# 全息凹面光栅的点列图

庄　夔

## 一、前　言

为了评价全息凹面光栅的成象质量，我们同时采用了两种方法：一是通过光线追迹，求出它的点列图，在理论上进行分析和评价；二是采用拍照该光栅的谱线，在实际上进行核对和最后评价。在设计全息凹面光栅时，得出不同的仪器结构参数（$r_A$、$r_B$、$\rho$、$\alpha$、$\beta$）和记录参数（$r_C$、$r_D$、$\gamma$、$\delta$），我们根据它们的点列图，在制造之前，就能判断出那些结果使用效果最佳，还能利用它修正记录参数，选定最佳值。然后在制造时实测谱线，并改正各种参数，使它达到优良的谱线质量。本文参照文献[1]着重讨论点列图。

## 二、光线追迹公式

对于光线 $APB$，光程函数由下式表示：

$$F = AP + PB + nm\lambda \tag{1}$$

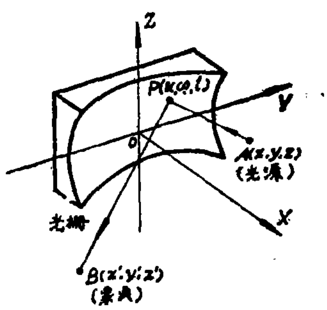


图 1

依照费马原理：

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial w}\delta w + \frac{\partial F}{\partial l}\delta l = 0\text{，即}\frac{\partial F}{\partial w} = 0\text{，和}\frac{\partial F}{\partial l} = 0 \tag{2}$$

对（1）式作偏微分得到：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial AP}{\partial w} + \dfrac{\partial PB}{\partial w} + m\lambda\dfrac{\partial n}{\partial w} = 0 \\ \dfrac{\partial AP}{\partial l} + \dfrac{\partial PB}{\partial l} + m\lambda\dfrac{\partial n}{\partial l} = 0 \end{cases} \tag{3}$$

对全息光栅来说，$n = \dfrac{1}{\lambda_0}(CP - DP - r_C + r_D)$，

$$\frac{\partial n}{\partial w}=\frac{1}{\lambda_0}\left[-\frac{\partial u}{\partial w}(L_c-L_D)-(M_c-M_D)\right],\quad \frac{\partial n}{\partial l}=\frac{1}{\lambda_0}\left[-\frac{\partial u}{\partial l}(L_c-L_D)-(N_c-N_D)\right],$$

令 $\frac{\partial AP}{\partial w}=-L\frac{\partial u}{\partial w}-M$, $\frac{\partial PB}{\partial w}=-L'\frac{\partial u}{\partial w}-M'$,

$\frac{\partial AP}{\partial l}=-L\frac{\partial u}{\partial l}-N$, $\frac{\partial PB}{\partial l}=-L'\frac{\partial u}{\partial l}-N'$,

代入 (3) 式得到： (4)

$$\begin{cases}[L+L'+S(L_c-L_D)]\dfrac{\partial u}{\partial w}+M+M'+S(M_c-M_D)=0\\[2ex][L+L'+S(L_c-L_D)]\dfrac{\partial u}{\partial l}+N+N'+S(N_c-N_D)=0.\end{cases}$$

式中 $n$为槽序数；$S=m\lambda/\lambda_0$；$(L、M、N)$，$(L'、M'、N')$、$(L_c、M_c、N_c)$和$(L_D、M_D、N_D)$分别为光线 $AP$、$PB$、$CP$和$DP$的方向余弦；对于超环面光栅，$\frac{\partial u}{\partial w}=\frac{w}{R-u}$，

$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{l}{R-u}\left(1+\frac{R-\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}}\right)$；当短半径 $\rho$ 等于长半径$R$时，则为凹球面光栅。

由已知条件，可求出每条衍射光线$PB$的方向余弦 $L'$、$M'$、$N'$，并可计算象点$B$在象平面上的座标值为：

$$\begin{cases}Y=(w+GM'-r_B\sin\beta_0)\sec\beta_0\\ Z=l+GN'\end{cases}\tag{5}$$

式中 $$G=\frac{r_B-u\cos\beta_0-w\sin\beta_0}{L'\cos\beta_0+M'\sin\beta_0}\tag{6}$$

由以上的座标值，可画出点列图。

## 三、计 算 实 例

利用这些光线追迹的公式，我们编出了计算机程序，在 503 大型电子计算机上计算并打印出座标值。

对于濑谷—波冈单色仪

$$\left.\begin{aligned}&r_A,\ r_B=\text{常数},\quad 2C=\alpha-\beta_0=\text{常数}\\&\alpha=C+\theta,\ \theta=\sin^{-1}\left(\frac{m\lambda}{2\sigma\cos C}\right)\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

式中 $\sigma$ 为有效的光栅常数，$\theta$是从$2C$角的平分线量取的光栅旋转角，$2C$是$A_0OB_0$角。

对于超环面光栅，$P(u,w,l)$点的$x$座标为：

$$u=R-R\left[1-\frac{2\rho}{R}\left\{1-\sqrt{1-(l/\rho)^2}\right\}+\frac{2\rho^2}{R^2}\left\{1-\sqrt{1-(l/\rho)^2}\right\}-\frac{w^2+l^2}{R^2}\right]^{1/2}$$
$$=\frac{w^2}{2R}+\frac{l^2}{2\rho}+\frac{w}{8R^3}+\frac{l^4}{8\rho^3}+\frac{w^2l^2}{4R^2\rho}+O\left(\frac{w^6}{R^5}\right)\tag{8}$$

由方程式（3），我们得到：

$$\frac{1}{u-R}\left[L+L'+S(L_c-L_D)\right]=\frac{1}{w}\left[M+M'+S'(M_c-M_D)\right]$$

$$=\frac{1}{l}\left[1+\frac{R-\rho}{\sqrt{\rho^2-l^2}}\right]^{-1}\left[N+N^1+S(N_c-N_D)\right]\equiv T \tag{9}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} L&=\frac{x-u}{AP}, & M&=\frac{y-w}{AP}, & N&=\frac{z-l}{AP};\\ L_c&=\frac{x_c-u}{CP}, & M_c&=\frac{y_c-w}{CP}, & N_c&=\frac{-l}{CP};\\ L_D&=\frac{x_D-u}{DP}, & M_D&=\frac{y_D-w}{DP}, & N_D&=\frac{-l}{DP};\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

$$\left.\begin{aligned} AP&=\left[r_A{}^2+z^2+u^2+w^2+l^2-2ur_A\cos\alpha-2wr_A\sin\alpha-2zl\right]^{1/2};\\ CP&=\left[r_c{}^2+z_c{}^2+u^2+w^2+l^2-2ur_c\cos\gamma-2wr_c\sin\gamma-2z_cl\right]^{1/2};\\ DP&=\left[r_D{}^2+z_D{}^2+u^2+w^2+l^2-2ur_D\cos\delta-2wr_D\sin\delta-2z_Dl\right]^{1/2};\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

应用关系式$L'^2+M'^2+N'^2=1$，可以解出未知数$T$：

$$T=\frac{1}{a}\left[p-\sqrt{p^2-aq}\right] \tag{12}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} a&=(u-R)^2+w^2+l^2\left[1+\frac{R-\rho}{\sqrt{\rho^2-l^2}}\right]^2,\\ p&=(u-R)\left[L+S(L_c-L_D)\right]+w\left[M+S(M_c-M_D)\right]\\ &\quad+l\left[1+\frac{R-\rho}{\sqrt{\rho^2-l^2}}\right]\left[N+S(N_c-N_D)\right]\\ q&=\left[L+S(L_c-L_D)\right]^2+\left[M+S(M_c-M_D)\right]^2+\left[N+S(N_c-N_D)\right]^2-1\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

因此可以求得衍射光线$BP$的方向余弦：

$$\left.\begin{aligned} L'&=(u-R)T-L-S(L_c-L_D),\\ M'&=wT-M-S(M_c-M_D),\\ N'&=lT\left[1+\frac{R-\rho}{\sqrt{\rho^2-l^2}}\right]-N-S(N_c-N_D),\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

点列图是作在通过$B_0$点，并垂直于衍射主光线$OB_0$的象平面上，依据文章[2]，此时：

$$\beta_0=\beta=-C+\theta \tag{15}$$

我们由方程式（14）可计算出另一个$\beta_0$值为：

$$\beta_0=\sin^{-1}\left[-\sin\alpha-S(\sin\gamma-\sin\delta)\right] \tag{16}$$

计算结果表明，(15）式与（16）式相差零点几度，也即是用（15）式的$\beta_0$值时，经过$z=0$；$w=0$、$l=0$ 的光线衍射后，不通过象平面原点，且两个象平面相差零点几度。解决的办法有两个：一是使用（16）式计算$\beta_0$值，二是用（15）式计算的点列图，最后需平移$Y$座标轴，使经过$z=0$、$w=0$、$l=0$ 的光线衍射后，通过新座标的原点，所得近似结果仍然可用。

衍射光线与象平面的交点的座标为：

$$\begin{cases} Y=(w+GM'-r_B\sin\beta_0)\sec\beta_0\\ Z=l+GN'\end{cases} \tag{17}$$

这些点列构成了全息凹面光栅的点列图。

点列图程序编号为：*GRATING SPOT* 83*t*2，数据输入（*read*）为：*c*，*d*，*r*，*r*1，*rc*，*rd*，m，*w*1，*w*2，*w*3，*l*1，*l*2，*l*3，*vl*，*v*2，*v*3，*z*1，*z*2，*z*3，*e*，*f*，*R*，*RO*；

以上符号分别代表下列符号：

$\gamma$，$\delta$，$r_A$，$r_B$，$r_C$，$r_D$，m（光谱级次），*w*1（光栅宽度座标最小值），*w*2（步长），*w*3（光栅宽度座标最大值），*l*1（光栅高度座标最小值），*l*2（步长），*l*3（光栅高度座标最大值），*v*1（使用波长最小值），*v*2（步长），*v*3（使用波长最大值），*z*1（入射狭缝座标最小值），*z*2（步长），*z*3（入射狭缝座标最大值），*e*（*C*），*f*（光栅常数$\sigma$），*R*（长半径），*RO*（短半径$\rho$）。

## 四、计 算 结 果

通过25个光栅表面上的点，追迹了来自入射狭缝中的5个点的光线，作出几个波长处的点列图。

（一）图2表示用我们编的程序复算文章[2]中所列的消象差超环面全息光栅和普通超环面光栅的点列图。已知$\sigma=1/600$mm，$R=500$mm，光栅面积为$50\times30$mm$^2$，m = －1。

它们的参数为：

1、消象差超环面全息光栅

$$\begin{cases} r_A=409.8373, & r_B=410.8188 \\ 2c=69.70833^\circ, & \rho=401.3510 \\ r_C=468.7226, & r_D=558.9679 \\ \gamma=-45.30587^\circ, & \delta=-25.85617^\circ \end{cases} \tag{18}$$

2、普通超环面光栅

$$\begin{matrix} r_A=409.8373, & r_B=410.8188 \\ 2c=69.70833^\circ, & \rho=331.1124 \\ r_C=\infty, & r_D=\infty \\ \gamma=-7.896209^\circ, & \delta=-\gamma \end{matrix} \tag{19}$$

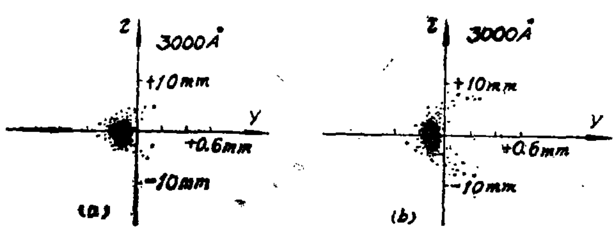


图2（*a*）消象差超环面全息光栅　（*b*）普通超环面光栅

计算所得的点列图表明与文章[2]的点列图相符。

（二）图3表示1200线/mm Ⅳ型全息凹面光栅的点列图。已知$\lambda_0=4579.3$Å，$\lambda_1=3800$Å $\lambda_2=8500$Å，光栅面积为$32\times32$mm$^2$，$\sigma=1/1200$mm，m = +1。

它的仪器结构参数为：

$$\begin{cases} r_A = 93.961, & r_B = 100.001 \\ C = 30.8°, & R = 113 \end{cases} \tag{20}$$

它的记录参数为：

$$\begin{cases} r_O = 136.312, & r_D = 121.62 \\ \gamma = 21.3°, & \delta = 65.885° \end{cases} \tag{21}$$

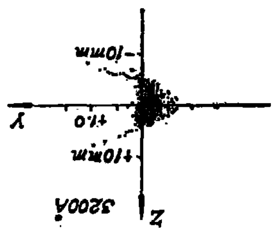


图 3

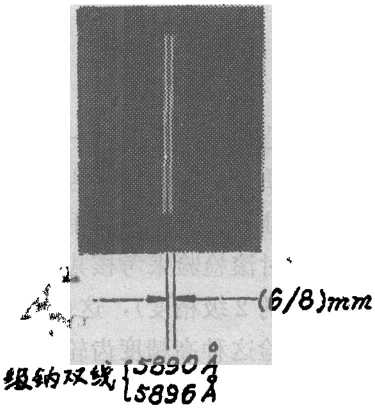


图 4

图 4 为该光栅所拍照的谱线，计算所得的点列图图 3 表明，与实际拍照所得谱线大约相符。

从以上结果表明，这种用点列图来评价凹面光栅的方法是可取的。

感射计算中心王柏中、赵桂英等同志的帮助！

## 参 考 文 献

〔1〕增田文男、野田英行、波冈武；《分光研究》， 1978， 27， 3，211.