

卫星挠性附件的动力学问题

—太阳电池阵动力学的有限元分析

张 乃 恭

(空间中心总体部)

一、前 言

卫星结构型式和飞机导弹比较起来千奇百怪几乎没有多少相同的,附件的影响就是其中的一种主要原因。这些附件包括各式各样的天线,太阳电池阵以及重力梯度伸杆、 y_0-y_0 消旋机构、章动阻尼器等等,而这些附件的特点是

1. 附件的数目多
2. 附件与主体相比,几何尺寸大或长,而质量轻,例如,无线电天文探测器 *RAE*,在它上面的四根兼作重力梯度伸杆的天线,每根长达230米。
3. 附件本身的单位面积(长度)质量日趋减小,由表1中太阳电池阵的示例即可以清楚地看出来这一现象。
4. 附件相对于主体的运动状态多。

仍以太阳电池阵为例来看,它除了入轨后相对主体要伸展及转动外,在轨道运行中也还有旋转或弯曲、扭转的变形运动。

表1

No	卫 星 名	结 构 形 式	单位面积质量公斤/米 ²
1	(美) 海军通讯卫星	铝 蜂 窝	4.7
2	OTS	碳纤维铝蜂窝芯	3.17
3	(加) CTS	碳 纤 维	2.5
4	(西德) FRS	碳 纤 维	1.53

众所周知,卫星要求有高的指向精度,而天体观察卫星比地球观察卫星指向精度的要求几乎要高出一个数量级,例如美国的地球资源卫星的指向精度为0.1,而荷兰的小天文卫星的指向精度则为0.01。指向精度愈高,则意味着对于姿态控制系统有愈高的要求,而这些比主体质量轻、面积大或长度长、相对运动状态又多的附件,它们就像一艘小船上的大帆,对姿态的运动不能不产生影响,实践证明也确实如此,例如 *OGO-III* 卫星就是由于挠性太阳电池阵伸杆的干扰,使得姿控系统发生了严重的振荡。因此就出现了日益为人们所关注的挠性附件卫星结构的动力学问题。

关于带有挠性附件飞行器的动力学的分析研究工作,从70年代以来已进行了大量的工作,它是一门边缘科学,它涉及的学科领域也很广,由于附件日趋体大质轻,用经典的分析力学

的方法来处理飞行器的动力学问题，已很不适应了，从1972年 *P. L. Likin* 提出杂交座标法的有限元模型以来^[2]，用60年代兴起的有限元法来处理这类刚—弹性的动力学问题，已有了很大发展，在很多文献中都讨论了这方面的问题。^{〔1〕—〔6〕〔9〕}

二、挠性附件的变形运动与卫星姿态运动

我们所讨论的卫星结构如图 1 所示，当卫星在轨道上运行时，它的姿态改变是由俯仰、偏航、滚动三个姿态角来确定的，如图 2 所示，而四块挠性太阳电池阵，当发生弹性变形运动时，只有当它出现了（参看图 3）

- a. 反对称面外弯曲
- b. 对称扭转
- c. 面内对称侧向弯曲
- d. 面内反对称侧向弯曲

时，才对姿态角产生影响。而影响最大的是反对称面外弯曲。

在太阳电池阵的弯曲、扭转振型中，人们所最关切的是它们的基频及低频的振型。因为这些低频很容易落在姿控回路的频率范围内，在表 2 中给出了美国海军通讯卫星与西德国际 5 号卫星太阳电池阵的固有频率，由此可见它们的固有频率都很低。

综上所述可知随着太阳电池阵结构的轻型化、由于结构刚度的降低，它的振频降低是很快的，在姿控系统的设计研究中，结构变形运动的动力学问题，就不能不予以认真去考虑的了。

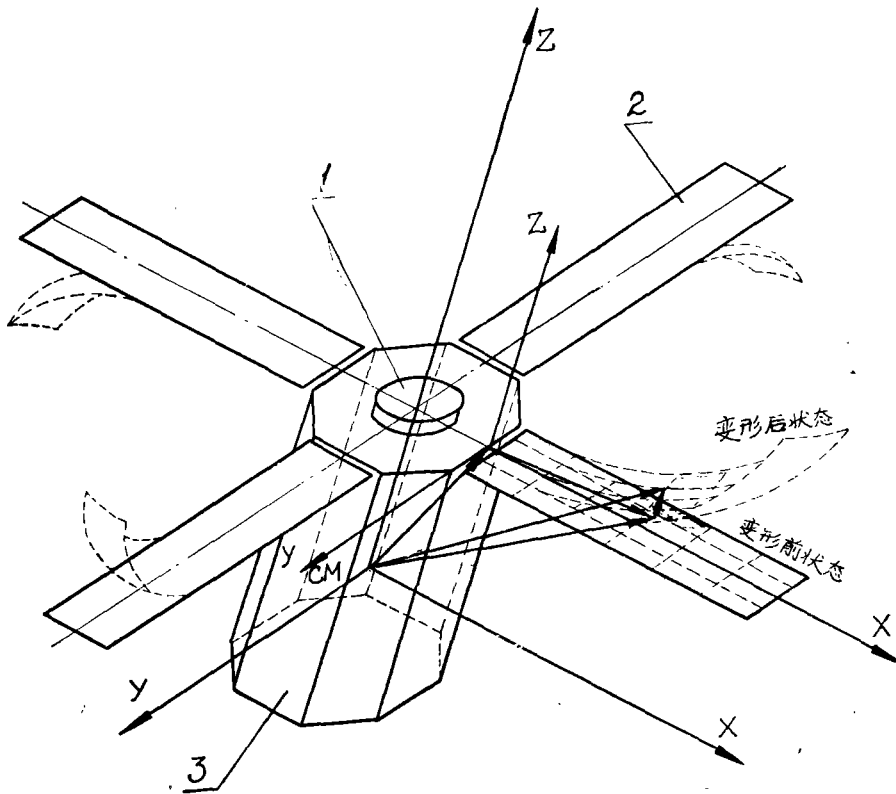


图 1

表2

卫	星	国	际	V	号	美海军通讯卫星
展开状态	计算值	$f_1 = 0.36 \quad f_2 = 1.07 \quad f_3 = 1.11$ (赫)				0.32 (赫)
	试验值					
收拢状态	计算值	32.4 (赫)				25 (赫)
	试验值	34 (赫)				

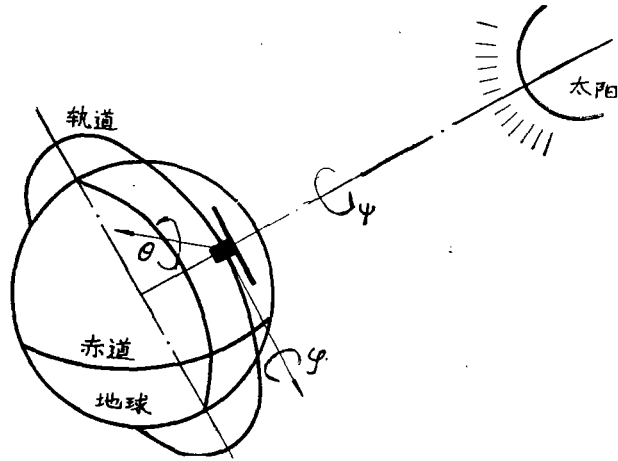


图2

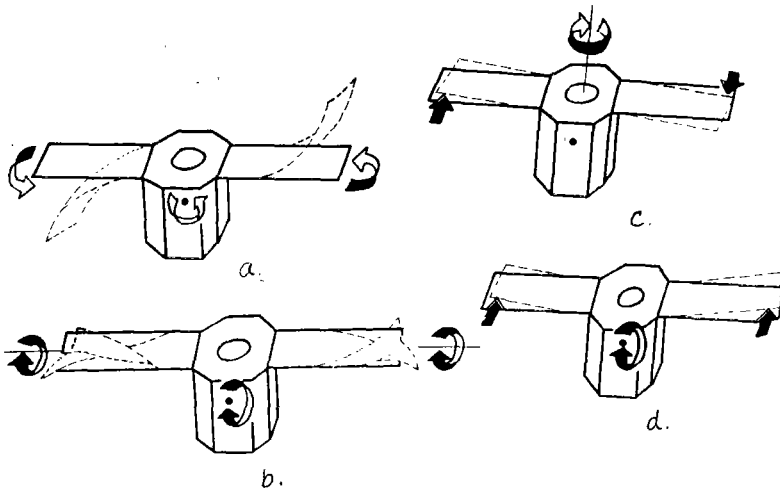


图3

三、解 析

在卫星的研制中，都有各自的结构动力学分析用专用程序，有很多也都是采用有限元法来做的，如CTS，国际V号等等

由于图 1 所示结构的对称性, 因此只须分析其中一翼即可, 按照有限元的做法, 先对结构进行离散分割, 单元是取矩形元, 因为板是蜂窝夹层式的结构, 因此考虑了横向剪切的影响, 选用的坐标如图 1 所示

1. 星体运动方程

在讨论之前, 今假设

- (1) 系统是保守的, 无耗散。
- (2) 不考虑飞轮等内存角动量的影响。
- (3) 不考虑结构阻尼及太阳电池阵引起的热效应。

由动量矩守恒原理知有

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial t} = \bar{M} \quad (1)$$

式中 \bar{H} 为绕卫星质心的总动量矩。

\bar{M} 为作用于卫星质心处的力矩

今把卫星主体作为刚体, 而把太阳电池阵作为弹性体, 则有

$$\bar{H} = \bar{H}_R + \bar{H}_F \quad (2)$$

式中 \bar{H}_R 为卫星刚体绕质心的角动量

\bar{H}_F 为弹性体绕质心的角动量

若卫星刚体系统如以角速度 $\dot{\theta}$ 来绕定轴转动时, 由定义可知刚体角动量为

$$\bar{H}_R = I \dot{\theta} \quad (3)$$

而弹性体的角动量则为

$$\bar{H}_F = \int r_F \times \dot{r}_F dm \quad (4)$$

由图 4 知上式中

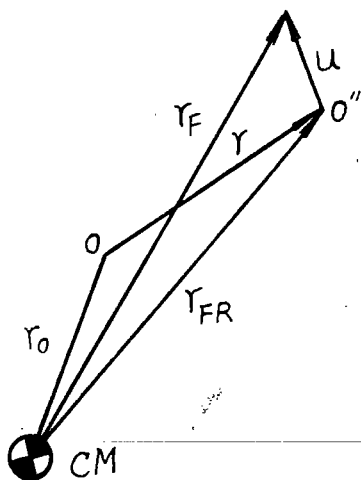


图 4

I 为卫星的惯性矩

θ 为姿态角

r_F 为由质心到变形后所研究点处的位置向量

当变形量小时, r_F 可分为

$$r_F = r_{FR} + u \quad (5)$$

式中 r_{FR} 为由星体质心到变形前所研究点处的位置向量, 它也是 r_F 的“刚体”分量。

由图 1 及图 4 知当板由未变形状态到达变形后的状态时, 所研究的某一点 O'' 产生了位移 u , 因此板的运动状态都可以用位移 u 的无量纲坐标 $\xi\eta\zeta$ 来描述, 今选取此位移函数为

$$u = u(\xi, \eta, \zeta) \quad (6)$$

且由于此位移 u 在单元的节点处, 应当就是该节点处的节点位移 U (广义位移), 若板是由

n 个单元所组成时, 则第 i 个单元的位移型函数应有以下关系

$$u_i = a_i U_i \quad (7)$$

于是由 (4) (5) (6) (7) 式可求得

$$\overline{H}_{r_i} = A_i M_i \dot{U}_i \quad (8)$$

式中 A_i 为系数矩阵

M_i 为质量矩阵

再把 \overline{H}_{r_i} 中有关量进行坐标变换, 然后进行组集, 即可以求得弹性体的动量矩为

$$\overline{H}_r = \sum_{i=1}^n A_i M_i \dot{U}_i = AM\dot{U} \quad (9)$$

把 (9), (3) 式代入 (2) 式及 (1) 式中, 最后可得

$$I \ddot{\theta} + AM\ddot{U} = \overline{M} \quad (10)$$

当卫星为无约束自由运动时

$$I \ddot{\theta} + AM\ddot{U} = 0 \quad (11)$$

2. 弹性板的运动方程

由 *Lagrangian* 方程

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \right) = 0 \quad (12)$$

式中 *Lagrangian* 函数

$$L = T - V \quad (13)$$

系统动能 T

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int_{r_i} \dot{r}^T \dot{r} dm \\ &= \frac{1}{2} \int_{r_i} [\dot{u} - (r_0 + r) \dot{\theta}]^T [\dot{u} - (r_0 + r) \dot{\theta}] dm \end{aligned} \quad (14)$$

式中

r_0 为由质心到刚体和弹性体连接处的位置向量

r 为由刚体与弹性体连接处到变形前研究点处的位置向量

u 为变形前所研究点处到变形后所研究点处的位置向量, 也即所研究点的弹性位移量。

“ $\dot{\cdot}$ ” 为所研究向量对时间的导数。

dm 为微分质量。

由 (7) 式与 (14) 式可求得系统动能

$$T = \frac{1}{2} \dot{U}^T M \dot{U} + \dot{\theta}^T A M \dot{U} + \frac{1}{2} \dot{\theta}^T I \dot{\theta} \quad (15)$$

式中 U 为广义位移

M 为质量矩阵
 A 为系数矩阵
 θ 为姿态角矩阵
 I 为惯性矩矩阵

下面再求定位能 V

因为弹性体的位能，就是板的应变能，由应变能的定义知有

$$V = U = \frac{1}{2} \int_V \sigma^T e dv \quad (16)$$

式中 U 为应变能
 σ 为应力矩阵
 e 为应变矩阵

又由虎克定律知

$$\sigma = De \quad (17)$$

式中 D 为弹性系数矩阵

故 (16) 式可写为

$$U = \frac{1}{2} \int_V e^T D e dv \quad (18)$$

因为太阳能电池阵是蜂窝夹层结构型式的板，故应考虑它的横向剪切影响，在这里采用了修正的克希霍夫假说的米德林理论^[7,8]。图 5 为此板的横截面结构形式和变形以及矩形单元节点的情况。

因此板的应变能，应当是上下面板的应变能和夹层芯的应变能之和。即

$$U = U_p + U_c \quad (19)$$

式中 U_p 为上面板与下面板的应变能

U_c 为夹芯的应变能

(19) 式也可写作

$$U = \frac{1}{2} \int_V e_p^T D_p e_p dv + \frac{1}{2} \int_V e_c^T D_c e_c dv \quad (20)$$

又由板的理论知应变位移关系有

$$e = \varepsilon^o + \varepsilon^{NL} + \begin{Bmatrix} z\varepsilon_b \\ \varepsilon_s \end{Bmatrix} \quad (21)$$

式中 中面应变为

$$\varepsilon^o = \begin{Bmatrix} \partial u / \partial x \\ \partial v / \partial y \\ \partial u / \partial y + \partial v / \partial x \end{Bmatrix} \quad (21a)$$

弯曲应变

$$\varepsilon_b = - \begin{Bmatrix} \partial \phi_x / \partial x \\ \partial \phi_x / \partial y \\ \partial \phi_x / \partial y + \partial \phi_y / \partial x \end{Bmatrix} \quad (21b)$$

剪切应变

$$\varepsilon_s = \begin{cases} \frac{\partial w}{\partial x} + \phi_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} + \phi_y \end{cases} \quad (21c)$$

非线性应变

$$\varepsilon^{NL} = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \end{cases} \quad (21d)$$

把 (6) (7) (21) (21a—21d) 式代入 (20) 式后, 可求得单元的应变能

$$U_i = \frac{1}{2} U_i^T [K_{EP} + K_{GP}]_i U_i \quad (22)$$

式中 K_{EP} 为弹性刚度矩阵

K_{GP} 为几何刚度矩阵

再把单元的应变能组集后, 就可求得整个板的应变能为

$$V = U = \frac{1}{2} U^T K U \quad (23)$$

将 (15) (23) 式代入 (13) 式得

$$L = \frac{1}{2} \dot{U}^T M + \dot{\theta}^T A M \dot{U} + \frac{1}{2} \dot{\theta}^T I \dot{\theta} - \frac{1}{2} U^T K U \quad (24)$$

再把 (24) 式代入 (12) 式, 最后求得

$$M \ddot{U} + M A^T \dot{\theta} + K U = 0 \quad (25)$$

(25) 式也可改写为

$$M \ddot{U} + K U = F(t) \quad (26)$$

当 $\theta \equiv 0$ 时, 则有

$$M \ddot{U} + K U = 0 \quad (27)$$

其特征方程为

$$| -\omega^2 M + K | = 0 \quad (28)$$

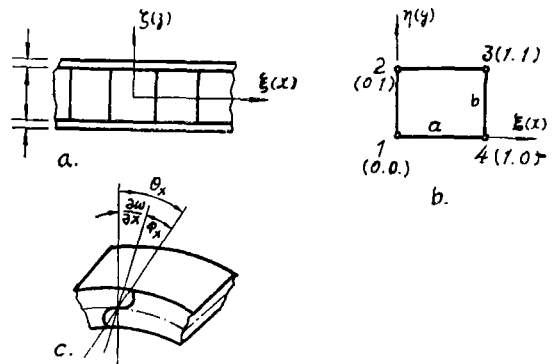


图 5.

四、系统的传递函数与状态方程

对 (26) 式进行拉氏变换后, 可得

$$(Ms^2 + K)U(s) = F(s) + M\dot{U}(0) + MsU(0)$$

略去齐次解，即令 $U(0) = \dot{U}(0) = 0$ 则有

$$(Ms^2 + K)U(s) = F(s) \quad (29)$$

根据系统传递函数的定义，即系统输出量（传递响应）和系统输入量（传递激发力）之比，也即广义位移的输出量 $U(s)$ 和外力 $F(s)$ 之比值，由 (29) 式可直接求得系统传递函数为

$$G(s) = \frac{U(s)}{F(s)} = \frac{1}{Ms^2 + K} = \frac{k}{S^2 + \omega_n^2} \quad (30)$$

式中
$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{M}} \quad (31)$$

此即为系统在各个模态时的无阻尼自然频率，此动力学模型与姿控系统的关系如图 6 所示，另外，可将 (26) 式降阶后，即可以求得状态方程为

$$\begin{pmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{pmatrix} F(t) \quad (32)$$

式中 $F(t)$ 为线性函数
也可简写为

$$\dot{U} = A_U(t) + B_{F(t)} \quad (33)$$

再与由姿控系统求得的输出方程

$$Y = C_{U(t)} + D_{F(t)} \quad (34)$$

一起，由 A 、 B 、 C 、 D 四个系数矩阵，即可确定系统的可观性与可控性了。

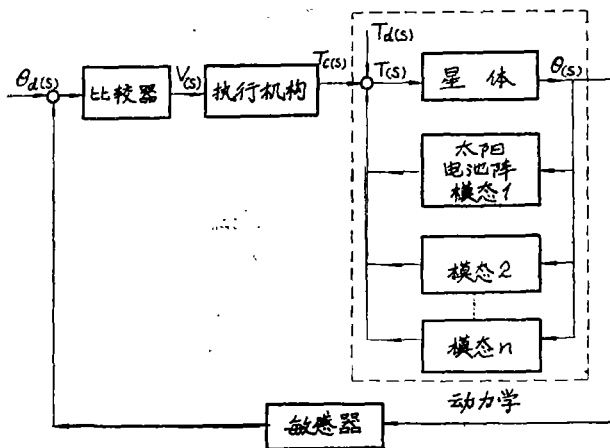


图 6

参 考 文 献

1. P. W. Likins, JPL, TR-32-1329, 1970.
2. P. W. Likins, Int. J. Solid Struct. 1972 may PP709-731
3. G. Heimbold, DFVLR I. B. NR. IB 552-7717.

4. UTLAS—R—205 1975.
5. 国外空间控制技术 1978年3月.
6. ALAA J. 1973, 11, 9.
7. R. P. Mindlin; J. Appl. Mech. 1951, 18, mar, No1, 31.
8. E. Hinton; Proceedings the institution of civil engineers Part 2, 1975, march., 43—65.
9. 第19回宇宙科学技术连合讲演会讲演集, 1975.
10. 周衍柏; “理论力学”, 1961.
11. 王德荣等; “矩阵结构分析理论”, 1975.
12. В. П. Кандидов Вестник Московского Университета Серия 111 физика Астрономия 1972. 13, 1.