

# 用极值控制法使光学系统自动聚焦

**摘要** 本文介绍用极值控制器自动聚焦高倍率光学显微镜的方法。所用的原理是使扫描得到的目标信号的某些高频成分的振幅达到最大值。根据要求的功率谱选择这些频率成分需要的最佳带通滤波器, 根据实际目标的谐波振幅的统计变化解释稍许偏离最佳值的原因。还介绍了使用峰值保持控制器的实际可行的系统, 在这个系统中, 对焦点的平均摆动偏移小于光学系统的允许焦深。

字母所表示的各种参量:

$s(t)$ —由扫描过程获得的无噪音信号

$n_0(t)$ —滤波前加在 $s(t)$ 上的噪音

$G_{ss}(\omega)$ — $s(t)$ 的功率谱

$G_{n_0n_0}(\omega)$ — $n_0(t)$ 的功率谱

$n_1(t)$ —滤波后加的噪音

$z(t)$ —无噪音时的滤波器输出

$u$ —控制器输出

$u_0$ —聚焦最好时的控制器输出

$q = u - u_0$ —聚焦最好时控制器输出的偏离

$n(t)$ —均方器输出的噪音

$V = z(t)^2$ —无噪音时的均方器输出

$k$ —平方律系数

$N$ — $n(t)$ 的平均振幅量度

$P = K/N$ —性能指数

$r_0$ —目标上聚焦光点的半径

$r_0 + r_d$ —目标上焦光点的半径

$v$ —目标上的扫描速度

$\xi_2, \eta_2$ —在聚焦光点内的点的坐标

$\xi_1, \eta_1$ —在离焦光点内目标上的点的坐标

$I_0$ —射到目标上的扫描光点总的光通量 (流明)

$I_y''$ —一个离焦象元由窄条宽 $\Delta y$ 传输的光通量 (流明)

$I_y'$ —由于离焦窄条宽 $\Delta y$ 传输的光通量 (流明)

$I_y$ —窄带宽 $\Delta y$ 传输的总光通量 (流明)

$s_y(t)$ —随时间变化, 由光通量 $I_y$ 产生的信号

$A(j\omega)$ —滤波器的频谱响应

$\tau_0 = r_0/v$ —聚焦光点的一半通过固定点所用的时间。

$\tau_d = r_d/v$

$S_y(\omega)$ — $s(t)$ 的付立叶变换

$\omega_0$ —扫描的角频率

$\omega_2$ —滤波器下截止频率

$\omega_1$ —滤波器上截止频率

$K, c, V_0$ —常数

角标 $m$ 表示平均值

# 1 引言

某些光学系统，像高倍率显微镜，长期不加照料地放置时，由于温度变化和机械影响引起焦点漂移。如果在没有人干预时进行时间推移摄影，引起的图象退化可能很严重，某种自动聚焦控制方式就成为需要的了。在目视聚焦困难的情况下，这种控制系统也是有价值的。

二维目标上光学系统聚焦问题简化为在一维空间的极值控制问题，即一维爬山法。很少有真正的二维目标，但在显微镜中，许多三维目标可以作为二维目标考虑，其含意是重要细节能限制在光学系统的焦深之内。聚焦状态可以用最大的图象清晰度来表征。因此，如果用飞点技术或电视摄像管扫描图象，所得到的信号  $s(t)$  功率谱的高频部分扩展将处在它的极大值。因此，可以由选择信号的某些高频分量，并使其振幅的均方值达到最大来达到自动聚焦。这样的系统由图 1 表示。

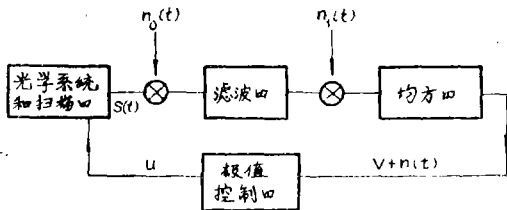


图 1 系统的方框图

## 2 性能指数

光学系统的物镜位置直接关系到极值控制器 (图 1) 的输出  $u$ ，在最好的聚焦位置输出是  $u_0$ 。当  $u = u_0$ ，没有噪音  $z(t)_m$  的均方信号是  $u$  的函数并有一个极值。 $u - u_0$  是很小值时我们可以写出下式

$$z(t)_m^2 = -\frac{1}{2}k(u - u_0)^2 + \text{常数} \dots\dots\dots (1)$$

为了化简上式，令  $V = z(t)_m^2$ ， $q = u - u_0$  表示焦点偏离，等式 1 可写成

$$V = V_0 - \frac{1}{2}kq^2 \dots\dots\dots (2)$$

其中  $k = -\left(\frac{d^2 V}{dq^2}\right)_{q=0}$

在图 2 中用实线表示这关系。然而实际上，噪音信号  $n(t)$  将叠加在  $V$  上，在图 2 上用无噪音曲线上面和下面叠加电压为  $N$  的两条虚线表示， $N$  是噪音振幅的度量值 (即高斯噪音信号的均方值)

极值控制器 (如图 1 所示可采用多种方式，但通常对每种方式都需要探索  $q$  的十分小的范围以便鉴别最大值，不规则振荡振幅非零的原因是因为有噪音出现；为了尽可能的接近最好焦点的位置，这不规则振荡必须减少到最小。很明显，对于给定的  $q$  值比率  $(V - V_0)/N$  应尽可能的大或  $k/N$  应成为最大值。因此， $P = k/N$  是系统的性能指数，使它达到最大值就是图 1 所示的滤波器的最优形式的任务。

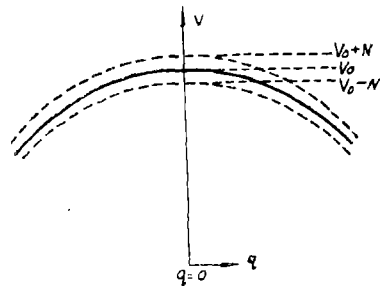


图 2 近焦点  $V = z(t)_m^2$

## 3 近焦点的功率谱

为了获得  $P$  的最大值，必须在聚焦最好处估算  $s(t)$  的功率谱，并且知道离焦带来的影响。功率谱的计算将对二维目标进行，它只有随机分布的吸收光材料，因为这表示大多数被分析的目标，当光学系统没有离焦时，圆的半径为  $r_0$ ，在这样半径的范围内，强度分布是均匀的。如果用摄像管扫描图象产生

信号  $s(t)$  也得到同样的结果。

系统离焦的影响可以看作作用漫射光点扫描目标, 如图 3 所示, 它是把原始光点范围内的点扩散为半径为  $r_d$  的圆而得到的。因此离焦光点的外边界线是半径为  $r_1 + r_0$  的圆, 其中  $r_d$  正比于  $|q|$ ,  $|q|$  是偏离最好聚焦位置的值的模。

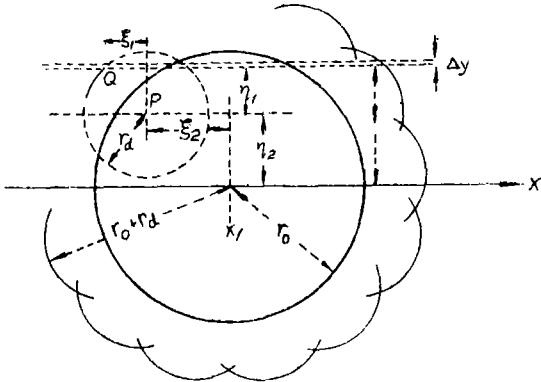


图 3 离焦光点的影响

光点在  $x$  方向上以速度  $v$  运动。沿着宽  $\Delta y$ , 平行于  $x$  轴, 离  $x$  轴的距离为  $y$  的窄条, 目标可用确定光传输比率的一维函数  $f_y(x)$  来描绘, 其中  $\Delta y$  可合适地考虑为目标中存在相关的极限距离, 作为一个分析假设,  $\Delta y$  远远小于  $r_0$ ;  $\Delta y \neq 0$ , 以避免扩展到无限大频率的功率谱所带来的困难。因而函数系列  $f_y(x)$  可以看作统计无关的。

焦点中光点的强度将被规定为每单位面积为  $I_0/A$  流明, 其中  $A = \pi r_0^2$ 。因此在  $P$  点 (图 3)  $d\xi_2 d\eta_2$  面积内入射在目标上的光通量为  $d\xi_2 d\eta_2 (I_0/A)$ 。当光点离焦时, 光通量均匀扩散在半径为  $r_d$  的圆上, 所以在原来中心位于  $P$  点的这一离焦部分的强度是  $\frac{d\xi_2 d\eta_2 I_0}{A\pi r_d^2}$  流明 (单位面积光通量)。

现在考虑平行于  $x$  轴的窄带范围内  $Q$  点部分,  $Q$  点对  $P$  点的坐标是  $\xi_1, \eta_1$ ,  $Q$  点的传输比是  $f_y(x_1 - \xi_2 - \xi_1)$ ,  $x_1$  是光点中心的  $X$  坐标。离焦范围内的窄带部分传输光通量  $I_y^*$  可以用积分得到

$$I_y^* = \Delta y \int_{-A}^A \frac{I_0}{\pi r_d^2} d\xi_2 \frac{d\eta_2}{\pi r_d^2} \int_{-\sqrt{r_d^2 - \eta_1^2}}^{\sqrt{r_d^2 - \eta_1^2}} f_y(x_1 - \xi_2 - \xi_1) d\xi_1$$

如果  $|\eta_1| \geq r_d$ , 积分是零。用定义下列函数使积分限为无限大:

$$h(\xi_1) = \begin{cases} 1 & \text{当 } |\xi_1| \leq \sqrt{r_d^2 - \eta_1^2} \\ 0 & \text{其他值} \end{cases}$$

所以

$$I_y^* = \Delta y \int_{-A}^A \frac{I_0}{\pi r_d^2} d\xi_2 \frac{d\eta_2}{\pi r_d^2} \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi_1) f_y(x_1 - \xi_2 - \xi_1) d\xi_1$$

现在考虑所有中心在离  $x$  轴为  $\eta_2$  的直线上的离焦部分的作用定义函数  $l(\xi_2)$ ,

$$l(\xi_2) = \begin{cases} 1 & \text{如果 } |\xi_2| \leq \sqrt{r_0^2 - \eta_2^2} \\ 0 & \text{其他值} \end{cases}$$

沿着这条直线所有  $P$  点传输的光通量  $I_y'$  是

$$I_y' = \Delta y \int_{-A}^A \frac{I_0}{\pi r_d^2} d\eta_2 \int_{-\infty}^{\infty} l(\xi_2) d\xi_2$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(\xi_1) f_y(x_1 - \xi_2 - \xi_1) d\xi_1$$

通过对  $\eta_2$  积分可以得到由所有离焦点从宽  $\Delta y$  的窄带得到的光通量  $I_y$ 。积分限由表达式  $\sqrt{r_d^2 - \eta_1^2}$  和  $\sqrt{r_0^2 - \eta_2^2}$  必须为实数的条件确定。从图 3 可以看到  $\eta_1 = y - \eta_2$ , 把此式代入第一种表示形式, 得到  $|y| < r_0 + r_d$ , 有两个满足这个条件的  $\eta_2$  的极限值, 其他积分限值积分等于零。这些极限, 如果存在的话, 将对应于上述表达式的零值, 并且积分限记为  $a$  和  $b$ , 这样得下式

$$I_y = \Delta y \int_a^b \frac{I_0}{\pi r_d^2} d\eta_2 \int_{-\infty}^{\infty} l(\xi_2) d\xi_2 \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi_1) f_y(x_1 - \xi_2 - \xi_1) d\xi_1$$

光点以速度  $v$  在  $x$  方向运动,  $v = x_1/t$ ; 因此这一光通量给出的输出信号是时间的函数,

$$s_y(t) = \frac{c v^2}{\pi r_d^2} \int_a^b d\eta_2 \int_{-\infty}^{\infty} I'(\tau_2) d\tau_2 \int_{-\infty}^{\infty} h'(\tau_1) f_y \left\{ v(t - \tau_2 - \tau_1) \right\} d\tau_1$$

其中  $c$  是常数,  $\tau_1 = \xi_1/v$  和  $\tau_2 = \xi_2/v$

如果以很小的距离分离目标中的诸点的其中 \$K\$ 是常量把积分用级数形式表示:

光传输是统计独立的, 函数 \$f\_y(vt)\$ 接近白噪音函数。减少 \$v\$ 时这函数的影响是压缩它的分量在低频窄带中。因此功率谱的密度与 \$v\$ 成反比。从而 \$f\_y(vt)\$ 的付立叶变换可以用 \$Fv^{1/2}\$ 在最有意义的频率范围内表达出来。\$F\$ 是常数。对 \$s(t)\$ 的付立叶变换, 褶积定理的两个应用给出:

$$G_{s,s}(\omega) = K v r_a \frac{J_1^2(\omega \tau_a)}{\omega^2 \tau_a^2} \frac{g(\omega^2 \tau_0^2)}{\omega^2}$$

$$\text{其中 } g(\omega^2 \tau_0^2) = \frac{(2\omega \tau_0)^2}{3} - \frac{(2\omega \tau_0)^4}{3^2 5} + \frac{(2\omega \tau_0)^6}{3^2 5^2 7} \dots \dots \dots (3)$$

其中 \$H(\omega)\$ 和 \$L(\omega)\$ 是 \$h'(\tau\_1)\$ 和 \$l\_1'(\tau\_2)\$ 的变换, 并由下面两式表示

$$H(\omega) = \frac{\sin \frac{\omega}{v} \sqrt{r_a^2 - \eta_1^2}}{\omega}$$

$$L(\omega) = \frac{\sin \frac{\omega}{v} \sqrt{r_0^2 - (y - \eta_1)^2}}{\omega}$$

不能以紧密的形式表示这一积分, 但因为当 \$r\_a\$ 很小时的解具有特殊意义, 符合近焦点条件。由于 \$\eta\_1 = y - \eta\_2\$ 积分变量可以首先变成 \$\eta\_1\$, \$\eta\_1\$ 的积分限不能在 \$\pm r\_a\$ 之外, 由此得到, 当 \$r\_a \to 0\$ 时, 就成为相应于 \$a\$ 和 \$b\$ 的积分限, 变换 \$l(\omega)\$ 与 \$\eta\_1\$ 无关, 所以积分可以写成:

$$\left\{ S_y(\omega) \right\}_{r_a \to 0} = - \frac{c F v^{3/2}}{\pi r_a^2}$$

$$\frac{\sin \frac{\omega}{v} \sqrt{r_0^2 - y^2} \int_{-r_a}^{r_a} \sin \frac{\omega}{v} \sqrt{r_a^2 - \eta_1^2} d\eta_1}{\omega}$$

$$= - c F v^{1/2} \frac{\sin \frac{\omega}{v} \sqrt{r_0^2 - y^2}}{\omega} \frac{J_1(\omega \tau_a)}{\omega \tau_a}$$

\$s\_y(t)\$ 的功率谱是这量的平方, 由于信号系列 \$s\_y(t)\$ 是统计独立的, 加上它们的功率谱就找到信号 \$s(t)\$ 的功率谱 \$G\_{s,s}(\omega)\$。如果 \$\Delta y\$ 充够小, 这个过程变成积分:

$$G_{s,s}(\omega) = K v \frac{J_1^2(\omega \tau_a)}{\omega^2 \tau_a^2}$$

$$\int_{r_0}^{\tau_0} \frac{\sin^2 \frac{\omega}{v} \sqrt{r_0^2 - y^2}}{\omega^2} dy$$

### 4 最佳滤波器

如果滤波器的响应由函数 \$A(j\omega)\$ 表示, \$z(t)\$ 的均方值是

$$z(t) \frac{z}{m} = V = \int_0^\infty |A(j\omega)|^2 G_{s,s}(\omega) d\omega \dots \dots \dots (4)$$

系数 \$k\$ 是由 (2) 式得来的

$$k = \left( \frac{d^2 V}{d^2 q^2} \right)_{q=0} = \frac{1}{\alpha v^2} \left( \frac{d^2 V}{d^2 \tau_a^2} \right)_{\tau_a=0}$$

正如第三部分给出的 \$q^2\$ 正比于 \$r\_a^2\$。对包含 \$\tau\_a\$ 的 (4) 式微分得到 \$k\$ 值

$$k = \frac{k \tau_0}{8\alpha} \int_0^\infty |A(j\omega)|^2 g(\omega^2 \tau_0^2) d\omega$$

观察图 (4) 是函数 \$g(\omega^2 \tau\_0^2)\$, 它表示对均匀强度的圆扫描光点画出的, \$k\$ 在近于 \$\omega \tau\_0 = 1.82\$ 处有一极大值。实际上光点的强度多半向边缘降低, 这就使这个函数的第二个和以下的最大值的大小有相当大的削弱。然而在低频范围内函数的形式无明显的影晌。

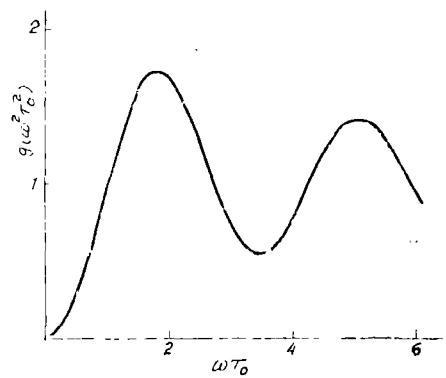


图4 函数 \$g(\omega^2 \tau\_0^2)\$

如果滤波前加的噪音 \$n\_0(t)\$ 是白的, 滤波后没有噪音引入, 则在频率 \$\omega = 1.82/\tau\_0\$

处找到最大性能指数，最佳滤波器简单地选择为靠近这一频率的窄带滤波器。实际上  $G_{nn}(\omega)$  不是表示连续谱而是包含扫描频率  $\omega_0$  的谐波的线状谱的包迹。因此最佳滤波器仅选最靠近图 4 中极大值的一个谐波。如果在滤波以后  $n_1(t)$  加到信号上，到达平均平方器的总的均方噪音值是

$$n_1(t)_m^2 + \int_0^\infty |A(j\omega)|^2 G_{nn}(\omega) d\omega$$

其中  $G_{nn}(\omega)$  是  $n_0(t)$  的功率密度，因此性能指数获得最大值为：

$$P = \frac{k}{N} = \frac{K \tau_0 \int_0^\infty |A(j\omega)|^2 g(\omega^2 \tau_0^2) d\omega}{8\alpha n_1(t)_m^2 + \int_0^\infty |A(j\omega)|^2 G_{nn}(\omega) d\omega}$$

如果在通带范围内， $g(\omega^2 \tau_0^2)$  无明显变化，简单带通滤波器接近最佳形式。因此，为了简便最佳滤波器限制为带通型，而不管带通宽度。其性能可以写成

$$P = \frac{K \tau_0 \int_{\omega_1 \tau_0}^{\omega_2 \tau_0} g(\omega^2 \tau_0^2) d(\omega \tau_0)}{8\alpha \tau_0 n_1(t)_m^2 + (\omega_1 \tau_0 - \omega_2 \tau_0) G_{nn}(\omega)} \dots \dots \dots (5)$$

$\omega_1$  和  $\omega_2$  分别是滤波器的上、下截止频率，在带通的范围内，设  $G_{nn}(\omega)$  是常数。

给出  $G_{nn}(\omega)$ ， $n_1(t)_m^2$  和  $\tau_0$ ， $\omega_1 \tau_0$  和  $\omega_2 \tau_0$  的最佳值就可以计算。图 5 画出计算的结果，用  $\tau_0 n_1(t)_m^2 / G_{nn}(\omega)$  量值的范围给出  $\omega_1 \tau_0$  和  $\omega_2 \tau_0$  的最佳值。

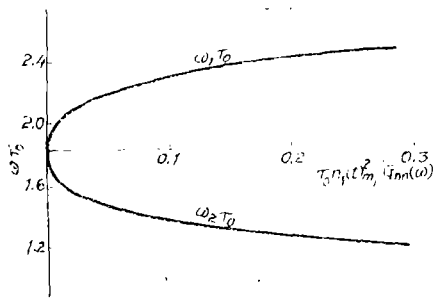


图 5 最佳截止频率噪音参数的函数

## 5 谐波振幅的分布

周期性重复随机信号的几次谐波的付立叶系数  $a_n$  和  $b_n$  是正态分布的。因而，谱密度  $G_{nn}(\omega)$  表示信号系综的平均值，并有一可计算（看附录 12）由选择一定数量谐波得到的均方信号值将低于某一选定的最小值。从三个次谐波得出的均方信号低于所期望的信号的 10% 的概率由表 1 中给出，其中  $i = 1, 2$  和 3。如果这被认为是最小容许信号，当  $i$  大于 3 时，概率变得很小。实际上，目标可识别的结构不可能作为随意的。因此对于一定的目标的谐波分布可以是一系列有很小的振幅邻接谐波。因此一般说需要增加滤波器的通带适应各种目标。当离焦很远时，带通低频端扩展也增加了系统的灵敏度，因此大部分较高次谐波在这些条件下被衰减。

## 6 扫描频率的选择

为了消除回扫的不良影响，目标由角频率为  $\omega_0$ ，沿圆轨道运动的光点进行扫描。理想情况下滤波器的输出由  $\omega_1$  和  $\omega_2$  之间扫描频率的那些谐波组成。这个信号形成平方器的输出，因此平方器的输出由正比于谐波振幅平方的直流电压和频滤为  $\omega_0$  及更高的大量交流成分组成。用低频滤波器消除这些成分得到所要求的均方电压；控制器输入点的响应时间由这个滤波器限制，它远小于  $1/\omega_0$ 。这限制了控制器的操作速度。然而 (5) 式表明减少  $\omega_0$ ，因而增加  $\tau_0$ ，性能指数可增加由由噪音  $n_1(t)_m^2$  所决定的极限值。确定  $\omega_0$  的决定因素是简单的可容许的响应时间，然后从这时间可确定其他的参数。

## 7 实用系统

用于高倍率显微镜的实用系统已制造出

来,图6表示该系统。为了能在定时内完成聚焦调整,以便对显微镜的正常使用没有大的干扰,振荡周期选得约为1秒。扫描频率  $f_0 = \omega_0/2\pi = 50c/s$ 。它使得进入均方器的信号十分平滑,而时间常数又比振荡周期短。

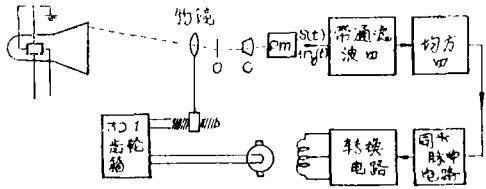


图6 实用自动聚焦系统,  $o$  是目标,  $c$  是会聚透镜,  $p.m$  是摄影放大器

用短余辉蓝蓝光的静电偏转阴极射线管扫描,扫描光点直径  $2r_0$ , 大约等于0.75毫米。用半径为1厘米圆周扫描,当  $\omega/2\pi$  大约是  $2.4kc/s$ ,与扫描频率的第48次谐波对应时,得到  $\omega\tau_0$  的最大值。

### 7.1 带通滤波器

扫描频率为  $50c/s$  时,噪音  $n_1(t)$  比滤波器前的噪音小,并且最佳滤波器具有很窄的带宽,然而根据第6部分提出的理由,滤波器应通过足够数量的谐波,所以实际用的滤波器有  $1.55kc/s$  的带宽。截止频率的下限  $1.65kc/s$  和上限  $3.2kc/s$  分别对应第33和64次谐波,所以目标结构中大量的统计变化可以适应。另外得到这个优点所花费的代价是很小的,因为对于  $n_1(t) = 0$ , 性能指数是用最佳滤波器的93%。对于  $n_1(t)$  大于零,滤波器更接近最佳化。

带通滤波器包含有分立的低通和高通部分,实际上在高通部分得到锐截止是更重要的。这是因为功率密度正比于  $g(\omega^2\tau_0^2)/\omega^2$ ; 低频谐波的振幅比高频谐波的振幅大。结果,一定要更有效地消除低频部分以免在以后的电路中出现饱和。

高通滤波器由一个  $m$  导出式滤波带 ( $m = 0.3$ ) 后面是在低频部分给出较大衰减的常量  $k$  滤波带,低通部分是用 *Butterwarth* 四

阶最优展平滤波器,在截止频率以上的衰减接近  $24dB/倍$  频程。

### 7.2 均方线路

用非线性电阻器的逻辑线路完成平方运算,以便克服由负输入所引起的一般困难,线路的输出被倒相,并且两个输出都加到二极管整流电路产生正确的平方值。平均线路由三级  $RC$  平滑线路组成,它衰减频率为  $\omega_0$  的基波  $70dB$ 。

### 7.3 极值控制器

对极值控制器选用峰值保持法,这种控制原理 *T'sien* 已经作过大量的介绍,在应用中两个优点,第一点是用伺服电机驱动调焦机构,处理约1秒钟的振荡周期,既方便又简单,第二点优点是这种方法本身能适应不同对比度的目标。这第二个特点是由这样的事实产生的,即峰值的偏离(图2)由确定的最大总值来决定,在方向发生一次变化以前,电压  $V + n(t)$  可以降到峰值以下,这一数值设置得使控制处于最佳工作状态,也就是考虑由于噪音  $n(t)$  引起的虚假翻转,有最小的平均振荡损失,因此对任何目标,焦点偏移后能自己调节,以保持其最佳工作状态。开关线路(图6)由 *Eccles-Jordan* 双稳态线路组成,当它从峰值保持器接收到信号时改变状态,这就改变了裂极伺服电机的旋转方向,这电机通过  $30:1$  减速齿轮偶合到显微镜的精确聚焦控制机构。

## 8 工 作

中等对比度的典型生物标本由这个系统聚焦到显微镜的正常焦深范围内。在显微摄影术中,这个量不太严谨地定义为目标移动的这样一个距离,在这一距离上它的象与精确聚焦象用眼睛不能区别。在最大对比度的特殊条件下,这个量用下面关系式表示

$$\text{焦深} = n \cdot \left( \frac{\lambda}{2(N.A)^2} + \frac{340}{MN.A} \right) \mu m$$

其中  $\lambda$  是所用的波长,  $N.A$  是物镜的数

字孔径,  $n_1$  是浸没介质的折射率,  $M$  是光学放大率。当使用的放大率为 100 时, 由关系式给出的焦深为  $5.8\mu m$ 。实际上, 当聚焦中等对比度的目标以及处理与扫描光点系有同等尺度的精细节时, 物理的平均偏离约是  $3\mu m$ 。

对十分精细的目标, 必须用更小的扫描光点, 一直小到由光学系统的分辨率所决定极限, 它一般不小于  $0.3\mu m$ , 用更高放大率和磁偏转飞点扫描管可实现, 在这种情况下, 光点的直径可小到  $0.1mm$ 。

## 9 结束语

使用极值控制技术使高倍率光学系统自动聚焦, 在系统的正常焦深内是可能的。控制过程的峰值保持方法具有某些优点, 在实际使用中, 经证明是令人满意的。扫描目标速率原则上由要求聚焦调整的时间来确定所获得的噪音信号, 在输入到控制器以前, 进行滤波平方和平均。所要求滤波器的最佳形式表明与带通式没有很大差别, 因此, 实际上采用了系统的最佳性质对滤波器的带宽相当不灵敏, 若正确地选择中心频率, 使用宽通带可以适应不同目标的统计性质方面的变化。

## 附 录

当  $\lambda^2$  给出相同的均方值周期性随机信号的第  $n$  次谐波的余弦和正弦付立叶系数  $a_n$  和  $b_n$  正态分布。然而,  $n$  次谐波的功率是  $\frac{1}{2}(a_n^2)_m + \frac{1}{2}(b_n^2)_m$ , 因此它也等于  $\sigma^2$ 。

我们希望找到实际功率  $\frac{1}{2}(a_n^2 + b_n^2)$  低于某个量  $\beta^2 \sigma^2$  的概率,  $\beta$  是期望功率的某个分数。

$a_n$  处于  $x$  和  $x + dx$  之间同时  $b_n$  是处于  $y$  和  $y + dy$  之间的概率, 可以写成下式:

$$Pr[x < a_n < x + dx; y < b_n < y + dy]$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right) dx dy$$

用归一化坐标  $s = x/\sigma$ ,  $t = y/\sigma$ , 功率小于  $\beta\sigma^2$  的总概率写成下式

$$Pr\left[\frac{1}{2}(a_n^2 + b_n^2) < \beta\sigma^2\right] = \frac{1}{2\pi} \iint_R \exp\left\{-\frac{1}{2}(s^2 + t^2)\right\} ds dt$$

$R$  表示  $st$  平面中一区域, 这样  $(s^2 + t^2)$  低于  $2\beta$ ; 概率的这个表达式可以扩展为  $i$  个谐波的功率的积, 所以

$$Pr\left[\frac{1}{2}\sum_i(a_n^2 + b_n^2) < i\beta\sigma^2\right] = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^i \iint \dots \iint R' \exp\left\{-\frac{1}{2}(s^2 + t^2 + \dots)\right\} ds dt \dots$$

其中  $R'$  表示二维空间中离原点距离在  $2i\beta$  以内的一个区域。

以标准化方式把上面的多重积分变换成下列形式

$$Pr[\dots] = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^i \int dr \iint \dots \int_A \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) da$$

其中  $r^2 = s^2 + t^2 + \dots$ 。在  $r$  保持为常数的  $2i-1$  维表面进行积分, 在原来的  $2i$  维空间范围内用  $r$  的所有值来进行第二个积分。对常数  $r$  指数项是常数, 因此用半径为  $r$  的  $2i$  维超球面的表面积的表达式, 则概率成为

$$Pr\left[\frac{1}{2}\sum_i(a_n^2 + b_n^2) < i\beta\sigma^2\right] = \frac{1}{2^{i-1}\Gamma(i)} \int_0^{\sqrt{2i\beta}} r^{2i-1} \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) dr = \frac{1}{2^i \Gamma(i)} \int_0^{2i\beta} z^{i-1} \cdot e^{-z/2} dz$$

$z = r^2$ , 这个积分对于  $i$  的任何值都能解, 表 1 列出  $i = 1, 2, 3$  的解法以及  $\beta = 0.1$  时的

(下转12页)

度。

齿的成形，目前以插齿最为普及，因为这种方法既可加工外齿，又可加工内齿。研磨可以显著地提高其旋转的平稳性。同时效率一般也可达80%以上。

谐波齿轮的齿形角规定为 $28.6^\circ$ 。当缺乏谐波齿轮刀具时，也可采用标准的 $20^\circ$ 压力角的插齿刀或滚刀来加工谐波齿轮。此时应对谐波齿轮进行变位计算（参看图3），通过计算来选定变位系数 $\xi$ 和啮入深度 $h_3$ 。

### 参 考 文 献

- [1] Н.И.Колчиди «Зубчатые и червячные передачи» 1968
- [2] 苏联机器制造百科全书第三卷
- [3] Н.И.Цейтлин Волновые передачи «Вопросы ракетной техники» 1965, No. 8
- [4] С.А. Цуванов Боковые зазоры и высота зуба в волновой передаче «Известия вузов «Машиностроения» 1974, No. 8

（上接24页）

概率的相应值。

表1  $i$  谐波功率低于期望功率的一个分数的概率

| $i$ 谐波数 | 概 率  | $\beta = 0.1$<br>的概率 |
|---------|--|----------------------|
| 1       | $1 - e^{-\beta}$                           | 0.095                |
| 2       | $1 - e^{-2\beta}(2\beta + 1)$              | 0.022                |
| 3       | $1 - e^{-3\beta}(4.5\beta^2 + 3\beta + 1)$ | 0.004                |

$\beta$ : 期望功率的分数

译自 *Proceedings of the Institution of Electrical Engineers*  
V01.114 No.1 P161. 1967.

〔吴桂英译 于前洋校〕