

# 气体润滑球轴承的性能计算

张运昌

(七机部502所)

采用气体润滑的球形轴承是空间飞行器姿态控制系统三轴气浮模拟台、零部件测试台或其他试验台中的一个关键部件,其性能好坏直接影响设备的使用,在加工中一般要求精度较高、条件比较苛刻,因此在设计计算上必须特别考虑,以期达到较好的性能。本文在计算方法上加以探索,除一般方法计算外,采用有限元法求解。计算的目的是在给定的某一气膜关系(即给定半径差 $\Delta R$ 、浮起量 $C$ 、水平偏移量 $e$ 、供气压力 $P_s$ 、孔数 $n$ 、孔径 $d$ 以及 $\theta_2$ 、 $\theta_1$ 和 $\theta_0$ )的条件下、计算轴承的总承载能力 $\bar{W}$

$$\bar{W} = \sqrt{\bar{W}_z^2 + \bar{W}_H^2}$$

和偏位角  $\beta$

$$\beta = \text{tg}^{-1} \frac{\bar{W}_H}{\bar{W}_z}$$

这里的 $\bar{W}_z$ 和 $\bar{W}_H$ 分别是轴承的垂直和水平承载能力(见图1)。

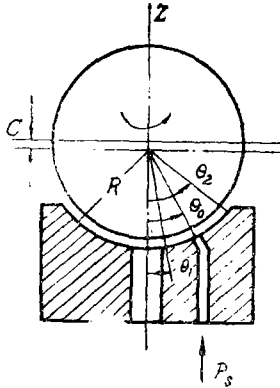


图 1

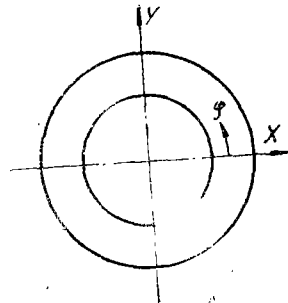


图 2

我们采用有限元法求解。为了简化计算,作如下一些基本假设:

- (1) 气膜间气体流动是等温的;
- (2) 略去球面曲率的影响;
- (3) 计算小孔出口处气膜压力时,采用线性流动模型的假定。

定常运动时,静压气体润滑的雷诺方程为:

$$\nabla \cdot (h^3 P \nabla P) = 0$$

(1)

这里的 $\nabla$ 是梯度算符, $P$ 是气膜压力, $h$ 是厚度。

边界条件如下(见图2):

$$\theta = \theta_2 \text{ 时, } p = 1;$$

$$\theta = \theta_1 \text{ 时, } p = 1;$$

$$\varphi = 0 \text{ 时, } q_\varphi = 0;$$

$$\varphi = \pi \text{ 时, } q_\varphi = 0。$$

其中  $q_\varphi$  (即  $\frac{\partial p}{\partial \varphi}$ ) 是气体沿  $\varphi$  方向的质量流量。

方程 (1) 是非线性的, 我们可将它线性化, 为此引进新的变量  $\eta$ , 下面我们也称  $\eta$  为压力。令

$$\eta = p^2$$

则方程 (1) 变成线性方程

$$\nabla \cdot (h^3 \Delta \eta) = 0 \tag{2}$$

$\eta$  也满足压力边界条件。

$\eta$  的泛函是:

$$\phi(\eta) = \int_{\Omega} h^3 \nabla \eta \cdot \nabla \eta d\Omega \tag{3}$$

可以证明: (2) 式的解与求泛函  $\phi(\eta)$  的极值等价, 因此求 (2) 式的解可归结为求泛函  $\phi(\eta)$  的变分。

众所周知, 在有限元法中是将要分析的表面  $\Omega$  剖分为具有方便形式的子区域。为了便于计算, 我们首先将  $\Omega$  展开为平面, 略去曲率的影响, 将其近似展开, 以喷孔所在的半径  $R \sin \theta_0$  为平均半径, 把半径方向宽度  $R(\theta_2 - \theta_1)$  展开为圆环面, 取  $\varphi$  从 0 到  $\pi$  的半圆环 (由于对称关系), 如图 3 所示。

沿径向分为 10 等分, 沿周向分为 48 等分, 共有 539 个节点, 960 个三角形单元。节点编号如图 3 所示, 节点的座标是:

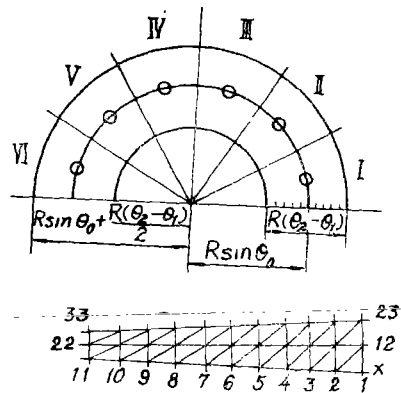


图 3

$$\left. \begin{aligned} X_i &= \left[ R \sin \theta_0 + \frac{R(\theta_2 - \theta_1)}{2} - \text{mod}(i-1, 11) \frac{R(\theta_2 - \theta_1)}{10} \right] \cdot \cos \left( \left[ \frac{i-1}{11} \right] \frac{\pi}{48} \right) \\ Y_i &= \left[ R \sin \theta_0 + \frac{R(\theta_2 - \theta_1)}{2} - \text{mod}(i-1, 11) \frac{R(\theta_2 - \theta_1)}{10} \right] \cdot \sin \left( \left[ \frac{i-1}{11} \right] \frac{\pi}{48} \right) \end{aligned} \right\} \tag{4}$$

$$i = 1, 2, \dots, 539$$

这里  $\text{mod}(a_1, a_2) = a_1 - \left[ \frac{a_1}{a_2} \right] a_2$ , 其中  $[X]$  表示不超过  $X$  的最大整数。

有水平偏移量 (沿  $\varphi = 0$  位置) 时的气膜厚度为:

$$h = \Delta R + C \cos \theta - e \sin \theta \cos \varphi \tag{5}$$

故任一点  $i$  的气膜厚度是:

$$\begin{aligned} h_i &= \Delta R + C \cos \left[ \theta_2 - \text{mod}(i-1, 11) \frac{\theta_2 - \theta_1}{10} \right] \\ &\quad - e \sin \left[ \theta_2 - \text{mod}(i-1, 11) \frac{\theta_2 - \theta_1}{10} \right] \cos \left( \left[ \frac{i-1}{11} \right] \frac{\pi}{48} \right) \end{aligned} \tag{6}$$

根据前面的基本假定: 压力  $P$  和气膜厚度  $h$  等量在三角形单元内是线性变化的, 因此有  $\eta = \{N\}\{\eta\}$  和  $h = \{N\}\{h\}$

这里  $\{N\} = \{N_i, N_j, N_k\}$ ,  $N_i, N_j, N_k$ , 为三角形单元的面积坐标, 并能表示为

$$\begin{Bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} a_i & b_i & c_i \\ a_j & b_j & c_j \\ a_k & b_k & c_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} I \\ X \\ Y \end{Bmatrix}$$

其中 $\Delta$ 是三角形  $i j k$  的面积 (见图 4),

$$\Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix}$$

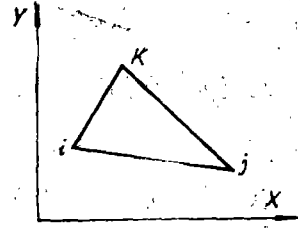


图 4

$$a_i = x_j y_k - x_k y_j$$

$$a_j = x_k y_i - x_i y_k$$

$$a_k = x_i y_j - x_j y_i$$

$$b_i = y_j - y_k, \quad b_j = y_k - y_i, \quad b_k = y_i - y_j$$

$$c_i = x_k - x_j, \quad c_j = x_i - x_k, \quad c_k = x_j - x_i$$

节点压力列向量

$$\{\eta\} = \begin{Bmatrix} \eta_i \\ \eta_j \\ \eta_k \end{Bmatrix}$$

节点气膜厚度列向量

$$\{h\} = \begin{Bmatrix} h_i \\ h_j \\ h_k \end{Bmatrix}$$

现在谈谈单元矩阵与系统方程。

由于

$$\Delta\eta = \frac{\partial\eta}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y}$$

而  $\eta = N_i\eta_i + N_j\eta_j + N_k\eta_k$ , 故

$$\begin{aligned} \frac{\partial\eta}{\partial x} &= \eta_i \frac{\partial N_i}{\partial x} + \eta_j \frac{\partial N_j}{\partial x} + \eta_k \frac{\partial N_k}{\partial x} \\ &= \frac{1}{2\Delta} (b_i\eta_i + b_j\eta_j + b_k\eta_k) \end{aligned}$$

同样可以得出

$$\frac{\partial\eta}{\partial y} = \frac{1}{2\Delta} (c_i\eta_i + c_j\eta_j + c_k\eta_k)$$

如果把泛函  $\phi$  在单元  $\Omega_e$  内的值表示为  $\phi^e$ , 则由 (3) 式, 并利用泛函的极值条件

$$\frac{\partial\phi^e}{\partial\eta_i} = 0, \text{ 可以得到下面的结果:}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi^*}{\partial \eta_i} &= \int_{\Omega} h^3 \left[ \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \eta_i} \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \eta_i} \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \right] d\Omega \\ &= \frac{1}{4\Delta^2} |b_i, c_i| \begin{vmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{vmatrix} \{\eta\}^* \int_{\Omega} h^3 d\Omega. \end{aligned}$$

积分的值是

$$\int_{\Omega} h^3 d\Omega = \frac{h_i^3 + h_j^3 + h_k^3}{3} \cdot \Delta$$

(一阶近似)。更为精确的近似是:

$$\int_{\Omega} h^3 d\Omega = \frac{\Delta}{10} [(h_i + h_j + h_k) \cdot (h_i^2 + h_j^2 + h_k^2) + h_i h_j h_k]$$

由此可以得出单元 $\Omega$ 的方程

$$[K] \{\eta\}^* = 0$$

其中 $K$ 为单元矩阵, 且其元素 $K_{ij}$ 为:

$$K_{ij} = \frac{1}{40\Delta} (b_i b_j c_i c_j) [(h_i + h_j + h_k) \cdot (h_i^2 + h_j^2 + h_k^2) + h_i h_j h_k] \quad (7)$$

组合全部单元, 并利用压力边界条件

$$\eta_{11}, \eta_{12}, \dots, \eta_{1+11t} = 1$$

$$\eta_{11}, \eta_{22}, \dots, \eta_{11+11t} = 1$$

$$t = 1, 2, \dots, 48$$

以及喷孔处压力等于小孔出口压力, 即可构成系统的压力方程组。

对于边界条件可作如下处理: 如 $\eta_{12, 12} = 1$ , 在代数方程组中取 $K_{12, 12} = 1$ ; 而对应于此行的其他元素为0, 方程右端为1。

由于每一小孔出口压力未知, 在有水平偏移量时, 各个小孔出口压力各不相等, 可令它们分别为:

$$\eta_{01}, \eta_{02}, \eta_{03}, \dots$$

求小孔出口压力时, 可用线性流动模型将气膜剖分为图3所示的六个区域, 每一个小孔出口的流量 $q_i$ 与该扇形区域内外圆弧上流出的流量相等, 在该区域两侧边界沿 $\varphi$ 方向的流量为零。由此可得出该区域的系统方程组, 例如对于区域I, 可得出如下的方程组:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Sigma k_{22} & \Sigma k_{23} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 10 & \dots & 0 \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 01 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_{11} \\ \vdots \\ \eta_{50} \\ \vdots \\ \eta_{88} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ \eta_{01} \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

对于其他区域, 可以建立类似的方程组, 从而求得整个半圆环的方程组。

下面我们以区域I为例, 说明如何求小孔出口压力。采用迭代法求解, 其迭代过程如

设  $\eta_{o1} = \frac{\eta_s}{2}$ , 而  $\eta_s = P_s^2$ , 按方程组 (8) 求出节点压力  $\eta$  以及  $P = \sqrt{\eta}$ ,

由供气压力  $P_s$  和中心孔出口压力  $P_{o1}$  计算小孔出口流量  $q_{i1}$ :

$$q_{i1} = 0.85 \pi dh \sqrt{\frac{2gk}{k-1} r_s P_s \left[ \left( \frac{P_{o1}}{P_s} \right)^{\frac{2}{k}} - \left( \frac{P_{o1}}{P_s} \right)^{\frac{k+1}{k}} \right]}$$

其中  $K=1.4$ ,  $r_s$ — $P_s$  压力下空气的比重,  $h$ —小孔出口处的气膜厚度,  $g$ —重力加速度, 第一次迭代  $P_{o1} = \frac{P_s}{2}$ 。

计算内外边界流出的流量  $q_{o1}$ :

$$q_{o1} = - \int_{外} \frac{\rho_a h^3}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial r} ds + \int_{内} \frac{\rho_a h^2}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial r} ds$$

其中  $\rho_a$  为  $P_a = 1$  时的空气密度, 取值  $1.225 \times 10^{-3} \text{g/cm}^3$ ,  $\mu$ —气体粘度  $= 1.82 \times 10^{-7} \text{g}\cdot\text{s/cm}^2$

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{1}{2\Delta} [(b_i P_i + b_j P_j + b_k P_k) \cos \varphi + (c_i P_i + c_j P_j + c_k P_k) \sin \varphi]$$

$\varphi$  取边界上单元边长中点的值, 即  $\frac{\pi}{96}, \frac{3\pi}{96}, \frac{5\pi}{96}, \dots$

如图 5 所示

$$\int_{外} h^3 ds \approx \sum \left( \frac{h_i^3 + h_j^3}{2} \right) \frac{\pi}{48} \left[ R \sin \theta_0 + \frac{1}{2} R (\theta_2 - \theta_1) \right]$$

$$\int_{内} h^2 ds \approx \sum \left( \frac{h_i^2 + h_k^2}{2} \right) \frac{\pi}{48} \left[ R \sin \theta_0 - \frac{1}{2} R (\theta_2 - \theta_1) \right]$$

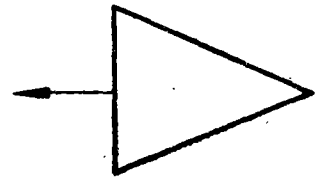


图 5

一般地说, 第一次求出的  $q_{i1}^{(1)}$  和  $q_{o1}^{(1)}$  不一定相等, 此时可采用类似于简化的牛顿法进行迭代, 即

$$P_{o1}^{(K+1)} = P_{o1}^{(K)} - \omega \frac{q_{i1} - q_{o1}}{\left( \frac{\partial q_{i1}}{\partial P_{o1}} \right)^{(1)}}$$

这里  $\left( \frac{\partial q_{i1}}{\partial P_{o1}} \right)$  为  $\frac{\partial q_{i1}}{\partial P_{o1}}$  在  $P_{o1} = \frac{P_s}{2}$  的值,  $\omega$  为适当选取的因子, 而  $P_{o1}^{(K+1)}$  和  $P_{o1}^{(K)}$  表

示  $P_{o1}$  的第  $K+1$  次和第  $K$  次迭代值。

对于任意给定的小量  $\epsilon > 0$ , 如果  $q_{i1} - q_{o1} < \epsilon$ , 则认为  $P_{o1}^{(K+1)}$  是所求的小孔出口压力。否则, 可令  $\eta_{o1} = P_{o1}^2$ , 再回到第一步求  $\eta$  及  $P = \sqrt{\eta}$ , 并继续上述过程。

同样地可对其他区域进行求解。这样, 组合起来可对  $\varphi$  从 0 至  $\pi$  整个半圆环区域进行求解, 从而确定出每一小孔出口压力  $P_{o1}, P_{o2}, \dots, P_{on}$ 。

现在我们对轴承的承载能力和偏位角进行计算。由于我们假定压力在三角形单元内是线性变化的, 因此压力的平均值为:

$$\bar{P} = \frac{1}{3} (P_i + P_j + P_k)$$

压力的作用点为  $(\bar{x}, \bar{y})$  (见图 6)。

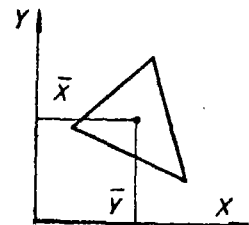


图 6

$$\begin{aligned} \overline{P\Delta x} &= \int_{\Delta} PX \, dx \, dy \\ &= \frac{1}{2\Delta} \int_{\Delta} x \{1, x, y\} \begin{vmatrix} a_i & a_j & a_k \\ b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} P_i \\ P_j \\ P_k \end{Bmatrix} dx \, dy \\ \overline{P\Delta y} &= \frac{1}{2\Delta} \int_{\Delta} y \{1, x, y\} \begin{vmatrix} a_i & a_j & a_k \\ b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} P_i \\ P_j \\ P_k \end{Bmatrix} dx \, dy \end{aligned}$$

如果原点取在三角形的中心, 即

$$(x_i + x_j + x_k)/3 = (y_i + y_j + y_k)/3 = 0$$

则下式积分成立

$$\begin{aligned} \int_{\Delta} X \, dx \, dy &= 0 \\ \int_{\Delta} X^2 \, dx \, dy &= \frac{\Delta}{12} (x_i^2 + x_j^2 + x_k^2) \\ \int_{\Delta} XY \, dx \, dy &= \frac{\Delta}{12} (x_i y_i + x_j y_j + x_k y_k) \end{aligned}$$

因此我们有

$$\begin{aligned} \overline{P\Delta X} &= \frac{1}{24} \begin{vmatrix} x_i^2 + x_j^2 + x_k^2 \\ x_i y_i + x_j y_j + x_k y_k \end{vmatrix}^T \begin{vmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} P_i \\ P_j \\ P_k \end{Bmatrix} \\ \overline{X} &= \frac{|X|^T |BC| |P|}{24\Delta P} \end{aligned}$$

同样可以求出  $\overline{y}$ , 即

$$\overline{y} = \frac{|Y|^T |BC| |P|}{24\Delta P}$$

$$\text{而 } |Y|^T = \begin{vmatrix} x_i y_i + x_j y_j + x_k y_k \\ y_i^2 + y_j^2 + y_k^2 \end{vmatrix}$$

点  $(\overline{x}, \overline{y})$  对应的  $\varphi$  与  $\theta$  为

$$\begin{aligned} \varphi &= \text{tg}^{-1} \frac{\overline{y}}{\overline{x}} \\ \theta &= \frac{\sqrt{\overline{x}^2 + \overline{y}^2} - R \sin \theta_0}{R} + \theta_0 \end{aligned}$$

轴承的垂直承载能力为

$$W_z = 2\Sigma \overline{P} \cdot \Delta \cdot \cos \theta$$

轴承的水平承载能力为

$$W_H = 2\Sigma \overline{P} \cdot \Delta \cdot \sin \theta \cos \varphi$$

故轴承的总承载能力为

$$W = \sqrt{W_H^2 + W_z^2}$$

合力作用方向亦即偏位角为

$$\beta = \text{tg}^{-1} \frac{W_H}{W_Z}$$

我们以图 3 所示的区域 I 为例，取不同的供压  $P_s$ 、 $\lambda$  和  $\theta_1$ 、 $\theta_2$ 、 $\theta_0$  进行计算，其中取  $\Delta R = 0.001$ ， $R = 10\text{cm}$ ， $d = 0.03\text{cm}$ ，计算结果如表 1 所示。

注： $P_s$  的单位是  $\text{kgf/cm}^2$ ， $W_z$ 、 $W_H$  的单位是  $\text{kgf}$ 。  
 $P_s$  和  $W$  的关系曲线如图 7。

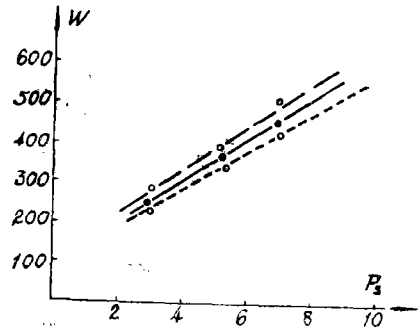


图 7

表 1

参数	$P_s$	$\lambda$	$C$	$\frac{e}{\Delta R}$	$\theta_2$	$\theta_1$	$\theta_0$	$W_z$	$W_H$	$W$
	3	2	0,006	0.5	55°	10°	35°	248.1	7.58	248.13
	5	2	0,036	0.5	55°	10°	35°	360.31	11.28	360.49
	7	2	0,006	0.5	55°	10°	35°	474.53	14.94	474.77
	3	2	0,006	0.5	50°	10°	35°	232.10	6.83	232.21
	5	2	0,006	0.5	50°	10°	35°	335.53	10.09	335.68
	7	2	0,006	0.5	50°	10°	35°	441.28	13.34	441.48
	3	2	0,006	0.5	50°	0°	35°	275.29	8.68	275.43
	5	2	0,006	0.5	50°	0°	35°	403.36	13.02	403.57
	7	2	0,006	0.5	50°	0°	35°	553.16	17.27	533.49

我们用一般的方法也进行了计算，其垂直负载容量  $W_z$  可用下式进行数值计算：

$$W_z = 2\pi R^2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} (P - P_s) \sin\theta \cos\theta d\theta$$

考虑水平偏移其气膜厚度  $h$  仍用 (5) 式，可以算出总的承载能力  $W$ 。

计算结果如表 2 所示。

表 2

参数	$P_s$	$\lambda$	$\theta_2$	$\theta_1$	$\theta_0$	$W$
	3	2	55°	10°	35°	273.51
	5	2	55°	10°	35°	566.42
	7	2	55°	10°	35°	857.72
	10	2	55°	10°	35°	1303.45

由上结果可以看出用一般方法计算偏差较大，采用有限元法计算的精确度较高，这是可取的。

# 气浮半周式轴承的应用 及其压力分布和承载能力的解析

贺金星 张鸿兴

(上海机械学院)

## 摘 要

本文提出的半周式气浮轴承可作为精密静平衡测量装置的支承, 或作为驱动力矩不大、低速回转的大型转子支承装置。并针对该类轴承从理论上定出比较符合实际的边界条件, 导出了压力分布和承载能力的公式。

## 一、前 言

众所周知, 在各类机械和某些试验装置中, 轴承是一个关键性零件。目前, 用近代机械制造的先进技术装备起来的轴承工厂, 大批量的系列化、标准化的生产滚动轴承, 各种规格、各种型号应有尽有, 任凭设计人员选用, 这是加速机械工业发展的一个重要保证。

但就静压气体轴承而言, 除了个别场合(如国外高速牙钻等)已经成批量的作为商品供应以外, 基本上还是处于专机专用的设计和制造。而迄今为止, 由于大学机械设计课程中还未把气体轴承列为必修章节。一般的设计人员对气体轴承还不够熟悉, 因此未能发挥气体轴承特长, 一定程度上影响了产品的升级换代, 这就需要气体轴承科技工作者利用各种形式介绍气体轴承, 使更多的结构产品为设计人员所采用。其中一个途径, 就是创造出更多种型式的气体轴承来。

本文提出的静压气浮式半周轴承, 可以适用于大型转子低速回转或静止不转的场合, 要求在没有磨损或极低的磨擦系数、转动力矩微小、不允许爬行以及装拆方便等情况下应用。

作为这种轴承的一个应用实例, 我们设计制作了双排供气小孔的气浮半周式轴承装置, 两端再装有止推静压轴承。在供给压缩空气后, 整个转子即可悬浮于静压气膜中, 被浮起的转子转动轻便自如, 几乎无需要转动力矩。该装置已作为我们实验室的一种新颖的气浮静平衡装置。这种气浮轴承十分适宜作静平衡装置的支承, 比如对于大型气轮机转子、电机转子以及大型平面砂轮等, 凡须作精密静平衡的场合, 都可设计这种半周式的气浮装置。而且转子的装卸十分简便, 稍加改进也可以作为开式的输送管道之用。

## 二、静平衡装置的应用

我们设计并制作的气浮静平衡装置见图1。整个装置主要是一对半周式静压气体轴承和一对静压气体止推轴承(止推目的是防止轴向窜动)。气源压力来自空压机。对该气浮静平衡装置测定的结果, 对50毫米轴颈重21公斤的转子作静平衡试验, 其平衡精度达到  $(4 \sim 5) \times 10^{-4}$  毫米, 这是其它型

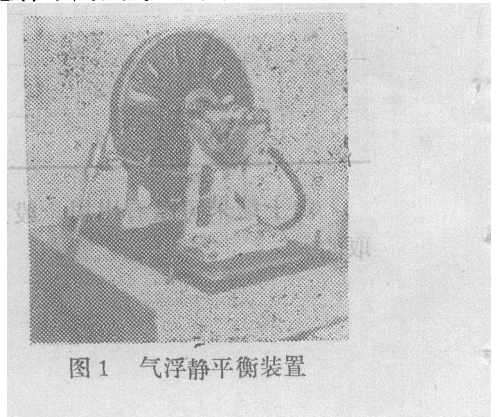


图1 气浮静平衡装置

式的静平衡装置所难以达到的。

### 三、压力分布和承载能力解析

作为动压轴承，有所谓的部分轴承<sup>(1)</sup>。作为静压轴承有半周式油静压轴承<sup>(3)</sup>，认为对于低速重载工作极为有利，其理论解析是建立在周向流的一元压力分布基础上，解出油膜压力分布规律。

本文介绍的半周式气体轴承，是双排沿周向等距分布的小孔布置，见图2。假设轴向流是远大于周向流来建立流量连续。而周向流和实际上点源的扩散影响在推导公式时亦不考虑。

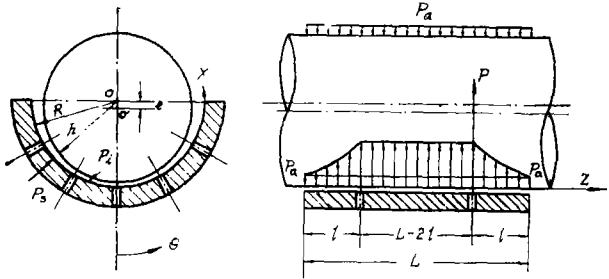


图2 半周轴承小孔布置及承载能力计算简图

下面为简化起见，假设气体为不可压缩和层流情况下来建立和导出气膜压力分布和承载能力公式。

对静压轴承在转子静止不动时 ( $U = 0$ ) 的雷诺方程有

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 0$$

或

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{3}{h} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

由  $x = R\theta$ ,  $h = c(1 - \epsilon \cos \theta)$  可知

$$\frac{3}{h} \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{3\epsilon \sin(x/R)}{R[1 - \epsilon \cos(x/R)]}$$

考虑  $\epsilon \ll 1$  时，由上式可知  $\frac{h}{3} \frac{2h}{\partial x}$  和  $\epsilon$  同数量级。又  $\epsilon \rightarrow 0$  时， $\frac{\partial p}{\partial x} \rightarrow 0$ 。可知  $\frac{\partial p}{\partial x}$  和  $\epsilon$  同数量级。故知  $\frac{3}{h} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x}$  和  $\epsilon^2$  同属高阶小量可略。

由此，式(1)可简化成拉普拉斯方程。为

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0 \quad (\epsilon \ll 1) \quad (2)$$

利用分离变量法，及考虑到压力分布的轴对称性， $P(x, z) = P(-x, z)$ ，可把上式解中的  $\sum_j b_j \sin(j \frac{x}{R})$  项除去，则式(2)有下列解的形式

$$P(x, z) = P_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \cos(j \frac{x}{R}) (A_j e^{jz/R} + B_j e^{-jz/R}) \quad (3)$$

对于半周式轴承所应满足的边界条件为

$$\begin{cases} P(\frac{\pi}{2}R, z) = P(-\frac{\pi}{2}R, z) = P(x, l) = P_0 \\ P(x, 0) = P_i(x) \quad (-\frac{\pi}{2}R \leq x \leq \frac{\pi}{2}R, 0 \leq z \leq l) \end{cases}$$

$P_a$  为环境压力,  $P_i$  表示小孔进入轴承间隙处的压力。利用边界条件  $P(x, l) = P_a$  可得

$$B_j = -A_j e^{2j l / R}$$

因此, 式(3)变为

$$P(x, z) = P_a + \sum_{j=1}^{\infty} A_j \cos(j \frac{x}{R}) \cdot [e^{jz/R} - e^{j(2l-z)/R}] \quad (4)$$

以下设法解出任意常数  $A_j$ , 对式(4)求偏导有

$$\left( \frac{\partial p}{\partial z} \right)_{z=0} = \sum_{j=1}^{\infty} A_j \cos(j \frac{x}{R}) \cdot \frac{j}{R} (1 + e^{2j l / R}) \quad (5)$$

在上述边界条件中, 第4个条件由于  $P_i(x)$  是未知函数而不能成立, 故重新考虑。根据沿轴向的流量方程有

$$q_z = - \frac{h^3}{12\mu} \left( \frac{\partial p}{\partial z} \right)_i \quad (6)$$

$q_z$  表示单位圆周长度沿轴向的流量。又流过一个层流供给管孔进入轴承间隙, 其管中的压降为

$$P_s - P_i = \frac{8\mu Q l_1}{\pi a^4} \quad (7)$$

式中,  $P_s$  为供气压力 (绝对压力);  $l_1$  为供给小孔的管道长度;  $a$  为小孔的半径;  $Q$  为流过一个孔的流量。

设周向每单位长度的供给孔数为  $n = N/\pi R$  (其中  $N$  为单排供给孔数), 则式(7)就为

$$q_{进} = \frac{\pi a^4 n}{8\mu l_1} (P_s - P_i) \quad (8)$$

根据流量连续,  $q_{进} = q_z$ , 则有

$$\frac{\pi a^4 n}{8\mu l_1} (P_s - P_i) = - \frac{h^3}{12\mu} \left( \frac{\partial p}{\partial z} \right)_i$$

把膜厚表达式  $h = c(1 - \varepsilon \cos \frac{x}{R})$  代入上式, 可得

$$\left( \frac{\partial p}{\partial z} \right)_i = \frac{3\pi a^4 n (p_s - p_i)}{2C^3 l_1 (1 - \varepsilon \cos \frac{x}{R})^3}$$

令  $\Lambda = \frac{3\pi a^4 n}{2C^3 l_1}$ , 并对  $\frac{1}{(1 - \varepsilon \cos \frac{x}{R})^3}$  按二项式展开 (因为  $\varepsilon \cos \frac{x}{R} \ll 1$ ), 略

去  $\varepsilon$  的高次项。

则有

$$\left( \frac{\partial p}{\partial z} \right)_{z=0} = \left( \frac{\partial p}{\partial z} \right)_i = -\Lambda (1 + 3\varepsilon \cos \frac{x}{R}) (P_s - P_i) \quad (9)$$

上式是根据流量连续条件而得到的一个近似表达式, 可作为  $z = 0$  处的一个边界条件。

其中  $P_i$  可由式(4)获得, 即

$$P_i(x, 0) = P_a + \sum_{j=1}^{\infty} A_j \cos(j \frac{x}{R}) (1 - e^{2j l / R}) \quad (10)$$

由式 (5)、(9)、(10) 可得

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{\infty} A_j \cos\left(j \frac{x}{R}\right) \left(\frac{j}{R}\right) (1 + e^{2j l/R}) \\ &= -A(1 + 3\varepsilon \cos \frac{x}{R}) [P_s - (P_a + \sum_{j=1}^{\infty} A_j \cos(j \frac{x}{R}) (1 - e^{2j l/R}))] \end{aligned} \quad (11)$$

为计算简单起见, 取  $A_j = 0, j = 2, 3, \dots$ , 于是得到近似解

$$P(x, z) = P_a + A_1 \cos \frac{x}{R} [e^{z/R} - e^{(2l-z)/R}]$$

其中  $A_1$ , 可由式(11)中令  $x = 0$  解得如下:

$$A_1 = \frac{AR(1 + 3\varepsilon)(P_s - P_a)}{AR(1 + 3\varepsilon)(1 - e^{2l/R}) - (1 + e^{2l/R})}$$

则

$$P(x, z) = P_a + \frac{AR(1 + 3\varepsilon)(P_s - P_a) \cos \frac{x}{R} [e^{z/R} - e^{(2l-z)/R}]}{AR(1 + 3\varepsilon)(1 - e^{2l/R}) - (1 + e^{2l/R})} \quad (12)$$

上式表示轴承从进气截面到轴端的压力分布。

关于中间部分的压力分布, 沿轴向  $(L - 2l)$  假设为直线<sup>[2]</sup>, 而周向压力分布就按流体进口处截面  $(z = 0)$  处的压力分布, 即

$$P_i = P(x, 0) = P_a + \frac{AR(1 + 3\varepsilon)(P_s - P_a) \cos(1 - e^{2l/R})}{AR(1 + 3\varepsilon)(1 - e^{2l/R}) - (1 + e^{2l/R})} \quad (13)$$

按上面的近似处理, 获得的沿轴向的压力分布可见图 2 所示, 整个轴承面上的压力分布如展开图 3 所示。

设半周轴承的总承载能力为

$$W = W_1 + W_2$$

其中  $W_1$  为中间段的承载能力,  $W_2$  为两边的承载能力。

则不难对式(12)和式(13)分别积分获得。

$$\begin{aligned} W_1 &= 2 \int_0^{(L-2l)} \int_0^{\pi} P_i \cos \theta \cdot R \cdot d\theta \cdot dz \\ &= 2(L-2l)R \left[ P_a + A_1(1 - e^{2l/R}) \cdot \frac{\pi}{4} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_2 &= 4 \int_0^l \int_0^{\pi} P(x, z) R \cdot \cos \theta \cdot d\theta \cdot dz \\ &= 4RIP_a + A_1 \pi R^2 (2e^{l/R} - e^{2l/R} - 1) \end{aligned}$$

经合并和代换后, 总的承载能力为

$$\begin{aligned} W &= W_1 + W_2 \\ &= 2RIP_a + \frac{\pi R^2 A (1 + 3\varepsilon) (P_s - P_a) \left[ \left(\frac{L}{2} - l\right) (1 - e^{2l/R}) + R (2e^{l/R} - e^{2l/R} - 1) \right]}{AR(1 + 3\varepsilon)(1 - e^{2l/R}) - (1 + e^{2l/R})} \\ &= 2RIP_a + \pi R^2 A (1 + 3\varepsilon) (P_s - P_a) \\ & \quad \left[ \frac{\left(\frac{L}{2} - l\right) Sh \frac{l}{R} + R \left( ch \frac{l}{R} - 1 \right)}{AR(1 + 3\varepsilon) Sh \frac{l}{R} + ch \frac{l}{R}} \right] \end{aligned} \quad (14)$$

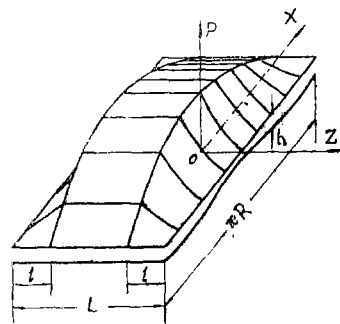


图 3 轴承面展开的压力分布

从上式可知, 承载能力为两项相加, 其中第一项  $2RLP_0$  表示轴颈投影面积上承受的大气压力, 由于半周轴承的上半平面是环境压力  $P_0$ , 显然, 对轴承产生的大气压力为  $2RLP_0$ , 这和承载的第一项  $2RLP_0$  可抵销。故, 半周轴承的实际承载能力计算公式应为

$$W = \pi R^2 A(1 + 3\varepsilon)(P_1 - P_0) \left[ \frac{\left(\frac{L}{2} - l\right) Sh \frac{l}{R} + R(ch \frac{l}{R} - 1)}{AR(1 + 3\varepsilon) Sh \frac{l}{R} + ch \frac{l}{R}} \right] \quad (15)$$

#### 四、分析及计算例

上述按不可压缩流体所导得的压力分布和承载能力计算公式, 对于这种静压的半周式轴承性能分析和计算较为方便。如果考虑到气体的可压缩性或紊流供气等情况, 可作相应的代换、另有推导。

由式(12)及图示可知, 压力分布沿周向为余弦曲线, 二侧沿轴向类似于负指数曲线。中间段沿轴向的压力分布按一般假设, 作直线处理, 如要考虑周向流和点源的扩散影响, 可参考 Shires 所推导的非轴向流的半实验修正式子作承载能力的修正<sup>[2]</sup>。

对于本文前面介绍的静平衡装置所用的半周式轴承可见图 2, 其中参数为

$$R = 25 \text{ mm}; \quad L = 50 \text{ mm}; \quad l = 12.5 \text{ mm}; \quad c = 0.025 \text{ mm}; \\ n = 5$$

$$\text{设 } P_1 = 4 \text{ kgf/cm}^2; \quad P_0 = 1 \text{ kgf/cm}^2; \quad \varepsilon = 0.5$$

代入公式(15), 计算获得承载量  $W = 11.597 \text{ kgf}$  这和我们实测时, 轴的承荷重  $10.875 \text{ kgf}$ , 供气压力表为  $3 \text{ kgf/cm}^2$  左右。可见所得公式计算结果和实测数据是很接近的, 误差并不很大。所以推导中虽作了一些近似处理, 但实际应用时也足够了。

#### 参 考 文 献

- [1] O.平克斯, B. 斯德因李希特 著, 西安交通大学轴承研究小组 译,《流体动力润滑理论》,机械工业出版社。
- [2] J.W.Powell 著, 丁维刚等译,《空气静压轴承设计》,国防工业出版社。
- [3] 曾田範宗,《轴受》,岩波書店。