

# 大型静压气体止推轴承的设计计算法

韩焕臣

(航天部13所)

## 摘 要

采用粘性系数小的空气作为润滑剂使用,理论的出现已经经历了百余年了。但是,气体轴承登上科学技术的舞台、充分发挥其独特的长处,还是最近二十多年来的事。气体轴承的摩擦小、寿命长,适用于高温、低温和辐射能等各种复杂的环境。所以,在宇宙航空、精密仪器、精密机械、电子计算机、原子能开发以及化学工业和医疗方面都起着很大的作用。

但是,众所周知,为了计算和应用的方便,对于作为气体润滑理论基础的流体力学与其基本方程式作了许多假设和简化。这对于简化设计是必要的。但是,这种分析方法与实际情况有很大的差异,这就给轴承的设计计算工作带来了误差。目前,在设计气体轴承时所采用的设计计算方法,大都是基于一元流动的理论。这种计算方法简便,容易掌握,同时有现成的图表可查,然而计算的误差相当大。特别是当轴承的几何尺寸大、进气孔数目与孔径的大小选择不得当时,这项误差大到使计算结果难以置信的程度。

提高设计计算的精度,其价值在于使设计计算的结果具有更大程度的可靠性,同时也避免在设计中对加工精度和功率的需求提出过高和过苛的要求。

本文说明了一种基于复变函数理论的计算方法,报告了采用这种方法对大型多进气孔止推轴承进行设计计算的结果。计算的结果与对实物测试所得到的数据较好地吻合。

## 一、复变函数理论的计算方法

从实质上来说,气体在轴承间隙中的流动是一个三元的空间流动。但是,为了数学上的简化,在处理手法上通常采用一些假设。也就是,在一定条件下,可以把一个三元流动看成是一个二元平面流动。即假设:

1. 流体是牛顿流体,粘性系数一定;
2. 流体通过节流器和轴承间隙的流动都是粘性层流、稳态流( $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ )、等温流动。
3. 轴承的间隙很小,比起轴承的尺寸来说小得多。因此,流体在沿着膜厚方向的压力变化可以忽略不计。
4. 流体的体积力(重力和惯性力)可以忽略不计。

根据以上假设,可以得出下列表述二元平面流动的雷诺方程式,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\rho h^3}{\mu} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\rho h^3}{\mu} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} \right) = 6U \frac{\partial(\rho h)}{\partial x} \quad (1)$$

其中,

$x, y$ : 直角坐标

$U$ : 相对滑动速度 ( $x$ 方向和 $y$ 方向)

$p, \rho$ : 分别表示流体的压力和密度

$h$ : 轴承间隙

$\mu$ : 流体的粘性系数

如果假设轴承间隙  $h$  和流体粘度  $\mu$  都为常数, 另外设轴承可动部分的相对速度不太大时, 方程式的右部可以忽略不计。此时, 方程式 (1) 可以归结为如下拉普拉斯方程式

$$\frac{\partial P}{\partial x^2} + \frac{\partial P}{\partial y^2} = 0 \quad (2)$$

对于非压缩性流体  $P = p$ , 而对于压缩性流体  $P = p^2$ 。

现在来考虑多气孔供气的静压气体止推轴承。如果将止推轴承的表面看成是一个复数平面  $Z = x + iy$ , 则函数  $Z$  的正规函数  $W(Z)$  的实数部分和虚数部分根据柯西—黎曼条件满足式 (2) 的要求。

设  $x, y$  方向的流体的流动速度分别用  $u$  和  $v$  来表示, 则根据 *Navier-Stokes* 方程的积分结果可以得到:

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{1}{2\mu} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \cdot Z(h-Z) \\ v &= -\frac{1}{2\mu} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} Z(h-Z) + \frac{U_z}{h} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

在静止状态下或者在滑动速度比起压力梯度所产生的流速来说可以忽略不计的条件下, 如前所述, 同样可以得到 (2) 式所表述的拉普拉斯方程式。如果能够得到满足边界条件的复数  $Z$  的正规函数  $W(Z)$  的话, 因为其实数部分和虚数部分满足拉普拉斯方程, 就可以得到轴承间隙内的压力分布, 进而可以得到轴承的承载特性和流量特性。这种复数势函数的理论与方法, 对于求解静压轴承的雷诺方程式的二元流解是极其有效的方法。

## 二、大型静压气体止推轴承的计算

现在, 让我们采用复数函数理论的方法来求解大型多气孔静压气体轴承的性能参数。轴承的几何参数的符号如图 1 所示。其复数势函数为

$$W(Z) = \frac{q}{2\pi} \sum_{j=0}^{k-1} \left[ \log \sin \frac{\pi \log \{(Z/a) \exp(i2\pi j/k)\}}{2 \log(r_0/r_1)} - \log \sin \frac{\pi \log \{(aZ/r_0^2) \exp(i2\pi j/k)\}}{2 \log(r_0/r_1)} \right] \quad (4)$$

从式 (4) 的实数部分可以得到非压缩性流体的压力分布解。即

$$p = K_1 \sum_{j=-\infty}^{\infty} \{ \log(\sin^2 A_1 + \sin^2 h^2 B_j) - \log(\sin^2 A_0 + \sin^2 h^2 B_j) \} + K_2 \quad (5)$$

其中,

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{\pi \log(ar/r_o^2)}{2 \log(r_o/r_1)} \\ A_o &= \frac{\pi \log(r/a)}{2 \log(r_o/r_1)} \\ B_j &= \frac{\pi(\theta + 2\pi j/k)}{2 \log(r_o/r_1)} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

边界条件:

$$\left\{ \begin{aligned} r=r_1 \quad p=p_o \\ \quad \quad \quad (\text{环境条件}) \\ r=a-r_o \quad \theta=0 \quad p=p_o \end{aligned} \right.$$

将以上边界条件代入方程式(5), 得到系数 $K_1$ 和 $K_2$

$$K_1 = \frac{p_o - p_a}{\sum_{j=-\infty}^{\infty} \log \left[ \frac{\sin^2 B_{1,j} + \sinh^2 B_{o,j}}{\sin^2 A_{o,j} + \sinh^2 B_{o,j}} \right]} \quad (7)$$

$$K_2 = p_a \quad (8)$$

其中,

$$\left. \begin{aligned} A_{o,j} &= A_o \Big|_{r=a-r_o} \\ A_{1,j} &= A_1 \Big|_{r=a-r_o} \\ B_{o,j} &= B_j \Big|_{\theta=0} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

系数 $K_1$ 中的分母部分计算不太多次就可以很快收敛, 精度完全可以满足。比如说, 对于具有16个进气孔的轴承来说, 只要计算8~9次就可以满足要求了。

轴承的承载特性和流量特性可以由下式来计算:

$$W = \pi k K_1 \left\{ (r_1^2 - r_o^2) \frac{\log(a/r_o)}{\log(r_1/r_o)} - \left( a^2 - r_o^2 - \frac{r_o^2}{2} \right) \right\} \quad (10)$$

$$Q = \frac{\pi k h^3 K_1}{3\mu} \quad (11)$$

根据式(10)和式(11)所求得的结果是假设流体为非压缩性流体的结果。如果考虑流体的压缩性, 其数值还要大一些。但是, 为了轴承工作时对安全可靠起见, 可以直接取非压缩性承载能力来代替压缩性解, 而不必进行解的转换。

关于体积流量, 必须进行由非压缩性解到压缩性解的转换。

$$Q_{\text{压}} = \frac{p_o + p_a}{2p_a} \cdot Q \quad (12)$$

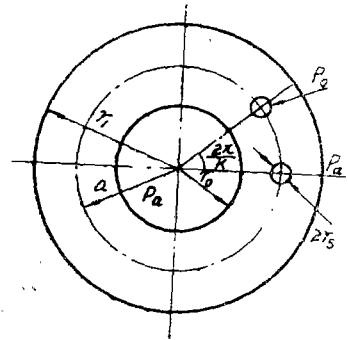


图1 轴承示意图

### 三、ST-1高精度伺服转台主轴静压气体止推轴承的设计计算

ST-1大型转台是一个高精度双轴伺服转台。其主轴是由分离供气型轴颈轴承和止推轴

承组合的横“H”型轴承(图2)。为了提高轴承的承载能力,在轴承的工作面上均设有浅的等压槽。但是,为了分析和计算的方便起见,计算中不予考虑。

轴承的工作参数如下:

外半径 $r_1 = 360\text{mm}$ ;

内半径 $r_o = 225\text{mm}$ ;

节流孔径 $r_s = 0.15\text{mm}$ ;

供气孔数目 $k = 16$ ;

供气压强 $p_s = 6\text{kgf/cm}^2$ ;

环境压力 $p_o = 1\text{kgf/cm}^2$

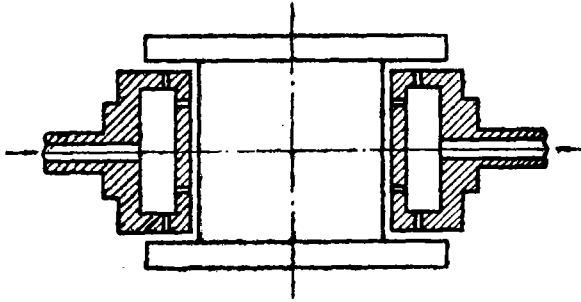


图2 ST-1 高精度转台主轴示意图

1. 止推轴承的承载系数和流量系数

设 $F_w$ 为承载系数, $F_q$ 为流量系数,则

$$F_w = W / (p_o - p_s) \cdot S \quad (13)$$

$$S = \pi(r_1^2 - r_o^2)$$

$$F_q = \frac{3\mu Q}{\pi h^3 (p_o - p_s)} = \frac{kK_1}{p_o - p_s} \quad (14)$$

将式(7)、(10)、(11)代入式(13)和(14)得

$$F_w = \frac{k \left\{ (r_1^2 - r_o^2) \frac{\log(a/r_o)}{\log(r_1/r_o)} - \left( a^2 - r_o^2 + \frac{r_s^2}{2} \right) \right\}}{\sum_{j=-\infty}^{\infty} \log(A)} \quad (15)$$

$$F_q = \frac{kK_1}{p_o - p_s} = \frac{k}{\sum_{j=-\infty}^{\infty} \log(A)} \quad (16)$$

$$A = \frac{\sin^2 A_{1s} + \sinh^2 B_{sj}}{\sin^2 A_{os} + \sinh^2 B_{sj}}$$

采用电子计算机对上述两个系数进行了计算,结果绘成图3上的曲线。从这些曲线可以看出,当 $a/r_o$ 约等于1.3时,轴承的承载系数最大,而流量系数最小。

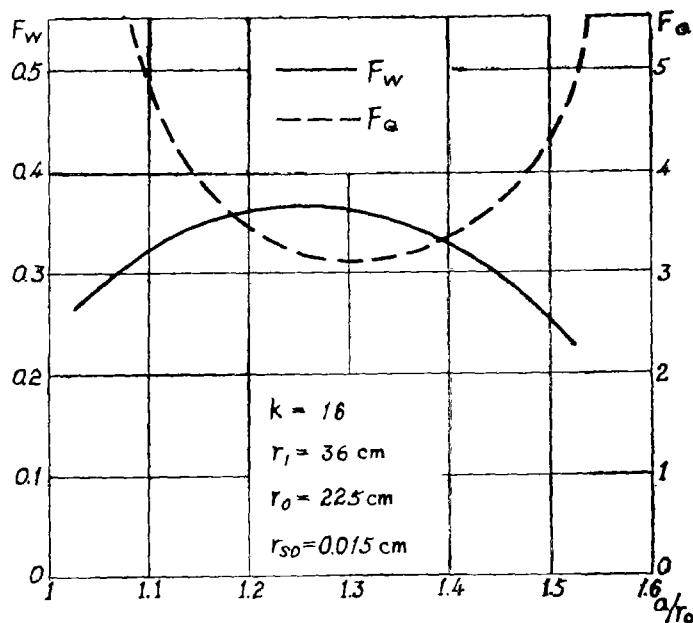


图3 承载系数与流量系数

## 2. 中间压力 $p_0$ 和轴承供气常数 $\Gamma$ 的确定

计算轴承的承载特性和流量特性，只有承载系数和流量系数是不够的。从式(15)和式(16)可以看出，承载系数 $F_w$ 和流量系数 $F_a$ 是由轴承的几何尺寸以及轴承供气孔的各项参数决定。然而，轴承节流后的气膜压力 $p_0$ 对于确定轴承的承载特性和流量特性有着重要意义。轴承间隙中的压力 $p_0$ 与节流器的设置有着直接的关系。

大家都知道，静压轴承通常采用的节流器有孔式、毛细管式及沟槽式等三种。ST-1转台采用的是孔式的圆形气腔节流器。

通过进气孔进入轴承间隙的流体的总质量流量为

$$M_{\lambda} = \frac{C_d \pi r_s^2 p_s \phi k}{(RT)^{1/2}} \quad (17)$$

经过轴承间隙而流出的质量流量为

$$M_{\text{出}} = \frac{(p_0^2 - p_a^2) \pi h^3}{6 \mu RT \log(a/r_0)} \quad (18)$$

根据流量连续性原理，可以得到 $p_0$ 的方程式，即

$$\frac{p_0^2 - p_a^2}{\phi} = \frac{6 \mu C_d k r_s^2 (RT)^{1/2} \log(a/r_0)}{h^3} \cdot p_s \quad (19)$$

其中， $\phi$ 是流量系数，由下式决定

$$\phi = \left\{ \frac{2k}{k-1} \left[ \left( \frac{p_0}{p_s} \right)^{\frac{2}{k}} - \left( \frac{p_0}{p_s} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right] \right\}^{\frac{1}{2}} : \frac{p_0}{p_s} \geq \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}} \quad (20)$$

$$\phi = \left\{ \frac{2k}{k+1} \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{2}{k-1}} \right\}^{\frac{1}{2}} : \frac{p_0}{p_s} < \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}}$$

以上式中,  $C_s$ : 通过小孔的流量系数, 一般情况下取  $0.8 \sim 0.85$

$R, T$ : 气体常数和绝对温度

$k$ : 绝热指数

方程 (19) 也可以用无量纲形式表示, 则

$$P^2 - 1 = P_s \Gamma \phi \tag{21}$$

$$P_o = \frac{p_o}{p_a}, \quad P_s = \frac{p_s}{p_a}$$

其中  $\Gamma$  称为供气常数, 其定义为

$$\Gamma = \frac{6\mu C_s k r_s^2 (RT)^{\frac{1}{2}} \log(a/r_o)}{p_a h^3} \tag{22}$$

根据式 (19) 及 (21) 可以采用电子计算机解超越方程的方法来求得表压比  $(p_o - p_a) / (p_s - p_a)$  与轴承间隙  $h$  间的关系曲线 (图 4), 也可以作出表压比对  $\Gamma$  的关系曲线 (图 5), 从而可以确定轴承的最佳工作点。理论和实践证明, 对于单个孔式止推轴承, 最佳工作点是当表压比为 0.691 时。

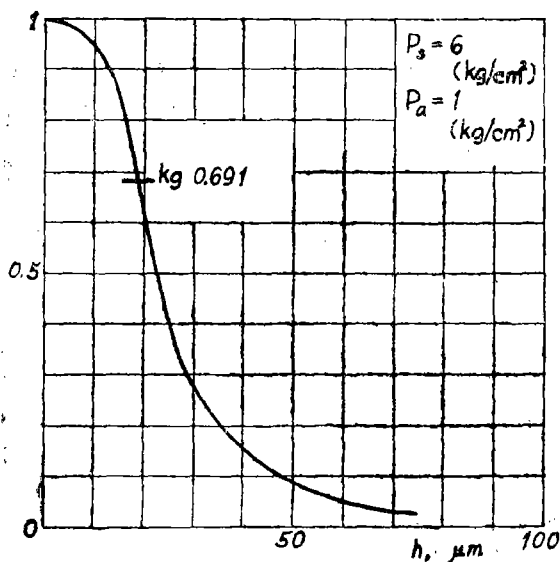


图 4 表压比与间隙的关系曲线

### 3. 轴承最佳工作间隙 $h^*$ 的确定

静压气体轴承设计的核心问题是合理地选定节流器的参数及轴承间隙。当进气孔的数目与孔径的大小均已确定时, 间隙的确定就成为设计计算的重要问题。对于已知的 ST-1 转台主轴轴承的设计条件, 从图 4 可知轴承的最佳工作状态时的中间压力  $P_o$  为  $4.45 \text{ kgf/cm}^2$ , 最佳工作间隙  $h^*$  约为  $18 \mu\text{m}$ 。

若节流孔的数目与孔径没有确定, 可根据图 5 所示, 首先确定供气常数  $\Gamma$ 。对于前述已知的轴承设计条件来说,  $\Gamma$  约为 5.2。然后可以根据式 (22) 综合选定轴承的进气孔参数和轴承间隙。

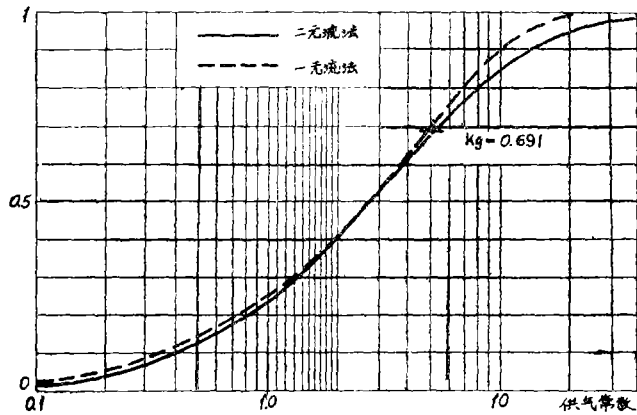


图5 表压比与供气常数的关系曲线

4. 轴承承载特性的计算

根据式 (15) 计算轴承的承载系数  $F_w$  为 0.365。对于单个止推轴承，其承载能力为

$$\begin{aligned}
 W &= F_w(p_0 - p_a)S \\
 &= 0.365(4.45 - 1)\pi(36^2 - 22.5^2) \\
 &= 3079 \text{kgf}
 \end{aligned}$$

如图 2 所示, 为了保证  $ST-1$  转台的主轴轴向定位, 主轴采用了两个止推轴承相对安装, 组合匹配的形式, 以便获得更高的刚度。两个止推轴承的组合特性如图 6 所示, 根据这条曲线就可以计算组合后的两个轴承的综合承载能力和组合刚度。

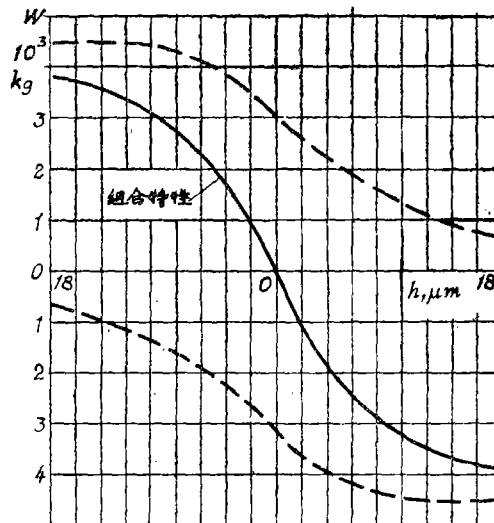


图6 两个止推轴承的组合特性

轴承的极限承载能力

$$W_{\text{极限}} = 3840 \text{kgf}$$

轴承的最大刚度 (轴向处于中间位置时)

$$K_{\text{最大}} = \frac{dw}{dh} = 407.5 \text{ kgf}/\mu\text{m}$$

轴承消耗气体的流量的计算

$$Q = \frac{F_0 \pi h^3 (p_0 - p_a)}{3\mu} = 0.022 \text{ m}^3/\text{min}$$

压缩性气体体积流量为

$$Q_{\text{压}} = \frac{p_0 + p_a}{2p_a} \cdot Q = 0.06 \text{ m}^3/\text{min}$$

对于两个止推轴承，其总的体积流量为

$$Q_{\text{总}} = 2 \times 0.06 = 0.12 \text{ m}^3/\text{min}$$

### 四、测试结果与考察

上述计算的结果，是轴承在最佳设计状态下所具有的性能。但是，由于我们实际得到的轴承的参数与理论的轴承设计参数间有一定的差异，直接进行比较是不可能的，只能采取间接比较的办法。即，将实际参数的轴承用上述方法计算出来的轴承性能与实测数据进行比较的方法。

比较结果如下：

轴 承 性 能	理 论 值	实 测 值
承 载 能 力(kgf)	3840	—
刚 度(kgf/μm)	150	130

注：实际轴承的单边间隙约为 25μm，浮子组件自重约 700kgf。

应该说明的是由于轴承的承载大，无法实现轴承的最大承载能力的测量，而刚度的测量数据也较少，有待进一步进行实验测定。考察以上结果可以得出如下结论：

1. 大型静压气体止推轴承的设计，采用本文所述的方法是有效的、合理的；
2. 复数函数理论的方法计算的轴承性能，与实测数据较为一致；
3. 为了便于设计人员采用此种方法，编制基于二元流理论的设计曲线与图表是非常必要的。

(本文原文1980年3月在日本完成，曾经过日本京都大学森美郎教授和森淳畅博士的指教与审阅，在此致以谢意)。

### 参 考 文 献

[1] 森美郎、矢部宽，《機械の研究》，1967，Vol.19, No.8.  
 [2] H.Yabe, Theoretical investigations of externally pressurized gas-bearings, Kyoto University

- [ 3 ] 矢部寛:「潤滑」1972, Vol.17, No.7-8
- [ 4 ] J.W.Powell: Design of Aerostatic Bearings, The Machinery Publishing Co. LTD  
(1970)
- [ 5 ] D.F.Wilcock: Design of Gas Bearings, MIT, Latham, New York (1972)
- [ 6 ] 気体軸受の理論と設計およびその応用, 日本機械学会第388回講習会教材 (1973)