利用光栅进行激光加速的问题

翁 兆 恒

摘要： 本文利用光的经典衍射理论，推导出了描述调相和调幅光栅远场性能的表达式，并利用这些表达式讨论了激光加速问题，结果表明：由于仅有为数不多的几级衍射波能够射到远离光栅表面的加速轴上，这些波与在加速轴上运动的相对论电子不同步，因而在一定的空间距离上，光电场对电子所做的功为零。这就表明：利用调相和调幅光栅的远场性能进行激光加速，不可能获得有意义的加速能力。

一、引　　言

自从1962年K.Shimode[1]首次提出利用激光加速荷电粒子的建议以来，已有一系列的工作研究了利用光栅和校正板进行激光加速的问题[2],[3],[4],[5],[6],[7]。其中特别值得提到的是1977年F.Rcarlat等提出利用黑白相间的调幅光栅的远场性能进行激光加速的方案，和1979年彭桓武教授等提出的利用$\frac{\lambda}{4}$调相光栅的远场性能进行激光加速的新建议。这两篇文章发表后，引起不少人的注意和兴趣，但对远场情况下能否具有加速作用，仍有争议。为了弄清问题，本文利用谐波分析方法(即简化的电磁理论)，分析了平面型调幅光栅和调相光栅的远场性能，根据这些性能讨论了激光加速问题。结果得到了与文献[6]和[7]相反的结论：利用调幅光栅和调相光栅的远场性能进行激光加速，不可能获得有意义的加速能力。下面分三个部分进行论述：1，调相光栅的远场性能；2，调幅光栅的远场性能，3，激光加速问题。

二、调相光栅的远场性能

假设斜入射单色平行光的输入函数为：

$$A_0(x)=e^{ikx\cos\theta},\tag{1}$$

式中$K=2\pi/\lambda$，λ是光波波长，θ是平行入射光与光栅表面的夹角。

又设置于x轴上的光栅的调相函数为：

$$\Phi(x)=e^{ikn\lambda/m_0},\ (n-\frac{1}{2})d<x<(n+\frac{1}{2})d\tag{2}$$

式中m_0为大于1的已知整数，d为光栅常数，$n=0,\ \pm1,\pm2,\cdots\cdots$。

因此，经光栅调相后的光输出函数为：

$$A(x)=e^{ik(x\cos\theta+n\lambda/m_0)},\ \ (n-\frac{1}{2})d<x<(n+\frac{1}{2})d,\tag{3}$$

根据熟知的光栅公式，从图1可以得到下条件式：

$$d\cos\varphi_M-(d\cos\theta+\lambda/m_0)=M\lambda,\ \ M=0,\pm1,\pm2\cdots\cdots。\tag{4}$$

这就是说，只有满足条件（4）的各M级衍射光，才能射离（透射或反射）光栅表面，而其它的将相消为零，不产生物理作用。从图1我们还可以看出：当$\varphi_M=0$或π时，实际上是沿光栅表面传播的表面波，对光栅的远场无贡献，可以不考虑。于是利用$|\cos\varphi_M|<1$的条件，可以从（4）式求得：

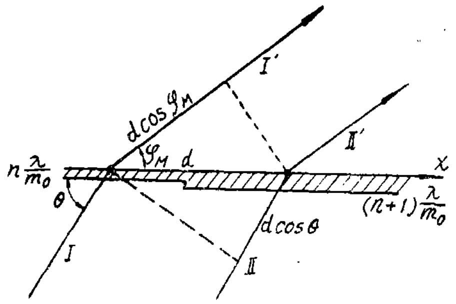

图 1　调相光栅衍射原理图

$$(\cos\theta+\frac{\lambda}{m_0 d}-1)\frac{d}{\lambda}<M<(\cos\theta+\frac{\lambda}{m_0 d}+1)\frac{d}{\lambda}。\tag{5}$$

例如，设$\cos\theta+\frac{\lambda}{m_0 d}=1, d=2\lambda$时，可得$M=0$，$-4$为表面波，对远场无影响，只有$M=-1,-2,-3$等三个衍射波有贡献。

为定量给出各级衍射光之间的振幅和相位关系，我们对光栅的调相函数$\Phi(x)$进行富氏展开，可求得（见附录）：

$$\Phi(x)=\sum_q \Phi_q e^{ik(q+\frac{1}{m_0})\frac{\lambda}{d}x},\tag{6}$$

式中

$$\Phi_q=\frac{\sin(q+\frac{1}{m_0})\pi}{(q+\frac{1}{m_0})\pi}，\ q\text{为整数。}$$

于是，只要令上式中的q等于（4）式中的M，就可把（3）式改写为：

$$A(x)=\sum_M \frac{\sin(M+\frac{1}{m_0})\pi}{(M+\frac{1}{m_0})\pi}\cdot e^{ikx\cos\varphi_M},\tag{7}$$

式中$\cos\varphi_M$满足（4）式的条件。由（7）式可以看出：调相光栅等价于一个“多谐变频器”，它把一种单一的空间频率$k\cos\theta$，变换成多种不同空间频率$k\cos\varphi_M$的衍射波，这些衍射波以不同的角度和幅度射离光栅表面。

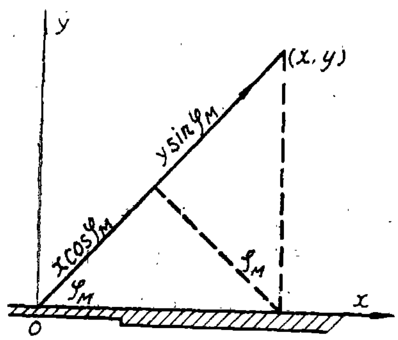

图 2　衍射光的位相关系

现在进一步研究任一空间点(x, y)处各级衍射波叠加场强的大小。从（7）式可知：各级衍射波的等相位点都在光栅表面$x=0$处（即座标原点）。因此，从图（2）不难看出：在(x, y)点处，各级衍射波的相位，相对于座标原点$(0,0)$处的相位迟后为：

$$\psi_M=ky\sin\varphi_M+kx\cos\varphi_M。\tag{8}$$

另外，从激光加速的观点来看，我们只要考虑光电场在x方向上的投影即可，即必须在

振幅因子上乘上系数$\sin\varphi_M$。于是就可求得任一点(x, y)处偏振在x方向的叠加场强为：

$$A(x,y)=\sum_M \sin\varphi_M \cdot \frac{\sin\left(M+\frac{1}{m_0}\right)\pi}{\left(M+\frac{1}{m_0}\right)\pi} \cdot e^{ik(x\cos\varphi_M+y\sin\varphi_M)}。 \qquad (9)$$

(9)式就是我们所欲求的基本公式，式中$\cos\varphi_M$满足条件(4)。

三、调幅光栅的远场性能

设光输入函数与(1)式相同，又设光栅的调幅函数为：

$$a(x)=\begin{cases}1, & \left(nL-\frac{1}{2}d\right)<x<\left(nL+\frac{1}{2}d\right);\\ 0, & \text{其它} x \text{值},\end{cases} \qquad (10)$$

式中L为调幅周期，d为调幅宽度。

把$a(x)$进行富氏展开可求得：

$$a(x)=\sum_{m'} a_{m'} e^{2\pi i m' x/L}, \qquad (11)$$

式中

$$a_{m'}=\frac{d}{L}\frac{\sin\left(m'\frac{\pi d}{L}\right)}{m'\frac{\pi d}{L}}。$$

于是可求得光输出函数为：

$$A(x)=\frac{d}{L}\sum_{m'}\frac{\sin\left(m'\frac{\pi d}{L}\right)}{m'\frac{\pi d}{L}} e^{ikx\cos\varphi_{m'}}, \qquad (12)$$

式中

$$\cos\varphi_{m'}=\cos\theta+m'\frac{\lambda}{L}。 \qquad (13)$$

(13)式和(4)式是完全类似的，因此其几何意义是显而易见的。

考虑到在x方向的偏振投影后，就可求出任意一点(x, y)处的叠加场强为：

$$A(x, y)=\frac{d}{L}\sum_{m'}\sin\varphi_{m'}\frac{\sin\left(m'\frac{\pi d}{L}\right)}{m'\frac{\pi d}{L}} e^{ik(x\cos\varphi_{m'}+y\sin\varphi_{m'})}。 \qquad (14)$$

公式(14)描述了调幅光栅的远场性能。同理，当$\varphi_{m'}=0$或π时为表面波，对远场无贡献，并且由于它在x轴的偏振投影为零，既使是在光栅表面附近，对电子加速也无作用，因而只有满足$|\cos\varphi_{m'}|<1$的为数不多的几个m'的衍射波对远场和加速电子有作用。

四、激光加速问题

现在，我们应用(9)式和(14)式讨论激光加速问题。考虑到光振幅随时间的变化，我们有：

$$A(x,y,t)=A(x,y)e^{-i\omega t+\alpha}, \tag{15}$$

式中α是初始相位，恒为常数。另方面，设相对论电子在距光栅表面 y_0 远处的x方向上运动，其从$x=0$处运动到x点的时间为：

$$t=\int_0^x \frac{dx}{V}\doteq\frac{x}{C\beta},\quad \beta=\frac{V}{C}, \tag{16}$$

式中V为电子速度，C为光速。于是，(11)式变为：

$$A(x,y_0,t)=A(x,y_0)e^{-ik\beta^{-1}x+\alpha}。 \tag{17}$$

把(9)式和(14)式中的$A(x, y)$分别代入上式，就可以得到调相情况下相对论电子在加速轴上各x点所感受到的电场为：

$$A_p(x,\ y_0,\ t)=\sum_M \sin\varphi_M\cdot\frac{\sin\left(M+\frac{1}{m_0}\right)\pi}{\left(M+\frac{1}{m_0}\right)\pi}\cdot e_W^{ik[x(\cos\varphi_M-\beta^{-1})+y_0\sin\varphi_M+\frac{\alpha}{k}]}, \tag{18}$$

以及调幅情况下的电场为：

$$A_a(x,\ y_0,\ t)=\sum_{m'}\sin\varphi_{m'}\frac{\sin\left(m'\frac{\pi d}{L}\right)}{m'\frac{\pi d}{L}}\cdot e^{ik[x(\cos\varphi_{m'}-\beta^{-1})-y_0\sin\varphi_{m'}+\frac{\alpha}{k}]}。 \tag{19}$$

由(18)和(19)两式可知：由于$\beta^{-1}>1>|\cos\varphi_M|$及$\beta^{-1}>1>|\cos\varphi_{m'}|$，因此$(\cos\varphi_M-\beta^{-1})$和$(\cos\varphi_{m'}-\beta^{-1})$都不为零，即无“直流分量”可供持续加速。另方面，由于满足条件$|\cos\varphi_M|<1$和$|\cos\varphi_{m'}|<1$的M和m'的数值，仅有有限几个，因此我们总是可以找到某个固定长度l_p和l_a，使它们满足关系式：

$$\begin{cases} l_p(\beta^{-1}-\cos\varphi_M)=N\lambda, \\ l_a(\beta^{-1}-\cos\varphi_{m'})=N'\lambda。\end{cases} \tag{20}$$

式中N和N'都是整数。显然，这是一个求最小公倍数的算术问题。例如，对$\cos\theta+\frac{\lambda}{m_0 d}=1$，$d=2\lambda$时，可求得$l_p=2\lambda$。

最后，把(20)式代入(18)和(19)两式并从0到l_p和l_a分别进行积分后，就可得到下列关系式：

$$\begin{cases} \int_0^{l_p} A_p(x,y_0,t)dx=0, \\ \int_0^{l_a} A_a(x,y_0,t)dx=0。\end{cases} \tag{21}$$

这就意味着，利用调相光栅和调幅光栅的远场性能进行激光加速，不可能获得有意义的加速能力。

我们还必须指出：利用上述分析方法，对于更复杂的调幅—调相光栅的远场性能，亦可推导出类似(9)式或(14)式的表达式，并且同样可以证明：利用这种光栅的远场性能，也不可能获得有意义的加速能力。

本文是作者与彭桓武先生等就激光加速问题进行两次讨论的基础上写成的，文中的谐波分析方法，是在高能所庄杰佳同志写的一篇未发表的短文启发下写成的，作者在此致以谢意。另外，感谢梁浩明同志对本工作所进行的多次有益讨论。

附录：（6）式推导

把（2）式中的调相函数作富氏展开：

$$\Phi(x)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\Phi_m e^{2\pi imx/L},\tag{1'}$$

式中

$$\Phi_m=\int_0^1\Phi(\xi)e^{-2\pi im\xi}d\xi,\ \ \xi=x/L\tag{2'}$$

把（2）式中的$\Phi(x)$代入(2′)式可得：

$$\begin{aligned}\Phi_m&=\sum_{n=0}^{m_0-1}\int_{(n-\frac{1}{2})\frac{d}{L}}^{(n+\frac{1}{2})\frac{d}{L}}e^{2\pi i(\frac{n}{m_0}-m\xi)}\,d\xi\\&=\sum_{n=0}^{m_0-1}e^{-2\pi i(m-1)\frac{n}{m_0}}\cdot\int_{-\frac{1}{2}m_0}^{\frac{1}{2}m_0}e^{-2\pi i\eta m}d\eta\end{aligned}\tag{3'}$$

式中$\eta=\xi-n/m_0$，$m_0=L/d$。

注意到

$$\sum_{n=0}^{m_0-1}e^{-2\pi i(m-1)n/m_0}=\begin{cases}m_0, & \text{当}\dfrac{m-1}{m_0}=\text{整数时；}\\ 0, & \text{当}\dfrac{m-1}{m_0}\neq\text{整数时。}\end{cases}$$

因此，完成(3′)式的积分后可得：

$$\Phi_m=\frac{\sin(q+\frac{1}{m_0})\pi}{\pi(q+\frac{1}{m_0})},\quad q=\frac{m-1}{m_0}=\text{整数},\tag{4'}$$

把(4′)式和$m=m_0q+1$代入(1′)式就可得(6)式。

参 考 文 献

[1] K.Shimode; Appl.OPt., 1962, 1, 33.
[2] Y.Takeda, I.Matsui; Nucl. Instrum.Methods., 1968, 62, 306.
[3] K.Mizuno, et al.; Nature, 1975, 253, 184.
[4] P.Csonka; Particle Accelerators, 1973, 5, 129.
[5] P.Csonka; Particle Accelerators, 1975, 7, 9.
[6] F.Rcarlat, M.Argesanu; IEEE, Trans.Nucl.Science, 1977, NS—24, 3, 1651.
[7] 彭桓武、庄杰佳；中国科学, 1979, 10, 953.