

一种大型轻重量反射镜的结构优化计算

胡企千 (南京天文仪器厂)

提要 本文对所谓“拱”形轻重量反射镜提出一种结构优化方法,用于正在作方案调研中的4米望远镜的设计计算。计算结果表明在我国目前微晶玻璃的浇铸能力(一次只能浇铸7吨)下能够制造出一块特殊形状的4米主镜,满足刚度要求。该方法对同类镜子是普遍适用的。

一、引言

大型天文望远镜主镜的重量直接影响到望远镜整体的重量、成本和其它技术指标。随着天文仪器的大型化,设计轻重量镜子的问题越来越引起人们的重视。

减轻镜子的重量有各种方法,如蜂窝结构和薄镜面都已有采用的例子。P. C.

Talapatra 借鉴建筑结构上的“拱”的原理,提出在一块普通圆柱盘($D/H=6$)的毛坯上以圆弧形式去掉一部分材料而得到所谓“拱形”镜子结构(图1),并用计算和实验的方法证明了这种镜子的“刚度/重量”比明显优于圆柱盘^[1]。但文[1]中未给出拱形镜子的最佳形状。应该指出,这种镜子在镜坯制造工艺和支承结构上比其它轻重量结构的镜子简单。

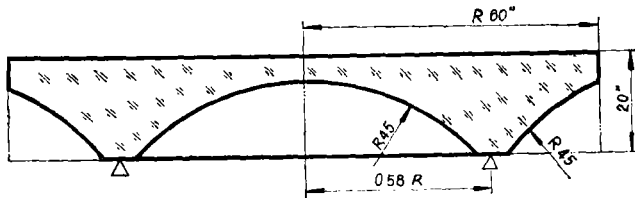


图1 拱形镜子^[1]。与实心圆盘相比,重量减少到58%,最大变形减少到1/2.8

去年10月,美国亚利桑那大学光学中心A. Meinel教授来我国访问讲学期间曾与我厂技术人员就我国4米望远镜的设想进行了共同的探讨,并提出了一个体积小、成本低的4米望远镜的初步方案。其中重要的一点就是采用拱形主镜。这主要是考虑到目前我国微晶玻璃的生产能力——一次最多只能浇铸7吨。

于是,就提出了这样的问题:在规定重量(去掉切削余量后为6.4吨)的前提下,拱形镜子应该做成怎样的具体形状,才能使

自重变形最小?这样的表面变形是否为光学成象所允许?

为了解决这个问题,对镜子形状进行了优化计算,获得了最佳形状,计算结果表明,由6.4吨微晶玻璃材料制成的上述形状的镜子的自重变形能满足光学象质要求。今年1月在美国Tucson举行的“90年代光学与红外望远镜”讨论会上,A. Meinel教授介绍了南京讨论的初步方案,名之为“南京研究”(Nanjing Study),并重点介绍了主镜的刚度设计结果。

二、初定方案和优化问题的提出

考虑了支承方式、表面曲率和一些结构工艺因素后，主镜的初定尺寸示于图2。顶面为焦距等于6000mm的抛物面，内外边缘厚度为50mm；底面为一平面圆环，环宽150mm；两侧面形状（包括底面位置）有待优化。

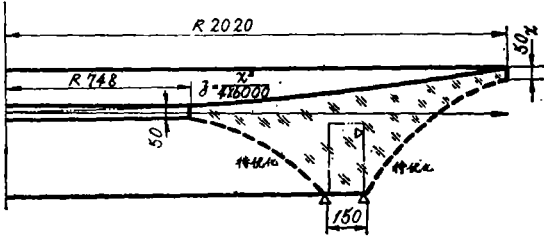


图2 支承方式和初定尺寸 (mm)

底支承是较为密集的气垫；侧支承由8个杠杆重锤机构组成，均匀地作用在镜子的垂轴重心平面内。

从镜子的初步形状和支承方式可以估计，其表面变形主要表现在水平放置状态；而水平放置状态又可以轴对称模型作为近似。由于空间弹性体的轴对称问题比三维问题算法上简单得多，因此有利于结构的优化计算。

限于计算机的容量和速度，仅对镜子水平放置进行结构优化，而以垂直放置进行校核。

由此，优化问题归结为：求使轴对称模型表面变形为最小的截面两侧形状，约束条件是重量等于6.4吨，或体积等于一个相应的常数值。

三、力学模型

镜子水平放置时是轴对称空间弹性体在轴向均布体力作用下的变形，以常应变三角形截面圆环单元建立有限元模型^[2]。算法的

精确性曾以 $\sim \phi 2000\text{mm} \times 100\text{mm}$ 的边界筒支的圆板的自重变形计算进行验证，计算结果与弹性力学的薄板分析解十分一致。

计算机程序对轴对称模型自动形成一定的单元网格，并只要给出优化边界上的若干控制节点（优化节点）的坐标后，其余节点坐标自动线性插值形成（除反射面上的节点坐标按抛物线函数自动形成外）。这对于控制节点坐标的优化是十分必要的。

镜子垂直放置时是三维弹性体在均布体力作用下的变形，以常应变四面体单元建立有限元模型^[2]；利用对称和反对称，只分析镜子的四分之一。垂直放置时的变形校核计算结果示于图9，下面不再另作说明。

四、目标函数

优化计算所采用的目标函数是轴对称模型的表面环对参考抛物面沿旋转轴方向的偏离 δ_i 的加权均方根值 m ：

$$m = \sqrt{\sum_1^n (\gamma_i \delta_i)^2} \quad (4-1)$$

式中 n 为环数， γ_i 为“面积加权因子”。由于在整个口径内抛物线比较平缓，因此不考虑“照度加权因子”。如各环的间距相等，则可近似地取

$$\gamma_i = \sqrt{\frac{R_i}{\sum_1^n R_i}} \quad (4-2)$$

R_i 为第 i 个环的半径。上述关系易于从下面的分析中得出：

设抛物面上有几个等间距的同心环，每个环上都以同样的间距取点（这一点仅仅是近似）。这样，各点所代表的面积是大致相等的，而且任一环上的点数 m_i 大致与半径 R_i 成正比：

$$m_i = k R_i,$$

k 对所有各环为一常数。因为所有表面点权重相等，故它们的轴向偏差的均方根值是：

$$m = \sqrt{\frac{\sum_1^n \sum_1^{m_i} \delta_i^2}{\sum_1^n m_i}} = \sqrt{\frac{\sum_1^n m_i \delta_i^2}{\sum_1^n m_i}} = \sqrt{\frac{k \sum_1^n R_i \delta_i^2}{k \sum_1^n R_i}} = \sqrt{\sum_1^n \left(\frac{\bar{R}_i}{\sum_1^n R_i} \right) \delta_i^2} = \sqrt{\sum_1^n (\gamma_i \delta_i)^2}$$

参考抛物面考虑了两种形式(图3):

1. 将原抛物面 P_0 沿轴向平移表面环位移的算术平均值后所得到的新的抛物面 P_1 ;

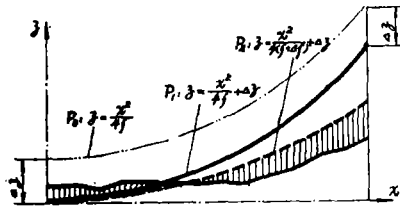


图3 两种参考抛物面

2. 包括焦距改正的“最佳吻合抛物面” P_2 。

用完全刚性的理论抛物面 P_0 为标准去衡量镜面变形,这对大型镜子是困难的,也没有必要;可以某一选定的参考抛物面来衡量镜面变形,由此只引起参考抛物面对理论抛物面 P_0 的整体偏差,包括顶点位置偏差、失焦和指向误差等,而这些仅仅是镜筒位置的函数;若其量不超过允许范围则没有什么影响,否则也可用自动调整装置加以补偿。若参考抛物面的选择使变形后的表面点偏差的均方根值最小,则称为“最佳吻合抛物面”。

设任意位置下 P_2 对 P_0 在原坐标系(以 P_0 旋转轴为 z 轴,以 P_0 顶点为坐标原点的空间直角坐标系)中相差:

$$\Delta x = H_1, \Delta y = H_2, \Delta z = H_3, \theta_x = \frac{H_4}{2f},$$

$$\theta_y = \frac{H_5}{2f}, \Delta f = \frac{H_6}{2}, \text{式中 } H_1 - H_6 \text{ 为待定的}$$

“吻合参数”,任一表面点 i 对 P_0 的偏差(绝对位移)沿坐标轴 x, y, z 方向的分量为 u_i, v_i, w_i , 则 i 至 P_2 的轴向距离取一阶近似为^[3]:

$$\delta_i = \left(\frac{x_i}{2f} u_i + \frac{y_i}{2f} v_i - w_i \right) - \left[\frac{x_i}{2f} \right.$$

$$\left. H_1 + \frac{y_i}{2f} H_2 - H_3 - \left(\frac{y_i}{2f} + \frac{y_i z_i}{4f^2} \right) H_4 + \left(\frac{x_i}{2f} + \frac{x_i z_i}{4f^2} \right) H_5 + \frac{z_i}{2f} H_6 \right]. \quad (4-3)$$

对于水平放置的镜子,由于对称性并忽略小量 u_i, v_i , 则上式成为:

$$\delta_i = -w_i - \left(-H_3 + \frac{z_i}{2f} H_6 \right). \quad (4-4)$$

因为是轴对称模型,所以只须以各表面环的加权轴向偏差〔见(4-1)、(4-2)两式〕表示。对所有表面环都建立(4-4)的关系式,于是有:

$$\begin{Bmatrix} r_1 \delta_1 \\ r_2 \delta_2 \\ \vdots \\ r_n \delta_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -r_1 w_1 \\ -r_2 w_2 \\ \vdots \\ -r_n w_n \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -r_1 & \frac{r_1 z_1}{2f} \\ -r_2 & \frac{r_2 z_2}{2f} \\ \vdots & \vdots \\ -r_n & \frac{r_n z_n}{2f} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} H_3 \\ H_6 \end{Bmatrix}, \quad (4-5)$$

或

$$\bar{\Delta} = \bar{B} - \mathbf{V} \bar{H}. \quad (4-5)'$$

式中

$$\bar{\Delta} = [r_1 \delta_1 \ r_2 \delta_2 \ \cdots \ r_n \delta_n]^T \quad (4-6)$$

为表面环的加权轴向偏差;

$$\bar{H} = [H_3 \ H_6]^T \quad (4-7)$$

为吻合参数;

$$\bar{B} = [-r_1 w_1 \ -r_2 w_2 \ \cdots \ -r_n w_n]^T; \quad (4-8)$$

五、优化的第一阶段—— 无约束条件一维寻优

在这一阶段中,假设轴对称模型的截面两侧为直线,这时模型的几何形状完全决定于底面内侧 A 点的坐标 x_A, z_A

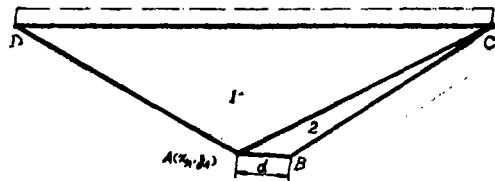


图4 第一阶段优化。设两侧母线为直线,用体积不变条件消去变量 z_A 优化 x_A

所有表面环加权轴向偏差的平方和

$$m^2 = \overline{\Delta}^T \overline{\Delta} = (\overline{B} - \overline{VH})^T (\overline{B} - \overline{VH}) \\ = \overline{B}^T \overline{B} - 2\overline{H}^T \overline{VB} + \overline{H}^T \overline{V}^T \overline{VH} \quad (4-10)$$

为求最佳吻合面,应使 m^2 取极小值,令

$$\frac{\partial m^2}{\partial \overline{H}} = 0, \quad (4-11)$$

得

$$\overline{V}^T \overline{VH} = \overline{V}^T \overline{B} \quad (4-12)$$

将(4-2)式代入(4-8)、(4-9)两式,并进而代入(4-12)式,得到二阶线性方程组

$$\begin{pmatrix} \sum_1^n R_i & -\frac{\sum_1^n R_i z_i}{2f} \\ -\frac{\sum_1^n R_i z_i}{2f} & \frac{\sum_1^n R_i z_i^2}{4f^2} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} H_3 \\ H_0 \end{Bmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \sum_1^n R_i W_i \\ -\frac{\sum_1^n R_i W_i}{2f} \end{pmatrix} \quad (4-13)$$

由此可解出最佳吻合抛物面的吻合参数 H_3, H_0 ,再由(4-5)、(4-10)两式可求出相对于最佳吻合抛物面 P_2 的均方根值 m 。

本文规定,轴对称模型的表面环相对于参考抛物面 P_1 和 P_2 的加权轴向偏差的均方根值分别用 m_1 和 m_2 来表示。

$$z_A = \frac{3V_0 - (x_A + x_C + x_D)[(x_C z_D - x_D z_C) - x_A(z_D - z_C)] - (2x_A + x_C + d)dz_C}{(x_A + x_C + x_D)(x_D - x_C) - (2x_A + x_C + d)d} \quad (5-6)$$

问题:极小化目标函数 $\phi(x_A, z_A)$, 即 m_1 或 m_2 , 满足约束条件

$$V(x_A, z_A) = 0 \quad (5-1)$$

用约束条件(5-1)消去一个变量 z_A , 使问题成为无约束一维寻优。如图4所示,轴对称模型由 D—C 分为固定部分(上方)和可动部分(下方),而可动部分的体积是两个三角形截面圆环的体积之和:

$$V_0 = V_1 + V_2 \quad (5-2)$$

三角形截面圆环的体积是:

$$V = 2\pi \cdot x_0 \cdot F \quad (5-3)$$

式中 x_0 为三角形重心的横坐标:

$$x_0 = x_i + x_j + x_k \quad (5-4)$$

F 为三角形面积:

$$F = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_i & z_i \\ 1 & x_j & z_j \\ 1 & x_k & z_k \end{vmatrix} \quad (5-5)$$

i, j, k 为三角形顶点的编号,顺序按反时针方向。

将式(5-2)~(5-5)应用于三角形 1、2,并注意底边 A—B 是水平的且长度固定为 d ,则可得出 z_A 的表达式:

目标函数无显式表达；对于任意坐标 x_A ，都可用 (5-6) 式求得坐标 z_A ，并自动均匀插值形成一个轴对称有限元模型，进行一次位移求解，计算一次均方根值。

图 5-a 表示 A 点坐标 x_A 变化时用不同参考抛物面定义两种目标函数的变化规律：

m_1 (相对于 P_1 的均方根值) 用实线表示，最优点在 $x_A = 1378\text{mm}$ 处，相应的均方根值是 0.1086μ ；

m_2 (相对于 P_2 的均方根值) 用虚线表示，它的最优点大致在 $x_A = 1050\text{mm}$ 处，相应的均方根值是 0.0179μ ；而当 $x_A = 1378\text{mm}$ 时却几乎与 m_1 相等。因此如用“最佳吻合”这一概念来评价镜子的刚度，潜力是很大的。

图 5-b 给出了当 m_1 和 m_2 分别为最佳值的两种结构相对于各自吻合面的表面变形曲线，此处横坐标轴代表了吻合表面。吻合面对理论抛物面的偏差：对 P_1 是 $\Delta z = -0.1831\mu$ ；对 P_2 是 $\Delta z = 1.2182\mu$ ， $\Delta f = 143.37\mu$ ；数值都是很小的。

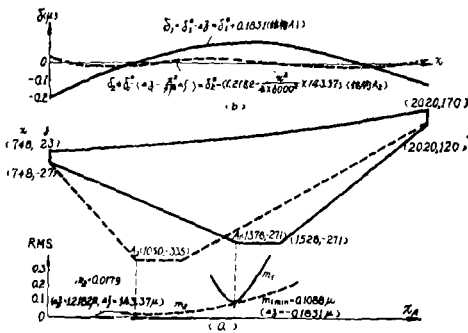


图 5 第一阶段优化计算结果。(a) x_A 对 m_1 和 m_2 的影响；(b) m_1 、 m_2 分别为最小值的两种结构表面各自吻合面的轴向偏差

六、优化的第二阶段 ——具有一个约束条件的梯度投影法

在这一阶段中，目标函数只考虑了

m_1 。

问题：极小化目标函数 $\phi(\bar{x})$ ，
满足约束条件

$$V(\bar{X}) = 0, \quad (6-1)$$

其中 ϕ 、 V 均为非线性函数。

用“梯度投影法”求解。具有多个约束条件的“梯度投影法”在 [4]、[5]、等文中均有论述；在此只有一个约束条件，因此是一特殊情况。现说明这一特殊情况下的算法步骤。

假定初始解 \bar{X}_0 满足约束条件。

每一迭代过程分两步进行：

第一步：在约束面的切平面内沿目标函数的最快下降方向前进。用不定乘数法将约束极值问题化为无约束极值问题，构造函数

$$F(\bar{X}, \lambda) = \phi(\bar{X}) + \lambda V(\bar{X}), \quad (6-2)$$

其中 λ 为待定常数。取 F 的负梯度方向（最速下降方向）为移动方向：

$$\bar{p} = -\nabla F = -(\nabla \phi + \lambda \nabla V), \quad (6-3)$$

式中 ∇ 为梯度符号。同时要求 \bar{p} 位于约束面的切平面内（在移动过程中尽量不违背约束），即

$$(\nabla V)^T \cdot \bar{p} = 0 \quad (6-4)$$

将 (6-3) 式代入上式得：

$$(\nabla V)^T (\nabla \phi + \lambda \nabla V) = 0,$$

$$(\nabla V)^T \nabla \phi + \lambda (\nabla V)^T \nabla V = 0.$$

若 ∇V 为归化向量，即

$$(\nabla V)^T \cdot \nabla V = 1, \quad (6-5)$$

则

$$\lambda = -(\nabla V)^T \cdot \nabla \phi. \quad (6-6)$$

由 (6-6)、(6-3) 两式就可求出移动方向 \bar{p} 。

有了移动方向后，用一维寻查方法选择步长因子 α ，使目标函数在此点取极小值：

$$\frac{\partial \phi(\bar{X}, \alpha)}{\partial \alpha} \equiv \frac{\partial \phi(\bar{x}_0 + \alpha \bar{P})}{\partial \alpha} = 0, \quad (6-7)$$

于是得到新的一点 \bar{x}_1 :

$$\bar{x}_1 = \bar{x}_0 + \alpha \bar{P}. \quad (6-8)$$

第二步: 沿约束负梯度方向校正 \bar{x}_1 对约束面的偏离 (因为是非线性约束, 所以必然有偏离),

$$\bar{x}_2 = \bar{x}_1 - \beta \nabla V, \quad (6-9)$$

使之回到约束面上来:

$$V(\bar{x}_2) = 0.$$

步长因子 β 也用一维寻查方法求得。

图 6 为梯度投影法的示意。

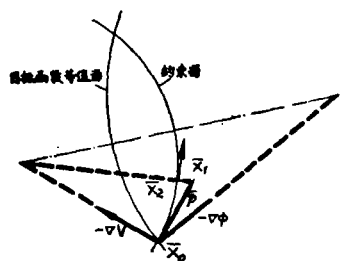


图 6 梯度投影法示意

第二阶段优化的具体做法是: 以第一阶段优化所得结果作为初始结构, 在轴对称模型截面的待优化边界上选择 5 个节点 (图 7 中的节点 1、2、3、4、5) 的 x, z 坐标作为优化参数, 即

$$\bar{x} = [x_1 z_1 x_2 z_2 x_3 z_3 x_4 z_4 x_5 z_5]^T,$$

其余可动节点的坐标用线性插值决定, 从而待优化边界成为折线。

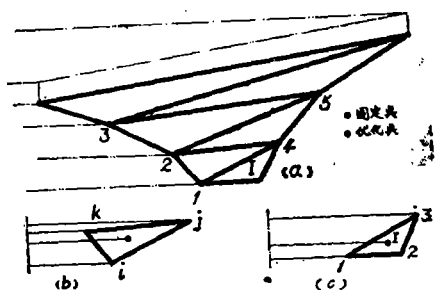


图 7 第二阶段优化。以重量不变为约束条件, 用梯度投影法优化 1、2、3、4、5、各点坐标。以若干三角形截面圆环表示镜子体积

约束函数 $V(\bar{x})$ 及其梯度用显函数直接求出。类似于第一阶段, 轴对称模型的可动部分可按优化节点分为若干三角形截面的圆环 (图 7-a)。所以镜子的总体积及其对优化节点坐标的偏导数最终归结为每一个圆环的体积及其对三角形顶点坐标的偏导数。

由式(5-3)~(5-5)可直接求得三角形圆环体积对各顶点坐标的偏导数 (图 7-b):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x_i} &= \pi \left[\frac{2}{3} F - x_0 (z_k - z_j) \right] \\ \frac{\partial V}{\partial z_i} &= \pi x_0 (x_k - x_j) \end{aligned} \right\} i, j, k. \quad (6-10)$$

对于底边水平且长度固定为 d 的三角形 I (图 7-c), 有 $V = 2\pi \cdot x_0 \cdot \frac{1}{2} d (z_3 - z_1) = \pi \cdot x_0 \cdot d (z_3 - z_1)$,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x_1} &= \frac{2}{3} \pi d (z_3 - z_1), \\ \frac{\partial V}{\partial z_1} &= -\frac{1}{3} \pi d (2x_1 + x_3 + d), \\ \frac{\partial V}{\partial x_3} &= \frac{2}{3} \pi F, \\ \frac{\partial V}{\partial z_3} &= \frac{1}{3} \pi d (2x_1 + x_3 + d). \end{aligned} \right\} (6-12)$$

由于点 2 坐标为非独立的, 因此约束函数梯度中不予包括。

目标函数无显式表示。对于任意一组优化节点坐标, 都可自动均匀插值形成一个轴对称有限元模型, 进行一次位移求解, 计算一个均方根值 m_1 。目标函数对优化节点坐标的偏导数用差分近似。

图 8 表示第二阶段优化的结果。经 11 次迭代后, 均方根值 m_1 由 0.1095μ 下降到 0.0689μ , 已基本达到最优解, 但在镜子外缘局部发现有过于薄弱之处, 建议用第 8 次迭代结果, m_1 为 0.0838μ 。

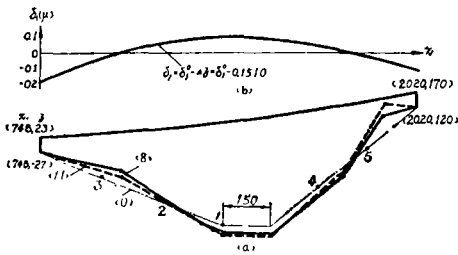


图8 第二阶段优化计算结果。

(a)第(0)、(8)、(11)次迭代后的
截面轮廓

(b)第(8)次迭代后镜面对于吻合
面的轴向偏差

迭代次数

单位: mm

	x_1	z_1	x_2	z_2	x_3	z_3	x_4	z_4	x_5	z_5	RMS (m_1)
(0)	1376.1	-269.8	1166.7	-188.8	957.4	-107.7	1690.7	-139.9	1855.4	-9.9	0.1095 μ
(8)	1376.6	-297.8	1290.2	-264.5	1024.6	-95.9	1767.3	-109.5	1887.5	95.1	0.0838 μ
(11)	1373.0	-301.2	1330.0	-284.7	1036.6	-110.8	1781.7	-90.3	1928.1	140.7	0.0689 μ

从第二阶段优化计算的结果可以大致看出截面图形的某些变化规律: 最大厚度加大; 内侧凹进; 外侧凸起; 并且外侧边缘有减薄的趋势。这说明两种互相矛盾的因素——材料对刚度和荷载的贡献——都在起作用, 只是在不同的部位有主次之分而已。

七、结 论

1. 由于空间轴对称模型和平面应力(包括“拱”、“梁”等平面类型结构)的模型是完全不同的力学模型, 因而不能完全用后者经力学分析所得的最佳形状概念去估计前者的最佳形状, 而只有直接建立在空间模型基础上的分析, 才是正确的。

2. 这里所进行的第一阶段优化, 即假定轴对称模型截面两侧为直线的优化是一维寻优过程, 因此它算法简单、计算时间短、目标函数下降效果明显; 而且它的优化结果离真正的最优解是不远的。所以, 为了避免较复杂的计算、缩短计算时间, 或者考虑镜坯的结构工艺性(直母线制作比较简单), 第二阶段优化不做也是可以的。当然在相反的条件下, 第二阶段优化也是很有意义的。

3. 在规定6.4吨微晶玻璃材料的条件下, 经优化后所得的拱形镜子能满足刚度要

求, 可以使用。此镜子的直径和最大厚度比为9:1; 若将给定的重量折合成圆柱盘, 则直径和厚度比为18:1。这个比值已优于现在作为新发展方向的薄镜面(13:1~15:1)。就是说, 这种结构具有和薄镜面主镜相竞争的能力。这种结构有待解决的技术问题是镜坯的浇铸成形, 而薄镜面的技术困难是磨制方法。鉴于现在的刚度已接近光学质量的瑞利(Rayleigh)极限, 适当放宽重量限制将会得到刚度上的较大提高。对于镜坯重量不受工艺条件限制的情况, 最大厚度适当加大一些是合适的。

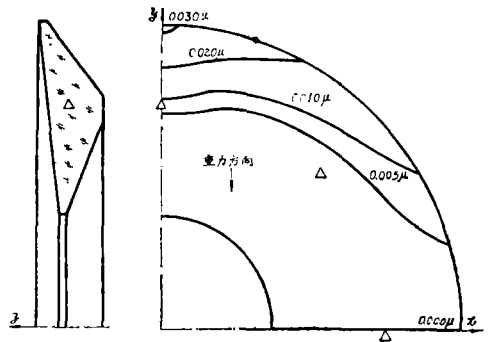


图9 垂直放置下镜面的轴向变形。

8点支承作用于垂轴重心平面。
下半部分与上半部分数值相等,
符号相反

参考文献

- [1] P.C.Talapatra, *Optica Acta*, 22, 1975, No.9, 745-759.
- [2] 华东水利学院, “弹性力学问题的有限元法”。
- [3] 上海科技大学王生洪等, “大型天线结

构的保型优化设计”。

- [4] R.H.Gallagher, O.C. Zienkiewicz, “Optimum structural design (theory and applications)”. (有中译本)
- [5] 南京大学数学系计算数学专业, “光学系统自动设计中的数值方法”。

