衍射光栅的半波相位差面及其与光栅误差的关系

郝 德 阜

摘 要

本文介绍了光栅两束衍射光相干涉形成半波相位差面的概念，指出分光光栅干涉仪的干涉条纹方向及宽度取决于分光面和半波相位差面的相对位置。通过对有误差光栅半波相位差面的分析，导出了半波相位差面的变形与光栅误差的关系，为分析光栅误差对此种干涉仪信号精度的影响提供了一种方法。

一、半波相位差面的形成

1. 衍射光栅的波阵面

当平面波入射到理想平面衍射光栅时，各级衍射波都是平面波。如光栅的某一有误差线距为 $a(1+f)$，其中 a 为标准线距，f 为误差系数，在自准角为 α 时衍射波阵面的相位变化为

$$\Delta\phi=\frac{2\pi}{\lambda}2fa\sin\alpha \quad [1] \tag{1}$$

由此可以推出（图1），当以0点为参考点，沿 x 方向考察时有：

① 对于正衍射级，当 $fa<0$ 时波阵面相位超前 $\Delta\phi$；当 $fa>0$ 时波阵面相位落后 $\Delta\phi$。

② 对于负衍射级，当 $fa<0$ 时波阵面相位落后 $\Delta\phi$；当 $fa>0$ 时波阵面相位超前 $\Delta\phi$。

③ 当刻线连续有误差时，波阵面连续变化。

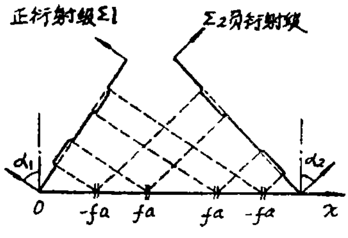

图1 衍射波阵面和光栅误差的关系

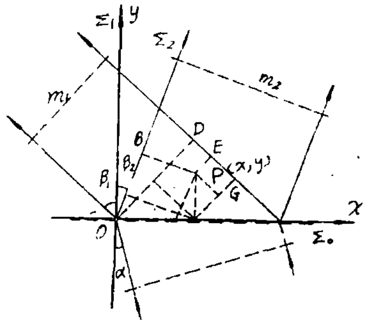

图2 两束衍射光的干涉

2. 两束衍射光的干涉[2]

在如图2的坐标系中，光栅上方任一点 $P(x,y)$ 处于 m_1 和 m_2 级两束衍射光中，可以求出这两束光在 P 点的相位差为

$$\Delta\phi_P = 2\pi\frac{m_1 - m_2}{a}x + \frac{2\pi}{\lambda}(\cos\beta_1 - \cos\beta_2)y \qquad (2)$$

其中 λ 为衍射波长，β_1, β_2为衍射角。

3. 半波相位差面

在式（2）中，当$\beta_1 = |\beta_2|$时，变为

$$\Delta\phi_P = 2\pi\frac{m_1 - m_2}{a}x \qquad (3)$$

此式表明任意点P（x，y）的相位差只与x有关，在三维坐标系中是一个等相位差面。令$\Delta\phi_P = (2k+1)\pi$，k为整数，得第k个半波相位差面方程

$$x_k = \frac{a}{m_1 - m_2}\left(k + \frac{1}{2}\right) \qquad (4)$$

当$m_1 = -m_2 = m$时

$$x_k = \frac{a}{2m}\left(k + \frac{1}{2}\right) \qquad (5)$$

相邻的两个半波相位差面间距为

$$\delta x = x_{k+1} - x_k = \frac{a}{2m} \qquad (6)$$

实际上等相位差面和两束光干涉的等强度面是一致的。

二、分光光栅干涉仪和半波相位差面

1. 使用分光板时的半波相位差面

分光光栅干涉仪是用分光板把一束平行光分成两束投射到光栅上；每一束经过分光板的衍射光也都被分成两束。为方便起见，把分光板作为理想的分光面讨论。

当分光面平行于光栅刻线和法线时，只要注意到入射光是被分成的两束光；当分光面平行于刻线但与法线成γ角时，因γ角远小于衍射角，都可以证明有分光面时的半波相位差面公式和无分光面时的公式（5）、（6）相同。

2. 分光面的作用

虽然光栅上方有无分光面都可产生半波相位差面，但是如果没有分光面，这些半波相位差面是不易被利用的。分光面除了把入射光分成两束外，还有以下作用：

① 使半波相位差面成为可见的或可接收的条纹。

分光面能使分开角度很大的本来无法同时看到的两束衍射光m_1和m_2（图3a）同时出现在每一侧（图3b），使干涉结果变为可见的。

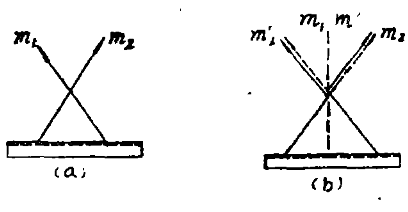

图3　分光面的作用

② 计数平均半波相位差面，输出线位移计量信号。

分光面对变形了的半波相位差面有平均作用，当分光面和光栅相对移动时，分光面可以计数掠过它的半波相位差面的数目，输出计量信号。

③ 可以得到不同方向和宽度的条纹。

在理想情况下，半波相位差面是一族平行于光栅刻线和光栅法线的平面，通过分光面所看到的条纹的方向和宽度完全取决于分光面与半波相位差面的相对位置。当分光面AA仅相

对于法线倾斜时（图 4），看到的条纹方向平行于刻线，宽度为e。当分光面AA仅相对于刻线倾斜时（图 5），看到的条纹平行于法线。当分光面相对于刻线和法线都有倾斜时，看到的是斜条纹。当分光面平行于半波相位差面时看到的是无穷宽条纹。

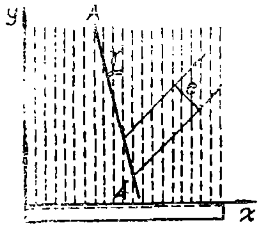

图 4　平行于刻线的条纹

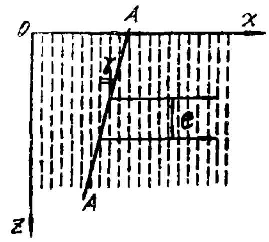

图 5　平行于法线的条纹

图 6 是由实验得到的分光光栅干涉仪的各种情况条纹的照片。图中的“左转”“右转”调节分光面对法线的倾斜角；“左倾”“右倾”调节分光面对刻线的倾斜角。从一种状态的条纹调节成另一种状态的条纹必经如图中所示的次序，不能跃变。

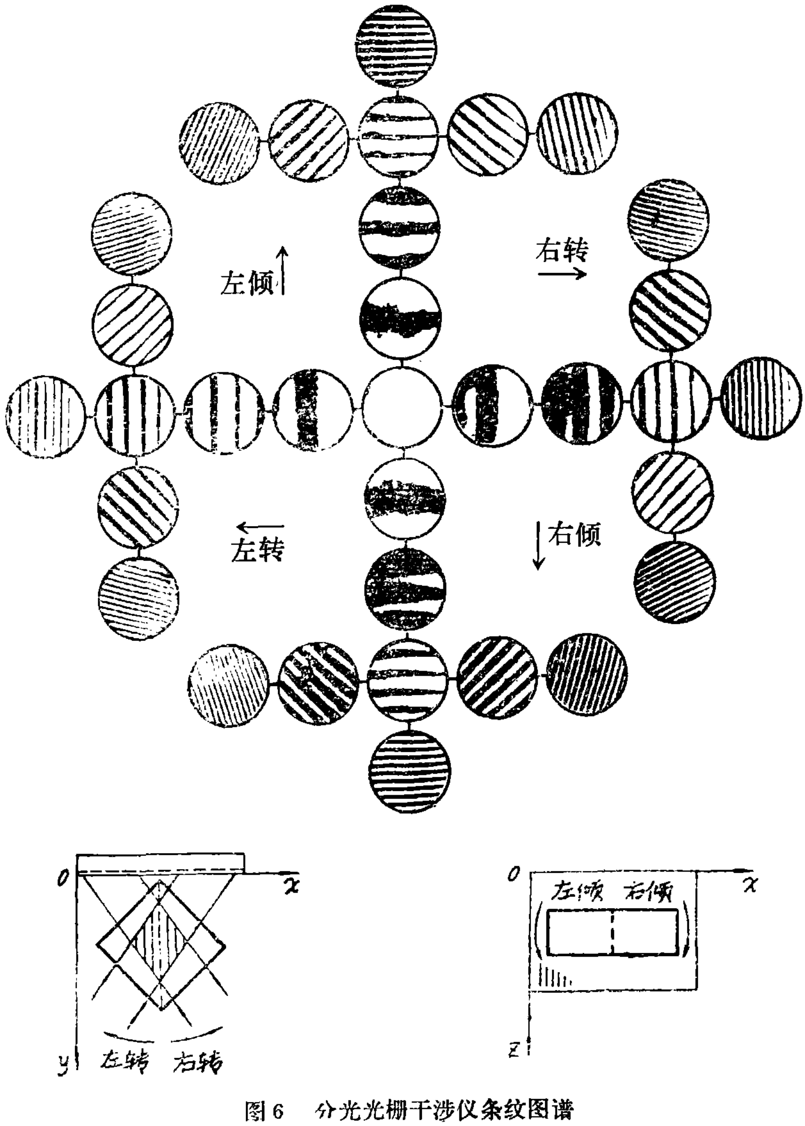

图 6　分光光栅干涉仪条纹图谱

三、有误差光栅的半波相位差面

当光栅的线距有误差时，将引起半波相位差面的变形。在图7中，m_1级光在$P(x,y)$点的相位和OH段光栅的累积误差有关；m_2级光在$P(x,y)$点的相位和OG段光栅的累积误差有关。如OH段恰有h条有误差的刻线，误差系数为f_i；OG段恰有g条有误差的刻线，误差系数为f_j，则累积误差分别为

$$a\sum_{i=0}^{h}f_i \quad 和 \quad a\sum_{j=0}^{g}f_j \qquad (7)$$

如是连续变化误差时，可分别表示为

$$\int_0^{x+y\operatorname{tg}\alpha}f_1(x)dx \quad 和 \quad \int_0^{x-y\operatorname{tg}\alpha}f_2(x)dx \qquad (8)$$

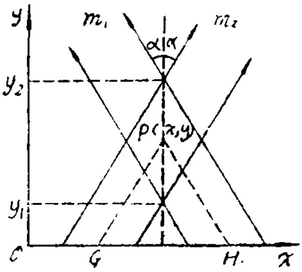

图7　有误差光栅的半波相位差面公式推导

这时，半波相位差面可表示为

$$x_k=\frac{a}{2m}(k+\frac{1}{2})+\frac{a}{2}\left(\sum_{j=0}^{g}f_j+\sum_{i=0}^{h}f_i\right) \qquad (9)$$

或

$$x_k=\frac{a}{2m}(k+\frac{1}{2})+\frac{1}{2}\left[\int_0^{xk-y\operatorname{tg}\alpha}f_2(x)dx+\int_0^{xk+y\operatorname{tg}\alpha}f_1(x)dx\right] \qquad (10)$$

四、半波相位差面的过渡变化及平均公式

如果光栅上有不同类型的误差，分界点为x_0（图8），过x_0的两条衍射光x_0V和x_0U叫做过渡线，它把半波相位差面分成A,B,C三个区域，其半波相位差面方程式$x_{Ak}(y)$、$x_{Bk}(y)$和$x_{Ck}(y)$可根据光栅在x_0前后误差系数的具体形式按公式（9）或（10）求出。

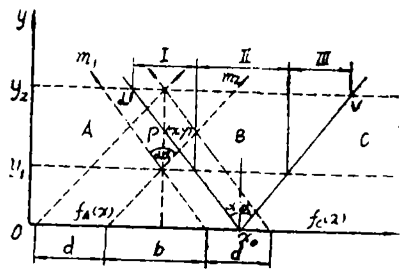

图8　半波相位差面的过渡变化

图8中两束衍射光m_1和m_2覆盖光栅的长度各为d，其间隔为b，在从y_1到y_2之间形成半波相位差面。当沿y方向在y_1和y_2之间求平均半波相位差面位置时，按所包含的区域的不同可分为Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ段。各段的平均半波相位差面方程可表为

$$\overline{x}_{k\,\mathrm{I}}=\frac{1}{y_2-y_1}\left[\int_{y_1}^{y=-(x_k-x_0)\operatorname{ctg}\alpha}x_{Ak}(y)dy+\int_{y=-(x_k-x_0)\operatorname{ctg}\alpha}^{y_2}x_{Bk}(y)\,dy\right] \qquad (11)$$

$$\overline{x}_{k\,\mathrm{II}}=\frac{1}{y_2-y_1}\int_{y_1}^{y_2}x_{Bk}(y)dy=x_{Bk} \qquad (12)$$

$$\overline{x}_{k\text{Ⅲ}}=\frac{1}{y_2-y_1}\left[\int_{y_1}^{y=(x_k-x_0)\operatorname{ctg}\alpha}x_{Ck}(y)dy+\int_{y=(x_k-x_0)\operatorname{ctg}\alpha}^{y_2}x_{Bk}(y)dy\right] \tag{13}$$

平均半波相位差面的间距可参照公式（6）求出。

五、有误差光栅的半波相位差面举例

1. 超射误差

光栅的超射误差这里是指光栅的某一条刻线突然出现的显著误差。如超射误差的位置在x_0（图9），超射误差系数为$\varDelta$，则此线距可表为

$$a(x_0)=a(1+\varDelta) \tag{14}$$

过x_0的过渡线把从y_1到y_2间的半波相位差面分成A，B，C三个区域和Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ三个段。用公式（9）可求出各区的半波相位差面公式分别为

$$x_{Ak}=\frac{a}{2m}(k+\frac{1}{2}) \tag{15}$$

$$x_{Bk}=\frac{a}{2m}(k+\frac{1}{2})+\frac{1}{2}\varDelta a \tag{16}$$

$$x_{Ck}+\frac{a}{2m}(k+\frac{1}{2})+\varDelta a \tag{17}$$

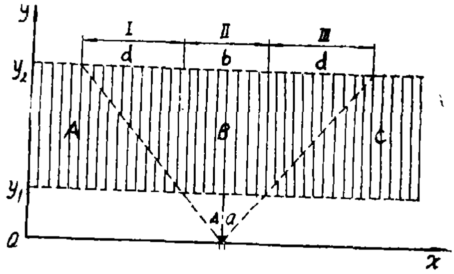

图9　有超射误差光栅的半波相位差面

由公式（6）可知半波相位差面间距为

$$\delta x_A=\delta x_B=\delta x_C=\frac{a}{2m}$$

即半波相位差面的间距是正常的，只是在B区向后移动$\frac{1}{2}\varDelta a$，在C区向后移动$\varDelta a$。

把公式（15），（16），（17）代入公式（11），（12），（13）可求出Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ段的平均半波相位差面方程$\overline{x}_{k\text{Ⅰ}}$，$\overline{x}_{k\text{Ⅱ}}$和$\overline{x}_{k\text{Ⅲ}}$，再由公式（6）可求出这三段的平均半波相位差面间距分别为

$$\delta\overline{x}_{\text{Ⅰ}}=\frac{a}{2m}(1+\frac{\varDelta a}{2d}) \tag{18}$$

$$\delta\overline{x}_{\text{Ⅱ}}=\frac{a}{2m} \tag{19}$$

$$\delta\overline{x}_{\text{Ⅲ}}=\frac{a}{2m}(1+\frac{\varDelta a}{2d}) \tag{20}$$

由以上分析可知，当光栅上有超射误差$\varDelta a$时，将引起Ⅰ，Ⅲ段平均半波相位差面的误差，新的误差系数为

$$\overline{\varDelta}=\frac{a}{2d}\varDelta \tag{21}$$

因$a\ll d$，所以$\overline{\varDelta}$值是极微小的。

总的累积误差可以由误差系数积分得到：

$$\int_{x_0-\frac{b}{2}-d}^{x_0-\frac{b}{2}}\overline{\varDelta}dx+\int_{x_0+\frac{b}{2}}^{x_0+\frac{b}{2}+d}\overline{\varDelta}dx=\varDelta a \tag{22}$$

即原来的集中超射误差Δa被分散到Ⅰ，Ⅲ段范围内，但总的累积误差仍然没变。

2. 偶然误差

光栅的偶然误差可以理解为在x_1处出现正的超射误差ξa以后，紧接着又在x_2处出现负的超射误差$-\xi a$（图10）。ξ为偶然误差系数。$t=x_2-x_1$是偶然误差作用段。

过x_1和x_2的两组过渡线把半波相位差面分成A，B，C，D，E五个区和Ⅰ，Ⅱ，……，Ⅶ七个段。经过类似前面对超射误差那样的分析过程之后，可得出各段的平均半波相位差面公式：

$$\delta\overline{x}_{\mathrm{I}}=\frac{a}{2m}\left(1+\frac{\xi a}{2d}\right)$$

$$\delta\overline{x}_{\mathrm{II}}=\frac{a}{2m}$$

$$\delta\overline{x}_{\mathrm{III}}=\frac{a}{2m}\left(1-\frac{\xi a}{2d}\right)$$

$$\delta\overline{x}_{\mathrm{IV}}=\frac{a}{2m}$$

$$\delta\overline{x}_{\mathrm{V}}=\frac{a}{2m}\left(1+\frac{\xi a}{2d}\right)$$

$$\delta\overline{x}_{\mathrm{VI}}=\frac{a}{2m}$$

$$\delta\overline{x}_{\mathrm{VII}}=\frac{a}{2m}\left(1-\frac{\xi a}{2d}\right)$$

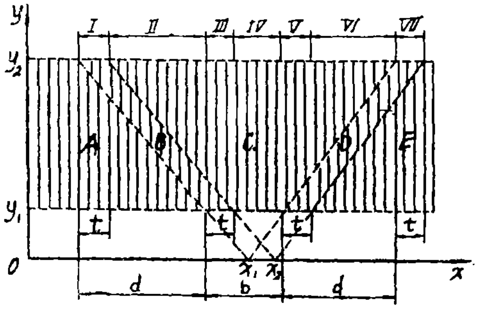

图10 有偶然误差光栅的半波相位差面

可知Ⅱ，Ⅳ，Ⅵ段为无误差段；Ⅰ，Ⅲ，Ⅴ，Ⅶ段为有误差段，误差系数变化$\frac{a}{2d}$倍。每个误差段内的累积误差正比于误差作用段的长度t，但由于Ⅰ，Ⅲ段和Ⅴ，Ⅶ段累积误差的大小分别相等，符号相反，总的累积误差为零。

3. 周期误差

设有周期误差的光栅线距可表为

$$a(x)=a\left(1+\zeta\sin\frac{2\pi}{e}x\right) \tag{23}$$

其中$\zeta\ll 1$是周期误差的振幅系数，$e\gg a$是周期误差的周期长度。按公式（10）列出半波相位差面公式

$$x_k=\frac{a}{2m}\left(k+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\left[\int_0^{x_k-y\,tg\,a}\zeta\sin\frac{2\pi}{e}x\,dx+\int_0^{x_k+y\,tg\,a}\zeta\sin\frac{2\pi}{e}x\,dx\right] \tag{24}$$

$$x_{k+1}=\frac{a}{2m}\left(k+\frac{3}{2}\right)+\frac{1}{2}\left[\int_0^{x_{k+1}-y\,tg\,a}\zeta\sin\frac{2\pi}{e}x\,dx+\int_0^{x_{k+1}+y\,tg\,a}\zeta\sin\frac{2\pi}{e}x\,dx\right]$$

上二式两端相减并整理可得

$$x_{k+1}-x_k$$

$$=\frac{a}{2m}+\zeta\frac{e}{\pi}\sin\frac{\pi}{e}(x_{k+1}-x_k)\sin\frac{\pi}{e}(x_{k+1}+x_k)\cos\left(\frac{2\pi}{e}y\,tg\,a\right)$$

因$\frac{\pi}{e}(x_{k+1}-x_k)$很小，$\sin\frac{\pi}{e}(x_{k+1}-x_k)\approx\frac{\pi}{e}(x_{k+1}-x_k)$，

且令$\delta x = x_{k+1} - x_k$，$x = \frac{1}{2}(x_{k+1} + x_k)$

则有$\delta x = \frac{a}{2m} \Big/ \left[1 - \zeta\sin\frac{2\pi}{e}x\cos\left(\frac{2\pi}{e}ytg\alpha\right) \right]$

把分式展成级数，略去二阶以上小量得

$$\delta x = \frac{a}{2m}\left[1 + \zeta\sin\frac{2\pi}{e}x\cos\left(\frac{2\pi}{e}ytg\alpha\right) \right] \tag{25}$$

对y积分求平均半波相位差面间距

$$\delta\overline{x} = \frac{a}{2m}\left(1 + \frac{\zeta e}{y_2 - y_1}A\sin\frac{2\pi}{e}x\right) \tag{26}$$

其中

$$A = \frac{1}{\pi}ctg\alpha\ \sin\left(\frac{y_2 - y_1}{e}\pi tg\alpha\right)\cos\left(\frac{y_2 + y_1}{e}\pi tg\alpha\right) \tag{27}$$

当y_1，y_2和α确定后A是一常数，当$\alpha > 17°$时通常有$|A| < 1$。

由以上分析可知，当光栅上有周期误差时，原则上平均半波相位差面也有周期误差，但是振幅变化$\frac{e}{y_2 - y_1}A$倍。在一般情况下，$e \ll y_2 - y_1$即可以认为光栅上的短周期误差对干涉仪的输出信号无影响。对长周期误差，如$e < \frac{y_2 - y_1}{A}$，误差振幅缩小。如果根据e的大小，适当调节y_1和y_2可使$A = 0$，这时无论光栅上有长短周期误差，原则上对输出信号都无影响。

例如，我们的光电控制衍射光栅刻划机是纯机械刻划机刻出的光栅作为分度基准的。但机械刻划机刻出的光栅具有周期为$e = 1$毫米的周期误差，主要是由周期误差引起的罗兰鬼线相对强度大约为0.1%。但用这样光栅构成干涉仪，使$\alpha = 19°$，$y_1 = 10$毫米，$y_2 = 40$毫米，可算出$\frac{e}{y_2 - y_1}A$值小于0.01，即周期误差的振幅缩小一百倍。实际上，用此干涉仪的光电控制刻划机刻出的光栅周期误差极小，罗兰鬼线的相对强度小到测量不出。

本文得到梁浩明老师的热心指导和认真审阅，在此表示衷心感谢。

参 考 文 献

[1] G.W.Stroke; Handbuch der Physik, 1967 19, 533

[2] *Г.Н.Рассудова и Ф.м.Герасимов*; *Оптика и Спектроскопия*, 1963 14, 406