纹轨迹。

对于一定的一对圆光栅而言, 莫尔条纹的形状和偏心距  $e$  有着密切的关系。为了便于分析计算, 令  $(r_1 + r_2)/e = \beta$ , 因此将 (7) 式可写成下列形式:

$$R_k = \frac{e R_{0(m_{0,2})}}{r_1 + r_2 + e + k\delta R_{0(m_{0,2})}} (\beta + \cos \varphi) \dots\dots (7a)$$

对于一定的圆光栅,  $r_1$  和  $r_2$  为固定值, 故  $\beta$  只和  $e$  成反比, 不同的  $\beta$  值对应应有不同形状的莫尔条纹轨迹。图 4 所示, 在不同的  $\beta$  值时, 由方程 (7a) 所作出的莫尔条纹轨迹。很明显, 当  $\beta$  值增大 (即  $e$  减小) 时, 条

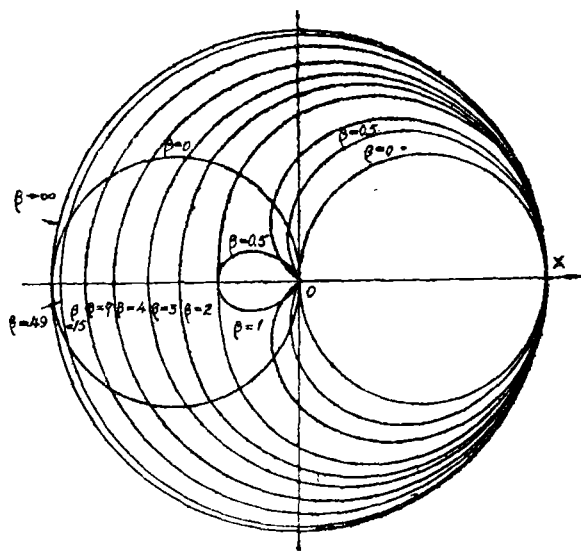


图 4 不同  $\beta$  值时的莫尔条纹轨迹

纹的轨迹逐渐地趋近于圆。

### 3. 几种特殊的莫尔条纹轨迹

(1) 偏心距等于小圆半径之和, 即  $\beta = 1$ 。(7a) 式变成

$$R_k = \frac{eR_{0(max)}}{r_1 + r_2 + e + k\delta R_{0(max)}} (1 + \cos \varphi) \dots \dots \dots (8)$$

在此特殊条件下, (8) 式表明莫尔条纹轨迹是一族心脏曲线, 条纹轨迹在  $\varphi = 180^\circ$  处都经过极坐标原点(图 4,  $\beta = 1$  曲线)。图 5 是接近心脏曲线的莫尔条纹录影。

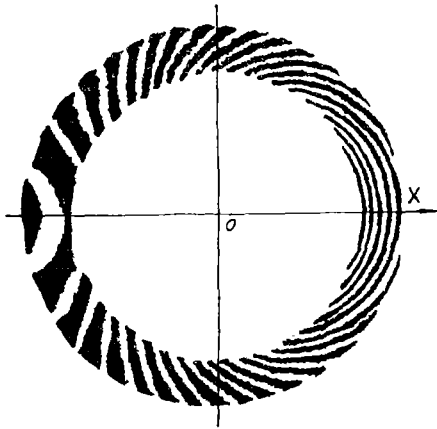


图 5

(2) 两块圆光栅的中心相重合, 即  $\beta = \infty$  ( $e = 0$ ), (7a) 式变成

$$R_k = \frac{(r_1 + r_2)R_0}{r_1 + r_2 + k\delta R_0} \dots \dots \dots (9)$$

在此种特殊条件下, 矢径  $R_k$  与  $\varphi$  无关, 因此 (9) 式表示莫尔条纹是一族同心圆, 其圆心就是极坐标的原点。由 (9) 式表明, 能满足下列条件的两块圆光栅相配对时, 才能得到同心圆莫尔条纹。

- (a) 采用两块都是左切或都是右切非中心辐射圆光栅, 其小圆半径可以相等, 亦可以不等, 在实际应用上多半采用小圆半径相等;
- (b) 采用一块中心辐射圆光栅和一块非中心辐射圆光栅;
- (c) 采用一块是左切圆光栅, 另一块是右切圆光栅, 但其小圆半径不能相等, 即  $r_1 - r_2 \neq 0$ 。

同心圆莫尔条纹在实用上有很大价值, 在拾取莫尔条纹光电信号时, 可对莫尔条纹进行环形积分, 这样取得的莫尔条纹光电信号, 其精度很高<sup>[1]</sup>。图 6 就是同心圆莫尔条纹的录影。

(3) 两块中心辐射圆光栅的中心不重合, 即  $e \neq 0, r_1 = r_2 = 0$ 。在这种条件下, (7a) 式变成

$$R_k = \frac{eR_{0max}}{e + k\delta R_{0max}} \cos \varphi \dots \dots \dots (10)$$

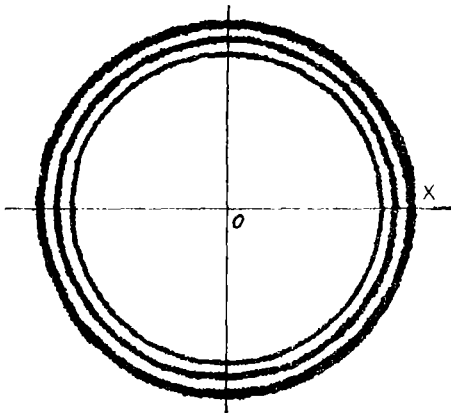


图 6 同心圆莫尔条纹

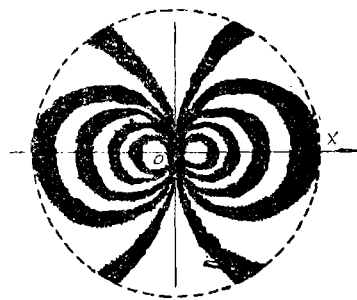


图 7

(10) 式表示莫尔条纹轨迹是经过极坐标原点的圆族 (图 7)。这种和 Guild 所讨论的情况很接近<sup>[9]</sup>, 因此可以把 Guild 得出的莫尔条纹轨迹为 (7a) 式的特例。

当两块中心辐射圆光栅的中心相重合时, 即  $e=0$ , 由 (10) 式可得  $R_1=0$ ; 这种情况表明, 不存在莫尔条纹轨迹。

从图 7 中可知, 由 (10) 式得到的莫尔条纹轨迹即对称于极轴  $OX$ , 也对称于  $\varphi=90^\circ$  的轴线, 这就有可能在圆光栅的直径两端安放结构相同的莫尔条纹读数头来消除“中心误差”的影响<sup>[9][10]</sup>。

## 二、产生直形莫尔条纹条件

一般认为在长光栅上能产生直形莫尔条纹, 而在圆光栅上得不到这种条纹。但是我们从莫尔条纹轨迹方程中发现: 随着  $\beta$  值的变化, 在  $\varphi=180^\circ$  处莫尔条纹的形状由凹形逐渐变成凸形 (见图 4), 因此当  $\beta$  值连续变化时, 终能存在直形莫尔条纹。换言之, 只要选择适当的  $\beta$  值, 就可以得到局部的直形莫尔条纹, 我们可以在莫尔条纹读数头中采用矩形限光狭缝来扩大条纹视场, 这样有利于消除圆光栅中存在的误差, 和增加莫尔条纹信号的能量。

下面就讨论一下产生直形莫尔条纹的条件和位置。设莫尔条纹轨迹的曲率为  $K$ , 曲率半径为  $\rho$ , 对莫尔条纹轨迹方程 (7a) 进行求导, 求出其一阶导数和二阶导数, 再代入求函数的曲率公式得:

$$K = \frac{1}{\rho} = \frac{\beta^2 + 3\beta \cos \varphi + 2}{A(\beta^2 + 2\beta \cos \varphi + 1)^{3/2}} \dots\dots\dots (11)$$

其中 
$$A = \frac{eR_{0max}}{r_1 + r_2 + e + k\delta R_{0max}} \circ$$

要产生直形条纹, 必须使下列方程式成立:

$$\beta^2 + 3\beta \cos \varphi + 2 = 0 \dots\dots\dots (12)$$

方程式 (12) 的解就是产生直形条纹的条件和位置, 对 (12) 式求解, 可以得出下列结论:

1. 莫尔条纹轨迹曲率等于零只存在于  $\varphi = 180^\circ \pm \cos^{-1}(\frac{2\sqrt{2}}{3})$  (即  $199^\circ 30' \geq \varphi \geq 160^\circ 30'$ ) 的区域内;
2. 莫尔条纹轨迹曲率等于零只存在于  $2 \geq \beta \geq \sqrt{2}$  的条件下;
3. 在一条莫尔条纹轨迹上, 曲率为零的有两点, 此两点对称于  $\varphi = 180^\circ$  一条直线; 当  $\beta$  值由  $\sqrt{2}$  逐渐地趋近于 2 时, 曲率为零的两点相应地向对称线靠近, 当  $\beta = 2$  时, 曲率为零的两点重合于  $\varphi = 180^\circ$  位置上。

由 (11) 式计算表明, 愈靠近  $K=0$  处, 条纹轨迹的曲率愈小, 在曲率为零的两点之间,  $\varphi=180^\circ$  处的曲率为最大。因此, 只要选择适当的  $\beta$  值, 在  $\varphi=180^\circ$  处, 使条纹的曲率半径  $\rho$  大于一定的值 (此值根据具体情况而定), 如  $\rho > 1000$  毫米, 就可以近似地认为在曲率为零的两点之间的条纹为直条纹。图 4 所示的  $\beta=2$  的条纹轨迹

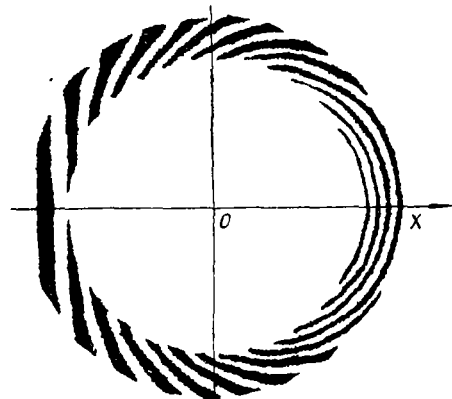


图 8

为一条局部的直形莫尔条纹。图 8 所示出的就是圆光栅产生的直形莫尔条纹图案的录影。

### 三、圆光栅的莫尔条纹宽度

在莫尔条纹技术中，条纹宽度是一个很重要的参数，应该加以讨论。本节要讨论的是：圆光栅的莫尔条纹宽度按什么规律变化？此变化与哪些参数有关？

如果把圆光栅的半径扩大到无限大，这样的圆光栅实际上就是长光栅。根据 *Guild* 近似的长光栅莫尔条纹宽度公式<sup>[3]</sup>可以推导出下列圆光栅的莫尔条纹宽度公式：

$$W = \frac{2\pi R^2}{en\sqrt{1+\beta^2+2\beta\cos\varphi}} \dots\dots\dots (13)$$

式中  $W$  —— 在圆光栅半径  $R$  的位置上条纹宽度。

从 (13) 式中可知，当两块切向圆光栅相配对时，在一定的偏心距  $e$  的条件下，位于半径为  $R$  的圆光栅的一条圆周上，条纹宽度随着  $\varphi$  的不同而变化。当  $e$  减小 ( $\beta$  增大) 时，条纹宽度随着  $\varphi$  的改变而变化逐渐减小；当  $e = 0$  时，条纹宽度的变化与  $\varphi$  无关。换言之，在圆光栅半径  $R$  的同一个圆周上条纹宽度不变。

从 (13) 式中还可得知：在同一角位置  $\varphi$  上，条纹宽度随着  $R$  的增加而增大。下面讨论一下几种常用的特殊条件下的条纹宽度。

1. 同心圆莫尔条纹宽度。要得到同心圆莫尔条纹，两块圆光栅的中心要重合，即  $e = 0$  ( $\beta = \infty$ )，由此 (13) 式可简化成

$$W = \frac{2\pi R^2}{n(r_1+r_2)} = \frac{\delta R^2}{r_1+r_2} \dots\dots\dots (14)$$

公式 (14) 是圆形莫尔条纹的条纹宽度公式，它和 *Lewis* 推出的公式一样<sup>[11]</sup>。由 (14) 式可知，同心圆莫尔条纹其条纹宽度与  $\varphi$  无关，也就是说，在半径为  $R$  的同一圆周上，条纹宽度是相同的（见图 9 中的虚线）。

2. 直形莫尔条纹宽度，为了计算简化起见，只讨论  $\beta = 2$  的条件。这样，(13) 式可写成：

$$W = \frac{2\pi R^2}{en\sqrt{5+4\cos\varphi}} \\ = \frac{\delta R^2}{e\sqrt{5+4\cos\varphi}} \dots\dots (15)$$

(15) 式就是形成直条纹条件下莫尔条纹宽度的公式，从 (15) 式中看出，在同一个半径  $R$  的圆周上条纹宽度是不等的；条纹宽度最大值位于  $\varphi = 180^\circ$  处，也就是在直形莫尔条纹的位置上，其值为  $\delta R^2/e$ ；条纹宽度最小值位于  $\varphi = 0^\circ$  处，其值为

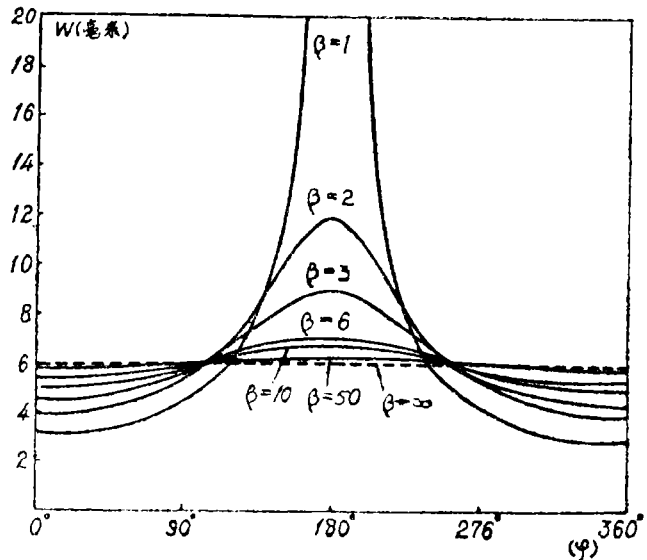


图 9 在给定的—对圆光栅的条件，在同一条半径为  $R$  的圆周上，条纹宽度的变化。

$\delta R^2/3e$ .

3. 两块中心辐射圆光栅相配对时的条纹宽度。在这种条件下,  $r_1=r_2=0$ ,  $e \neq 0$ , 条纹宽度公式为

$$W = \frac{2\pi R^2}{en} = \frac{\delta R^2}{e} \dots\dots\dots (16)$$

(16) 式和 *Guild* 的圆光栅莫尔条纹宽度公式是一样的<sup>[3]</sup>。

### 参 考 文 献

- [ 1 ] A. H. McIlraith, A. B. Penfold, J. Sci. Instrum., 1967, 44, No. 11, 903.
- [ 2 ] R. Noch, IMEKO, 1973, No. 7, 43.
- [ 3 ] J. Guild, Theory of Moiré fringe, Oxford, Clarendon press, 1956.
- [ 4 ] W. H. P. Leslie, Int. J. of Machine Tool Design and Research, 1962, 2, No. 4, 393.
- [ 5 ] 邹自强, 机床通讯, 1975, No. 2, 8.
- [ 6 ] J. C. Flude, J. Sci. Instrum., 1962, 38, No. 11, 445.
- [ 7 ] G. Hodgson, Instrum. pract. 1960, 14, No. 6, 638
- [ 8 ] Ulrich La Rache, S. P. I. E. Journal, 1968, 7, No. 1, 13.
- [ 9 ] J. Guild, Diffraction grating as measuring scales, Oxford University press, London (1960).
- [ 10 ] British patent specification No. 1220095.
- [ 11 ] A. Lewis, I. R. Young, J. Sci. Instrum., 1959, 36, No. 4, 153.
- [ 12 ] Л. Н. Преснухин, Фотоэлектрические Преобразователи Информации, Москва, «МАШИНОСТРОЕНИЕ» 1974, 135.
- [ 13 ] 上海机械学院, 光学仪器情报, 1977, No. 12, 1.