

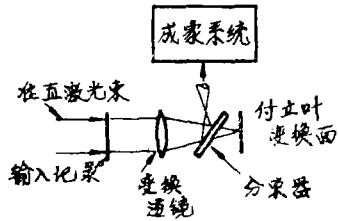
# 光学数据处理器的最佳成像方法

**摘要：**本文介绍几种具有一定放大率和焦距长度对输入记录成像的二透镜系统。在一定条件下，从输入记录面到成像面各个设备的总长度可以减到最小。另一方面最小长度结构的极限值决定于运算范围的开端点的邻近值。

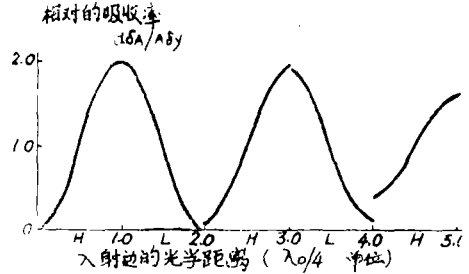
## 引言

我们所关心的是需要的光学装置在相关数据处理系统中获得输入记录的图象。当在付立叶变换中的光学相位因子不重要时，输入记录可以描在变换透镜的主焦点一边任何位置。除了对于旁轴光线分析按指数变化位相因子可以忽略以外，这个透镜的象面上的光分布是输入分布的复制。因而象面上的光强度测量值对这相位因子是灵敏的。Curtis 和 Van Sciver 指出第二个透镜在相干光中用正确相位关系在观察面上把输入记录片成像。这个观察面即为几何象面。本文我们涉及到二透镜装置并探求指导透镜设计的系统程序，而不取决于元件的任意位置。假设成像系统的结构受确定象放大率和使用者选择的透镜所限制。实际要求成像设备的总长度尽量的小是很重要的。

例如在付立叶系统中总是使用成像本领图 1 (a) 付立叶变换系统可能作为输入数据的监视器。图 1 (b) 表示空间滤光的装置，进行滤波可以观察滤波后的图象，对诸如图象消除模糊一类的空间滤波效果进行评价。在这两个例子中，第一个透镜有双重作用，一个是作为付立叶透镜，一个是成像所用的二个透镜中一个。



(a) 付立叶变换分析器



(b) 空间滤光片系统

图 1 相干光学数据处理中成像系统的应用

下面介绍几个二透镜系统的装置。分析的目的在于对给定放大率和焦距来确定怎样达到最小长度的设计。除所介绍的第一个系统外，当光学相位因子不重要时，输入记录片不必放在镜头的焦面上。在摄影记录和扫描等每种情况下都要求形成实象。注意这当中所提出结果没有受到相干光成像的限制。为类似的目的，这些结果可以用于非相干光学系统。

本篇评论已经注意到与多透镜系统的其他方面设计有关的有价值的文章。参考文章研究了与平像场要求，透镜孔径限制和确定入瞳/出瞳光瞳位置有关的其他设计标准。这篇文章将进一步指出，如果二透镜设计是不可行的（由于超过整个系统的长度），能设计出三透镜或四透镜系统。这是考虑的二透镜系统是重要的。从实际观点出发，通常认为使用的透镜数必须最少以防止由于从透镜表面所不需要的反射而带来的过量光学噪音。增加透镜而提高价钱的因素也必须考虑。因此上述二透镜系统存在的缺点是不严重的，可以用下面介绍的长度最佳化方法。

## 光学系统 1

大家都知道的相干成象通常所用的二透镜系统，如图 2 所示。当在付立叶变换关系中光学相位因子是重要的情况下这种固定单元排列装置。输入记录片位于透镜前焦面中的焦面处。透镜间距  $S$  必须等于焦距的和即  $S = f_1 + f_2$ 。在第二个透镜的后焦面  $f_2$  处形成倒的实象。象的放大率不是任意的，而是由焦距的比来决定的， $M$  是放大率。

$$M = -f_2/f_1 \quad (1)$$

总的系统长度  $D$  也是固定的，

$$D = f_1 + f_2 + S = 2(f_1 + f_2) \quad (2)$$

很明显总长度不能被减少到最小。遗憾的是要改变放大率，人们必须改变焦距比率（换句话说，就要更换透镜）

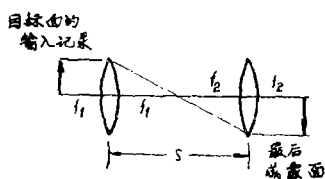


图 2 光学系统 1 的固定放大系统

## 光学系统 2

图 3 表示的光学装置，以与焦距无关的方法确定放大率。输入记录片距透镜的距离为  $p_1$ ，透镜焦距  $f_1$ ，这个装置要求  $p_1 > f_1$ ，以便在透镜后面的  $q_1$  处出现实的倒像。这个中间像作为焦距为  $f_2$  的第二个透镜的目标，这象位于第二透镜前距离为  $p_2$  的地方。为了形成实象要求  $p_2 > f_2$ 。最后的实的正立象出现在第二个透镜后  $q_2$  位置上。

成象系统的总长度  $D$  由下式给出：

$$D = p_1 + q_1 + p_2 + q_2 \quad (3)$$

其中  $p_1, q_1, p_2, q_2$  都是正量。从透镜方程

$$q_j = p_j f_j / (p_j - f_j) \quad j = 1, 2, \quad (4)$$

得到  $D = [p_1^2 / (p_1 - f_1)] + [p_2^2 / (p_2 - f_2)]$

(5)

二透镜系统总的放大率  $M$  等于每个单一透镜放大率乘积。

$$M = f_1 f_2 / (p_1 - f_1)(p_2 - f_2) \quad (6)$$

其中  $M > 0$ ，由于  $p_1 > f_1$ ， $M > 0$  意思是  $p_2 > f_2$ 。 $M$  值的选择没有其他限制，解(6)式得到

$$p_2 = \frac{f_1 f_2 + f_2 M (p_1 - f_1)}{M (p_1 - f_1)} \quad (7)$$

由这个结果(5)式中的  $D$  表示为

$$D = \frac{f_1 M p_1^2 + f_2 [f_1 + M(p_1 + f_1)]^2}{f_1 M (p_1 - f_1)} \quad (8)$$

我们假设焦距  $f_1, f_2$  和放大率是给定量，其结果  $D$  是变量  $p_1$  的函数。而在这种情况下  $(p_1 - f_1)$  是大于零，(8)式中所有的项都是正值，即对  $p_1 > f_1$  的所有值  $D > 0$ 。

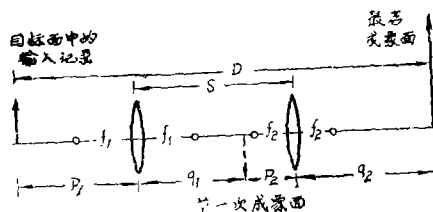


图 3 光学系 2 产生正立实象

由微分  $\frac{dD}{dp_1} = 0$  可找到  $D$  的极值。为了

方便我们规定是无量纲的量

$$x = (p_1 - f_1) / f_1 \quad (9)$$

借助于变量  $x$ ， $D$  和  $\frac{dD}{dx}$  表示为

$$D = \frac{(f_2 + f_1 M)}{M} \left( \frac{1}{x} \right) + 2(f_1 + f_2) + (f_1 + f_2 M)x \quad (10a)$$

$$\frac{dD}{dx} = f \left( 1 - \frac{1}{x^2} \right) + \left( \frac{f_2}{M} \right)$$

$$\left( M^2 - \frac{1}{x^2} \right) \quad (10b)$$

$$\text{当 } x^2 = \frac{1}{M} \frac{f_2 + f_1 M}{f_1 + f_2 M} \quad (11)$$

满足极值条件，或用(9)式，

$$p_1 - f_1 = \pm f_1 \left( \frac{1}{M} \frac{f_2 + f_1 M}{f_1 + f_2 M} \right)^{1/2} \quad (12)$$

$p_1 - f_1 > 0$ , 所以式(12)中必须取正号。

从式(10a)和(11)得到  $D$  的极值是:

$$D_{\min} = \pm 2 \left[ \frac{(f_2 + f_1 M)(f_1 + f_2 M)}{M} \right]^{1/2} + 2(f_1 + f_2) \quad (13)$$

当  $x$  极值取正值时, 上式取正号。因为  $D$  随着  $p_1$  接近  $f_1$  或随着  $p_1$  的增加没有界限, 所以  $D$  是极小值。更直接些可以求其二阶微分, 微分得,

$$\frac{dD^2}{dx^2} = \frac{2}{(x_{\text{极值}})^3} (f_1 + f_2/M) = \frac{2}{x_{\text{极值}} (f_1 + Mf_2)} \quad (14)$$

(14)式总是正值。因此极值是最小值。

这样图 3 中光学系统的长度是给定焦距和图象放大率的单变量的函数, 其结果是很容易使长度变最佳化。注意, 无论在什么情况下, 第一透镜后焦面中的光分布与输入记录片的付立叶变换不同, 相差一位相因子。因此这设备是有用的, 这相位因子是不重要的。

### 光学系统 3

透镜排列如图 4 所示, 输入记录片仍像前面一样放在  $p_1 > f_1$  的位置上。而第一像面  $q_1$  是位于第二透镜的右边。这样第二透镜的物距  $p_2$  是负值。第二透镜的最后成象位置是  $q_2$ ,  $q_2 > D$ , 象在第二透镜的右边。这象落在焦距  $f_2$  之内, 从透镜的公式

$$|q_2| = \left| \frac{p_2}{p_2 - f_2} \right| f_2 < f_2 \quad (15)$$

由于  $\left| \frac{p_2}{p_2 - f_2} \right| < 1$  (16)

所以  $|q_2| = \left| \frac{f_2}{p_2 - f_2} \right| |p_2| < |p_2|$  (17)

因此  $\left| \frac{f_2}{p_2 - f_2} \right| < 1$  (18)

由于第一个透镜的放大率是  $-q_1/p_1 < 0$  第二个透镜的放大率是  $-q_2/p_2 > 0$ 。整个系统放大率  $M$  由(6)式给出, 但它是负值。因此最后的象是倒立实象。

在寻找距离  $D$  的最小值之前, 必须对两个限制进行量化。在这光学装置中要求  $p_2 < 0$ 。这样由式(7)得到

$$p_2 = [f_2 / (Mx)] (1 + Mx) < 0 \quad (19)$$

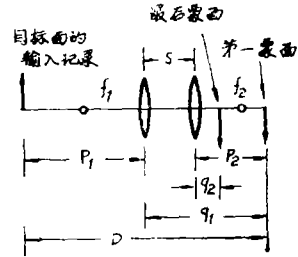


图 4 光学系统 3 产生倒实象

由于  $M < 0, x > 0$ , 有  $(1 + Mx) > 0$ , 最后得  $0 < x < (-1/M)$  (20)

我们还要求透镜间距  $S > 0, S = q_1 + p_1$ , 利用  $q_1 = f_1(1 + x)/x$  关系,  $S$  可写成下式  $S = (f_1 + f_2/M)(1/x) + (f_1 + f_2) > 0$  (21)

这不等式在变量  $x$  的范围内导致一个下限条件限制。

$$\left( -\frac{1}{M} \right) \left( \frac{f_2 + f_1 M}{f_1 + f_2} \right) < x \quad (22)$$

现在我们研究距离函数  $D = D(x)$  随着这些限制量的变化, 式 10(a)  $D$  表示为三项的和, 第一项是以  $x$  为变量的双曲线; 第二项是常量; 第三项是以  $x$  为变量的直线。第一项和第三项的系数可是正值或负值。

两种情况一定由(22)式中分子  $f_2 + f_1 M$  的符号来决定。

A:

令  $f_2 + f_1 M < 0$  即认为  $M$  的值是

$$M < -(f_2/f_1) \quad (23)$$

不等式(22)左边是负值; 因此总是满足不等式(由于  $x > 0$ )

由于  $f_2 + f_1 M < 0, M < 0$  所以等式(10a)的双曲线项系数是正值, 图(5)的组合草图中给出典型的双曲线。如果直线项的系数是正值, 组成函数  $D$  的三项之和在图 5 的第一象限曲线出现最小值。这种情况我们要求(看(23)式)

$$-f_1/f_2 < M < -f_2/f_1 \quad (24)$$

下步我们考虑, 如果最小点在适当的  $x$  值的范围内, 即在什么情况下  $0 < x_{\text{极值}} < -\frac{1}{M}$ ? 认为

$$x_{\text{极值}} = \left( \frac{1}{M} - \frac{f_2 + f_1 M}{f_1 + f_2 M} \right)^{1/2} < -\frac{1}{M} \quad (25)$$

由此可见  $M(f_2 + f_1 M) < f_1 + f_2 M$ , 结果  $M^2 < 1$ , 由  $M$  是负值得:

$$-1 < M < 0 \quad (26)$$

现在假定满足不等式(26), 就存在一个  $D = D_{\text{min}}$ 。这最小值是由(13)式给出, 然而根式项中的  $(f_2 + f_1 M)$  和  $M$  因子是两个负值。(可以很容易看出  $M$  为负值时  $D_{\text{min}}$  的值小于用一个正的而数值等于放大率  $M$  的一个数所得到的  $D_{\text{min}}$ )

如果放大率在(26)式所指出的范围之外, 即

$$M \leq -1 \quad (27)$$

像满足等式(23)一样, 极值  $x$  必须超过点  $-1/M$ 。因此  $D$  函数在  $0 < x < -\frac{1}{M}$  开区间, 由于  $x \rightarrow (-1/M)^-$  单调减少, 并逐渐逼近  $D_u$  值

$$D_u = \lim_{x \rightarrow -1/M} D = \frac{f_1}{(-M)} (M-1)^2 \quad (28)$$

注意这极限值是正的而且与焦距  $f_2$  没有明显关系。

为了完成 A 部分的分析, 认为(10a)  $D$  表示式中, 线性项系数为负值。表示函数  $D$  的一组曲线由图 5 中单调减少的曲线来描述。在这种情况下, 出现的值不是相当小的出现。其放大率的限制条件是

$$M < -f_2/f_1 \quad \text{和} \quad M < -f_1/f_2 \quad (29)$$

随着  $x$  逼近它的上限  $(-\frac{1}{M})$ ,  $D$  的极限值  $D_u$  也由(28)式给出。虽然极限值由上面得到的相同函数形式给出, 但放大率的范围是不同的 [可比较(24)式和(29)式]

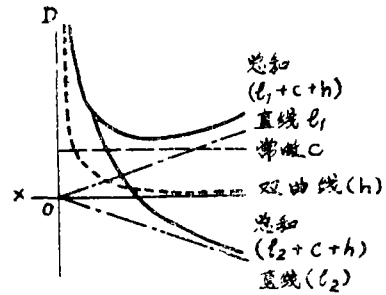


图 5 光学系统 3 A 部分的距离函数  $D$  的分析图

B:

令  $f_2 + f_1 M$  是正值, 相应的  $M$  值为:

$$-f_2/f_1 < M < 0 \quad (30)$$

不等式(22)的左边现在是正的。  $M$  除满足等式(20)的关系外还要满足下限要求由于正分数  $f_2 + f_1 M / f_1 + f_2$  小于 1, 所以两个不等式是不矛盾的。即

$$0 < \frac{f_2 + f_1 M}{f_1 + f_2} < 1 \quad (31)$$

任何时候  $M < 1$  (在这个光学装置中  $M$  是负值)。在式(10a)中双曲线项的系数是负的, 如前所述, 线性项的系数可以是正或者是负。图 6 是这部分的组合图

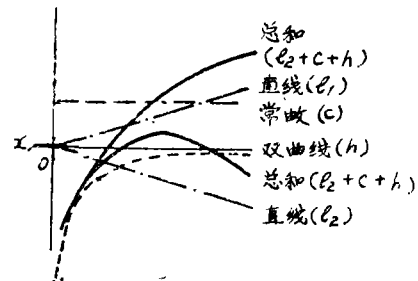


图 6 光学系统 3 B 部分的距离  $D$  函数的分析图

我们首先考虑线性项系数是正号的结果, 就是  $M > -\frac{f_1}{f_2}$ 。组合  $D$  函数像图表示那样正比增加。从式(22)可以看到当  $x$  接近下限,  $D = D_L$  的极限值是有意义的。从式(10a)看出当  $x$  趋近于  $(-1/M)$  ( $f_2 + f_1 M \geq 0$ )/

$(f_1 + f_2)^+$  可以容易得到

$$D_L = \lim D = \frac{f_1 f_2 (M-1)^2}{(-M)(f_1 + f_2)} \quad (32)$$

这极限值是负值，并且依赖于三个有意义的参数  $f_1, f_2$  和  $M$ 。放大率由下面的不等式限制

$$-f_2/f_1 < M < 0 \text{ 和 } -f_1/f_2 < M < 0 \quad (33)$$

最后，我们考虑范围为  $M < -f_1/f_2$  线性项负系数情况，或与式(30)一起表示为

$$-f_2/f_1 < M < -f_1/f_2 \quad (34)$$

图6表示组合D函数，表示出相当大的值的曲线。(可以看出极值点将在式(20)和式(22)给出的开区间，假若  $M < -1$ , D函数是正值)。这样当  $x$  接近上限或下限的极限值时是有意义的。当  $x$  趋近  $(-1/M)^-$  这极限值是正值并由下式给出

$$D_u = \lim D = \frac{f_1 (M-1)^2}{(-M)} \quad (35a)$$

当  $x$  趋近  $(-1/M)^+ [(f_2 + f_1 M)/(f_1 + f_2)]^+$

$$D_L = \lim D = \frac{f_1 f_2 (M-1)^2}{-M(f_1 + f_2)} \quad (35b)$$

其中放大率范围由式(34)给出。  $D_u$  和  $D_L$  的比较得出

$$D_L < D_u \quad (36)$$

## 光学系统 4

图7表示所研究的最后一个光学装置。由第一个透镜在  $q_1 < 0$  处形成一个虚像，并作为第二透镜的目标，在这种情况下我们有  $p_2 > 0$  最后是倒立的实象 ( $M < 0$ ) 位于第二透镜后焦面的右边。正像图7表示那样，由于  $p_1 < f_1$ ,  $M < 0$  意思是  $p_2 > f_2$  [式(6)]。由透镜方程我们可以看到

$$|q_2| = \left| \frac{p_2}{p_2 - f_2} \right| |f_2| > |f_2| \quad (37)$$

因此  $\left| \frac{p_2}{p_2 - f_2} \right| > 1 \quad (38)$

由条件  $p_1 < f_1, q_1 < 0$  得出  $x$  是负值并被限制在如下范围

$$-1 < x < 0 \quad (39)$$

另外，确保透镜间距  $S$  是正值即有

$$x < \left( -\frac{1}{M} \right) \left( \frac{f_2 + f_1 M}{f_1 + f_2} \right) \quad (40)$$

如前所述根据式(40)的分子  $f_2 + f_1 M$  的符号必须考虑两种可能性，

A: 令  $f_2 + f_1 M$  是正值，由式(30)

$$-f_2/f_1 < M < 0 \quad (41)$$

式(40)右边将是正值，由于  $x$  在式(39)被限制为负值，因不等式总是成立的。

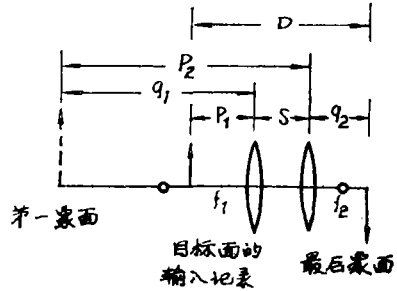


图7 光学系统4产生的倒立实像

式(10a)中双曲线项系数的符号在这部分是负的。双曲线在图8中给出，首先我们考虑式(10a)中线性项的系数为正号，即  $f_1 + f_2 M > 0$ ，这样联合等式(41)一起考虑  $M$  必须满足

$$-f_1/f_2 < M < 0 \text{ 和 } f_2/f_1 < M < 0 \quad (42)$$

合成曲线单调的减少并当  $x$  降低到  $-1$  时接近下限或由公式(10a)得

$$D_L = \lim_{x \rightarrow -1} D = \frac{f_2}{(-M)} (M-1)^2 \quad (43)$$

是一个正量，很明显与  $f_1$  无关。

下面考虑负的线性系数即  $f_1 + f_2 M < 0$  放大率被限制在

$$-f_2/f_1 < M < -f_1/f_2 \quad (44)$$

合成D函数由图8表示。最上面的曲线给出最小值。最小值所对应的  $x$  值由式(11)给出

$$x_{\text{极值}} = - \left( \frac{1}{M} \frac{f_2 + f_1 M}{f_1 + f_2 M} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (45)$$

如果  $M < -1$  最小的D值将出现在  $-1 < x_{\text{极值}} < 0$  范围内，具体的说，这最小值由式(13)给出并可以表示为正值，另一方面如果  $-1 \leq M < 0$ ,  $x_{\text{极值}} < -1$ , 最终D曲线逼

近由式(43)给出的下限

B:

令  $f_2 + f_1 M$  是负值

$$M < -f_2/f_1 \quad (46)$$

不等式(40)的右边是负值。x 被限制在下面区域

$$-1 < x < \left(-\frac{1}{M}\right) \left(\frac{f_2 + f_1 M}{f_1 + f_2}\right) < 0 \quad (47)$$

式(10a)中抛物线项的系数是正值，它的曲线由图(9)表示。

如果线性项的系数是负值， $f_1 + f_2 M < 0$  与式(46)一起写成

$$M < -f_1/f_2 \text{ 和 } M < -f_2/f_1 \quad (48)$$

也即合成 D 函数是单调函数并且当  $x \rightarrow (-1/M)[(f_2 + f_1 M)/f_1 + f_2]$  逼近的极限值是

$$D_u \equiv \lim D = -\frac{1}{M} \left( \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2} \right) (M-1)^2 \quad (49)$$

最后，如果线性项的系数是正值，得  $f_1 + f_2 M > 0$  或用式(46)表示为

$$f_1/f_2 < M < -f_2/f_1 \quad (50)$$

这时合成 D 函数出现最大值，由图 9 表示。有意义的量是当 x 接近在式(47)所确定区域的上限下限时，D 的极限值。极限值  $D_u$  由式(49)给出，而极限值  $D_L$  由式(43)可以得到。比较这些极限值得

$$D_u < D_L \quad (51)$$

注意这两种情况下即无论式(35b)成立或使用(51)式时最小距离 D 的函数形式是相同的。

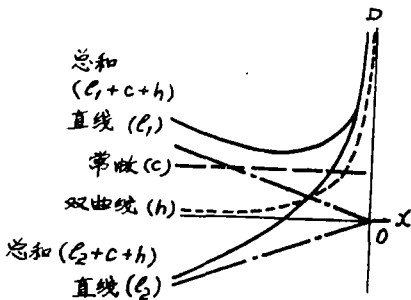


图 8 光学系统 4 A 部分距离函数 D 的组合。

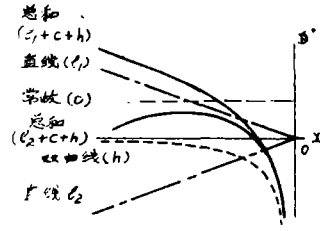


图 9 光学系统 4 B 部分距离函数 D 的组合。

## 结 束 语

上述的结果列入表 I 和表 II。对于这种布置可以找到绝对小距离的结构形式，表 I 列出放大率 M 的适当范围，位置 x 值与 x 的极值，最小距离  $D_{min}$  和用式(21)计算的透镜间距 S。对于那些不是绝对极小值出现的那种情况在表 II 也列出了距离函数 D<sub>u</sub> 或 D<sub>L</sub> 的极值和 x 的变化。

极限 D 函数与一般放大率范围比较可以得到进一步的简化，例如，最后列入的光学系统 3A (看表 II) 的极限 D 函数与光学系统 4B 的第一行进行比较。我们很容易地表示为

$$\frac{f_1 (M-1)^2}{(-M)} > \left(-\frac{1}{M}\right) \frac{(M-1)^2 f_1 f_2}{f_1 + f_2}$$

为了简便，表 III 是表 II 的简化形式，极限值的函数形式是相同的。(注意这种情况下透镜的间距趋近 0)

很易容指出极值一定出现情况下，最小距离  $D_{min}$  在负放大率的光学系统是较小的 (即表 I 中的光学系统 3A 和 4A 而不是 2)。最小的  $D_{min}$  值以这表的光学系统 4A 条件获得的。 $D_{min}$  与极限值 D 函数值相对应比较不适用于简单的代数换算，最好用确定的焦距和放大率数值作比较。

表 I 最小距离和输入记录位置

光学系统	放大率范围	x值的范围	x极值	最小距离 $D_{min}$	透镜间距S
2	$0 < M$	$0 < X$	$\left(\frac{1}{M} \frac{f_2 + f_1 M}{f_1 + f_2 M}\right)^{1/2}$	$2(f_1 + f_2) + 2 \left[\frac{f_1 + f_2 M f_2 + f_1 M}{M}\right]^{1/2}$	$\frac{1}{2} D_{min}$
3A	$-\frac{f_1}{f_2} < M < -\frac{f_2}{f_1}$ $-1 < M < 0$ $M < 0$	$0 < x < -\frac{1}{M} \left(\frac{1}{M} \frac{f_2 + f_1 M}{M f_1 + f_2 M}\right)^{1/2}$		$2(f_1 + f_2) + 2 \left[\frac{(f_1 + f_2 M)(f_2 + f_1 M)}{M}\right]^{1/2}$	$\frac{1}{2} D_{min}$
4A	$-\frac{f_2}{f_1} < M < -\frac{f_2}{f_1}$ $M < -1$	$-1 < x < 0 - \left(\frac{1}{M} \frac{f_2 + f_1 M}{M f_1 + f_2 M}\right)^{1/2}$		$2(f_1 + f_2) - 2 \left[\frac{(f_1 + f_2 M)(f_2 + f_1 M)}{M}\right]^{1/2}$	$\frac{1}{2} D_{min}$

表 II 离距函数的极限值和输入记录位置

光学系统	放大率范围	x的范围	x的极限值	距离函数 $D_u$ 或 $D_L$ 的极值	透镜间距极值 s
3A	$-\frac{f_1}{f_1} < M < -\frac{f_2}{f_1}$ $M \leq -1$	$0 < x < -\frac{1}{M}$	$-1/M$	$\frac{f_1(M-1)^2}{(-M)}$	$f_1(1-M)$
	$M < -\frac{f_1}{f_2}$ $M < -\frac{f_2}{f_1}$	$0 < x < -\frac{1}{M}$	$-1/M$	$\frac{f_1(M-1)^2}{(-M)}$	$f_1(1-M)$
3B	$-\frac{f_2}{f_1} < M < 0$	$0 < -\left(\frac{1}{M} \frac{f_2 + f_1 M}{f_1 + f_2}\right)$	$-\left[\frac{1}{M} \frac{f_2 + f_1 M}{f_1 + f_2}\right]$	$\frac{(M-1)^2 f_1 f_2}{(-M)(f_1 + f_2)}$	0
	$-\frac{f_1}{f_2} < M < 0$	$< x < -\frac{1}{M}$			
	$-\frac{f_1}{f_2} < M < -\frac{f_1}{f_2}$	$0 < -\left(\frac{1}{M} \frac{f_2 + f_1 M}{f_1 + f_2}\right)$	$-\left[\frac{1}{M} \frac{f_2 + f_1 M}{f_1 + f_2}\right]$	$\frac{(M-1)^2 f_1 f_2}{(-M)(f_1 + f_2)}$	0
		$< x < -\frac{1}{M}$			
4A	$-\frac{f_1}{f_2} < M < 0$	$-1 < x < 0$	-1	$\frac{(M-1)^2}{(-M)} f_2$	$f_2(1-1/M)$
	$-\frac{f_2}{f_1} < M < 0$				
	$-\frac{f_2}{f_1} < M < -\frac{f_1}{f_2}$	$-1 < x < 0$	-1	$\frac{(M-1)^2}{(-M)} f_2$	$f_2(1-\frac{1}{M})$
	$-1 < M < 0$				

$$4B \quad \begin{array}{l} M < -\frac{f_1}{f_2} \\ M < -\frac{f_2}{f_1} \end{array} \quad -1 < x < 0 \quad < -\left(\frac{1}{M} \frac{f_2 + f_1 M}{f_1 + f_2}\right) < 0 \quad -\left(\frac{1}{M} \frac{f_2 + f_1 M}{f_1 + f_2 M}\right) \frac{(M-1)^2 f_1 f_2}{(-M)(f_1 + f_2)} < 0$$

$$-1 < x < 0 \quad -\frac{f_1}{f_2} < M < -\frac{f_2}{f_1} \quad < -\left(\frac{1}{M} \frac{f_2 + f_1 M}{f_1 + f_2}\right) < 0 \quad -\left(\frac{1}{M} \frac{f_2 + f_1 M}{f_1 + f_2 M}\right) \frac{(M-1)^2 f_1 f_2}{(-M)(f_1 + f_2)} < 0$$

表Ⅲ 光学系统具有的距离函数的最小极限值

光学系统	放大率范围	变是x的极限值	距离函数 $D_u$ 或 $D_L$ 的极限值
3B	$-\frac{f_2}{f_1} < M < 0$	$-\left(\frac{1}{M} \frac{f_2 + f_1 M}{f_1 + f_2}\right)$	$\frac{(M-1)^2 f_1 f_2}{(-M)(f_1 + f_2)}$
	$-\frac{f_1}{f_2} < M < 0$		
	$-\frac{f_2}{f_1} < M < \frac{f_1}{f_2}$	$-\left(\frac{1}{M} \frac{f_2 + f_1 M}{f_1 + f_2}\right)$	$\frac{(M-1)^2 f_1 f_2}{(-M)(f_1 + f_2)}$
4B	$M < -\frac{f_1}{f_2}$	$-\left(\frac{1}{M} \frac{f_2 + f_1 M}{f_1 + f_2}\right)$	$\frac{(M-1)^2 f_1 f_2}{(-M)(f_1 + f_2)}$
	$M < -\frac{f_2}{f_1}$		
	$-\frac{f_1}{f_2} < M < -\frac{f_2}{f_1}$	$-\left(\frac{1}{M} \frac{f_2 + f_1 M}{f_1 + f_2}\right)$	$\frac{(M-1)^2 f_1 f_2}{(-M)(f_1 + f_2)}$

译自 Applied Optics Vol.16, No.1, p137, 1977.

(吴桂英译 董玉芝校)