

捷联式姿态计算中的误差与四元数的优化

肖尚彬 袁建平

(西北工业大学)

摘要 本文综述了捷联式姿态计算中四元数速率方程的积分过程出现的几种主要误差,特别是漂移误差与比例误差。并从减小或消除这些误差的角度上讨论了使四元数最优化的方法。最后讨论了交换误差,即由有限转动的不可交换性引起的,出现在速率信号提取过程中的误差。特别是定义了最终姿态改变的特征参数,得出了最终姿态改变的计算公式,所提方法和公式可方便地用于交换误差的估算。

一 前 言

捷联式惯导系统空间飞行器的姿态是沿飞行器体坐标系(固联坐标系)直接测定的,然而,通常希望相对各种不同坐标系(参考坐标系)确定飞行器的姿态。因此,需要将姿态信息从固联坐标系转换至所希望的参考坐标系,这就是所谓姿态计算。捷联式惯导系统不依赖外界信号,要求严格,系统结构复杂,在姿态计算中会有不少干扰误差出现,结果使系统无法保持一个良好的惯性基准。因此,进行系统的误差分析与估算是系统设计的一个重要环节。有些系统除了对总系统误差有限制外,还专门对姿态计算部分的误差有要求。如SIL3系统要求软件所产生的误差不超过总系统误差的10%。

误差分析的方法取决于系统描述参数及对系统的精度要求。姿态描述法一般有:方向余弦法、欧拉角法、欧拉参数法、四元数法、凯里-克萊因参数法、矢量表示法等。四元数法较之其他方法具有许多优越性,方程不退化,计算时间少,截短误差小,且四元数算法还允许姿态变换矩阵的修正速度与导航计算速度不同,因而四元数方法应用日益广泛。本文用四元数方法对导航姿态变换的关键性计算—速率方程的积分中所出现的主要误差进行分析。

捷联式惯导系统的姿态计算,最终是要求得一个在任意时刻由参考坐标系到固联坐标系的变换阵。即给定初始四元数 Λ_0 ,并由传感器直接从固联坐标系测得角速度 w ,通过积分下列方程

$$\dot{\Lambda} = \frac{1}{2} \Lambda w \quad (1)$$

以求得变换矩阵。上式即四元数速率方程,或称姿态运动方程, Λ 表示四元数。由于各方面的原因,比如,有限转动的不可交换性,数值积分,各种参量的舍入及量化等,所得到的变换矩阵会带有误差。假定有三个分别对准参考坐标系各轴的单位矢量,经带有误差的矩阵变换后,不再能准确地对准固联坐标系的对应轴,出现下列几类误差:

1. 比例误差:被转换的单位矢量幅值不等于1时出现的误差;
2. 偏斜误差:被转换的一套坐标系各轴之间不正交时出现的误差;
3. 漂移误差:被转换的一套坐标系整个地偏离理想坐标系时所出现的误差。

由于四元数本身的固有特性,在计算变换矩阵时将不会出现偏斜误差,而比例误差与漂

移误差总是难免的，它们分别相当于平台式惯导系统中的加速度表刻度因子误差与陀螺漂移误差。但是诸如积分步长、计算机字长、所用算法的阶数等条件相同时，四元数算法中出现的这两种误差要比用其他方法时产生的误差小得多。

最后，我们还将研究一种交换误差，即由有限转动的不可交换性引起的，出现在速率信号提取过程中的误差。并用四元数法对交换误差进行估算。

二 比例误差与四元数的幅值最优化

1. 规范化方法

假定由方程(1)积分后得到的四元数具有下列形式：

$$\Lambda^* = \lambda_0^* + \lambda_1^* \mathbf{i} + \lambda_2^* \mathbf{j} + \lambda_3^* \mathbf{k}$$

比例误差定义为

$$\Phi(\Lambda^*) = \sum_{i=0}^3 (\lambda_i^*)^2 - 1 \quad (2)$$

比例误差的消除是很简单的，通常利用下式：

$$\lambda_j = \frac{\lambda_j^*}{\left[\sum_{i=0}^3 (\lambda_i^*)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (j = 0, 1, 2, 3) \quad (3)$$

式中 $\Lambda = \lambda_0 \mathbf{i} + \lambda_1 \mathbf{j} + \lambda_2 \mathbf{k}$ 即为规范化四元数，显然有

$$\Phi(\Lambda) = \sum_{i=0}^3 \lambda_i^2 - 1 = 0 \quad (4)$$

自然会提出这样的问题，采用式(3)是否最好的规范化方法？亦即，是否还能用其他规范化方法得到四元数 Λ' 与 Λ^* 之差小于 Λ 与 Λ^* 之差？下面我们将证明，用式(3)进行规范化是一种平方极小意义上的最优方法。

问题归结为在约束条件(4)下求所谓距离函数

$$D^2 = \sum_{i=0}^3 (\lambda_i^* - \lambda_i)^2$$

最小值的问题。应用拉格朗日乘法，令

$$G = D^2 + K\Phi(\Lambda) \quad (5)$$

现在来求函数 G 的无约束极值。由

$$\frac{\partial G}{\partial \lambda_i} = -2(\lambda_i^* - \lambda_i) + 2K\lambda_i = 0$$

$$\text{得 } \lambda_i = \lambda_i^* / (1 + K) \quad (6)$$

将式(6)代入式(4)，有

$$\sum_{i=0}^3 \lambda_i^2 - 1 = \sum_{i=0}^3 [\lambda_i^* / (1 + K)]^2 - 1 = 0$$

$$\text{即 } \frac{1}{1 + K} = \pm \frac{1}{\left[\sum_{i=0}^3 (\lambda_i^*)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (7)$$

将式(7)代入式(6)，便得

$$\lambda_i = \pm \frac{\lambda_i^*}{\left[\sum_{j=0}^3 (\lambda_j^*)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (8)$$

式中±号表示：取“—”号使 D^2 为极大，取“+”号使 D^2 为极小。由此可见，用式(3)进行四元数的规范化是最优的。

几何意义可以说明如下(图1)：四元数 Λ 与 Λ^* 是共线的，前者端点在单位球面 Π 上，而 Λ^* 的端点按 $\Phi(\Lambda^*)$ 的正负，可能在单位球面 Π 之外或之内。这里，最优的意义是指，保持“方向”不变的规范化为最优。因为根据 D 的定义，对任一规范化后的四元数 Λ' ，只有当它与 Λ^* 共线(即为 Λ)时， D 达到最小，且不会引起新的偏斜(即 δ 为零)。所以通常在进行方程(1)的数值积分时，要用式(3)进行规范化。

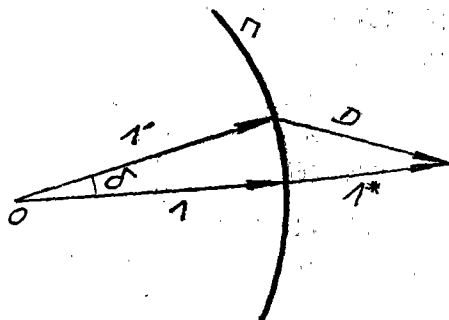


图 1

2. 误差补偿法

消除比例误差的另一种方法是误差补偿。在积分方程(1)的同时，考虑约束(4)。引进乘子 K ，可将方程(1)改写为下列形式：

$$\dot{\Lambda} = \frac{1}{2} (\Lambda w + \frac{1}{2} K \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \Lambda}) \quad (9)$$

或写为矩阵—向量形式：

$$2 \begin{pmatrix} \dot{\lambda}_0 \\ \dot{\lambda}_1 \\ \dot{\lambda}_2 \\ \dot{\lambda}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_0 - \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 & & & \\ \lambda_1 & \lambda_0 - \lambda_3 & \lambda_2 & \\ \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_0 - \lambda_1 & \\ \lambda_3 - \lambda_2 & \lambda_1 - \lambda_0 & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K \Phi \\ \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \quad (10)$$

利用式(10)进行积分可以达到自动修正的目的，即在使用迭代法进行数值积分时，利用前一步的误差信号 Φ 来修正。显然，如果没有误差时，修正项即自动消失。事实上，将式(3)代入式(1)，并设 $\lambda^* = \left[\sum_{i=0}^3 (\lambda_i^*)^2 \right]^{1/2}$ 是 Λ^* 的模，则由(1)有

$$\dot{\Lambda}^* = \frac{1}{2} \Lambda^* w + \frac{\dot{\lambda}^*}{\lambda^*} \Lambda^* \quad (11)$$

令 $\dot{\lambda}^*/\lambda^* = f(t)$ ，则上式变为

$$\dot{\Lambda}^* = \frac{1}{2} \Lambda^* w + f(t) \Lambda^* \quad (12)$$

这就是误差四元数应满足的微分方程。

显然，如果方程(12)的解是规范化四元数，则(12)与(1)等价。因此，不论 λ^* 的数值及其变化特性如何，作为这些方程的解的四元数 Λ 与 Λ^* ，都可描述坐标系的同一运动，即给出同样的变换，而对函数 $f(t)$ 的形式不加任何限制。

既然 $f(t)$ 的形式没有限制，我们可以用它来控制 λ^* 的变化，使 $\lambda^* = 1$ 的点成为下列方程的渐近稳定平衡位置：

$$\dot{\lambda}^* = f(t) \lambda^* \quad (13)$$

比如, 我们取:

$$f(t) = \frac{1}{2}K\Phi \quad (14)$$

则方程 (12) 便与 (10) 具有完全相同的形式。此时, (13) 可以被积分出。事实上, 将 (14) 代入 (13) 后变成

$$\dot{\lambda}^* = \frac{1}{2}K[(\lambda^*)^2 - 1]\lambda^* \quad (15)$$

积分之, 并经过简单运算后得

$$\lambda^* = (1 - Ce^{Kt})^{-\frac{1}{2}} \quad (16)$$

式中, 积分常数 C 可以这样求得: 当 $t_0 = 0$ 时

$$\lambda^*(t_0) = (1 - C)^{-\frac{1}{2}}$$

由此解出

$$C = \frac{[\lambda^*(t_0)]^2 - 1}{[\lambda^*(t_0)]^2} \quad (17)$$

其中 $\lambda^*(t_0)$ 应理解为每次迭代时的初始值, 亦即左区间端点的值。因而, 将式 (17) 代入 (16), 有

$$\lambda^*(t) = \left\{ 1 - \frac{[\lambda^*(t_0)]^2 - 1}{[\lambda^*(t_0)]^2} e^{Kt} \right\}^{-\frac{1}{2}} \quad (18)$$

可见, 只要 $K < 0$, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $\lambda^*(t) \rightarrow 1$, 这就保证了四元数幅值的自动修正。

三 偏斜误差的分析

同前面一样, 假定方程 (1) 积分后的四元数为

$$\Lambda^* = \lambda_0^* + \lambda_1^*i + \lambda_2^*j + \lambda_3^*k$$

偏斜误差定义为被转换后的一套坐标系各轴之间交角与 $\pi/2$ 相差的角度。这个差值可用各轴向单位矢量之间的点积表示为

$$e_i = \arcsin(b_{1j}b_{1k} + b_{2j}b_{2k} + b_{3j}b_{3k}) \quad (i = 1, 2, 3; j \neq k) \quad (19)$$

一般偏离角很小, 可以近似地表示为

$$e_i = b_{1j}b_{1k} + b_{2j}b_{2k} + b_{3j}b_{3k} \quad (i = 1, 2, 3; j \neq k) \quad (20)$$

令 R_x, R_y, R_z 为参考坐标系中各正交轴的单位矢量; R_{B1}, R_{B2}, R_{B3} 为经四元数 Λ^* 变换后的矢量, 分别为

$$R_x = [1, 0, 0]^T, \quad R_y = [0, 1, 0]^T, \quad R_z = [0, 0, 1]^T;$$

$$R_{B1} = [b_{11}, b_{21}, b_{31}]^T, \quad R_{B2} = [b_{12}, b_{22}, b_{32}]^T, \quad R_{B3} = [b_{13}, b_{23}, b_{33}]^T$$

对比四元数形式的变换矩阵, 并省略 * 号, 不难得到

$$R_{B1} = \begin{pmatrix} \lambda_0^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2 \\ 2(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_0\lambda_3) \\ 2(\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2) \end{pmatrix}, \quad R_{B2} = \begin{pmatrix} 2(\lambda_1\lambda_2 - \lambda_0\lambda_3) \\ \lambda_0^2 - \lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \lambda_3^2 \\ 2(\lambda_2\lambda_3 + \lambda_0\lambda_1) \end{pmatrix},$$

$$R_{B3} = \begin{pmatrix} 2(\lambda_1\lambda_3 + \lambda_0\lambda_2) \\ 2(\lambda_2\lambda_3 - \lambda_0\lambda_1) \\ \lambda_0^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \end{pmatrix}$$

利用式 (20), 便可求得

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 = \mathbf{R}_{B1} \cdot \mathbf{R}_{B2} &= 2(\lambda_0^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2)(\lambda_1\lambda_2 - \lambda_0\lambda_3) \\ &\quad + 2(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_0\lambda_3)(\lambda_0^2 - \lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \lambda_3^2) \\ &\quad + 4(\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2)(\lambda_2\lambda_3 + \lambda_0\lambda_1) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (21)$$

同样可得

$$\varepsilon_2 = 0, \quad \varepsilon_3 = 0 \quad (22)$$

由此可见, 由于四元数的固有特性, 在计算变换矩阵时, 被变换的各轴仍然彼此正交, 即不会出现偏斜误差。因而在偏斜误差方面, 对于任何四元数变换都是最优的。

四 漂移误差与最优四元数的构造

漂移误差较难处理的问题是, 在进行定量研究时需要有一个基准(理想坐标系或理想四元数), 而实际上这样的基准无法得到。象在平台系统中陀螺漂移不可避免一样, 捷联系统中的坐标漂移只能限制或减小, 而无法消除。因而在实用中人们采用不同的方法对漂移误差进行补偿或修正, 以将其控制在许可范围之内。比如, SIL3系统是在进行地面模拟实验时获得必要的的数据, 然后在系统工作时利用计算机贮存的模型定期进行误差补偿。还可利用所谓“观测向量”(例如恒星方位)作为基准进行修正。下面介绍一种可用于宇宙飞船导航的利用观测向量构造最优四元数的方法, 此处的最优指漂移误差最小。

1. 问题的四元数表述

设 $\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2, \dots, \mathbf{W}_n$ —— n 个观测(单位)向量, 例如在固联坐标系中测得的地球、太阳或某一恒星的方位;

$\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \dots, \mathbf{V}_n$ —— n 个参考(单位)向量, 如上同一些向量在参考坐标系或惯性坐标系中的反映;

a_1, a_2, \dots, a_n —— n 个正的常数。

我们对任意旋转矩阵 R , 定义亏函数 $L(R)$ 为

$$L(R) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i |\mathbf{W}_i - R\mathbf{V}_i|^2 \quad (23)$$

使亏函数取极小值的矩阵 R 叫最优转动(从平方极小的意义上讲), 记为 $R_{\text{最优}}$, 它将 \mathbf{V}_i 尽可能精确地转为 \mathbf{W}_i 。由于亏函数可以按比例改变而不影响 $R_{\text{最优}}$ 的确定, 故可取

$$\sum_{i=1}^n a_i = 1 \quad (24)$$

并令

$$G(R) = 1 - L(R) \quad (25)$$

式中 $G(R)$ 为增益函数:

$$G(R) = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{W}_i \cdot (R\mathbf{V}_i) = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{W}_i^T (R\mathbf{V}_i) \quad (26)$$

显然, 并且仅当 $G(R)$ 取极大值时, $L(R)$ 取极小值。注意到式 (26) 右端的 n 项中每一项均可看成 1×1 矩阵, 因而有

$$G(R) = \sum_{i=1}^n a_i \text{tr}[\mathbf{W}_i^T R\mathbf{V}_i] = \text{tr}[\mathbf{R}\mathbf{B}^T] \quad (27)$$

其中 $B = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{W}_i \mathbf{V}_i^T$ 。上式的推导中用到了：将出现在乘积中矩阵的次序循环置换，矩阵积的迹不变。

由于 R 的九个元素受到六个非线性约束的限制，使得 $G(R)$ 的求极值问题复杂化了，因而我们改用四元数讨论。首先用四元数重新表示出增益函数。仍分别用 λ, λ_0 表示四元数 Λ 的模和标量部分，用 λ 表示其矢量部分，并定义一个反对称矩阵：

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda_3 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & 0 & -\lambda_1 \\ -\lambda_2 & \lambda_1 & 0 \end{pmatrix}$$

变换矩阵 R 便可表示为

$$R(\Lambda) = (\lambda_0^2 - \lambda \cdot \lambda)I + 2\lambda\lambda^T - 2\lambda_0 Q \quad (28)$$

于是

$$G(\Lambda) = G(R) = (\lambda_0^2 - \lambda \cdot \lambda) \text{tr} B^T + 2 \text{tr} [\lambda \lambda^T B^T] - 2\lambda_0 \text{tr} [QB^T] \quad (29)$$

为运算方便起见，定义：

$$\text{标量: } \sigma = \text{tr} B = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{W}_i \cdot \mathbf{V}_i$$

$$\text{矩阵: } S = B + B^T = \sum_{i=1}^n a_i [\mathbf{W}_i \mathbf{V}_i^T + \mathbf{V}_i \mathbf{W}_i^T] \quad (30)$$

$$\text{向量: } \mathbf{Z} = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{W}_i \times \mathbf{V}_i$$

则式 (29) 可写为

$$\begin{aligned} G(\Lambda) &= \sigma(\lambda_0^2 - \lambda \cdot \lambda) + \text{tr} [\lambda^T S \lambda] + 2\lambda_0 \lambda \cdot \mathbf{Z} \\ &= \sigma(\lambda_0^2 - \lambda \cdot \lambda) + \lambda^T S \lambda + 2\lambda_0 \lambda \cdot \mathbf{Z} \end{aligned} \quad (31)$$

或

$$G(\Lambda) = [\lambda_0 \lambda^T] E \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda \end{bmatrix} \quad (32)$$

其中

$$E = \begin{bmatrix} \sigma & \mathbf{Z}^T \\ \mathbf{Z} & S - \sigma I \end{bmatrix} \quad (33)$$

求转动的最优估算问题于是被简化成求使式 (32) 的双线性型满足约束条件 (4) 的极大值 $\Lambda_{\text{最优}}$ 问题，而 $R_{\text{最优}}$ 由式 (28) 求得。引进拉格朗日乘子 K ，考虑函数

$$G^*(\Lambda) = G(\Lambda) - K \Lambda^T \Lambda$$

的无约束极大值。对 $G^*(\Lambda)$ 直接求导，令其等于零，有

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\Lambda} [G^*(\Lambda)] &= \frac{d}{d\Lambda} G(\Lambda) - K \Lambda - K \Lambda^T \\ &= (E - KI) \Lambda + \Lambda^T (E^T - KI) = 0 \end{aligned}$$

由于 Λ 是任意的，故有

$$(E - KI) \Lambda = 0$$

即

$$E \Lambda = K \Lambda \quad (34)$$

当满足上述条件时， $G^*(\Lambda)$ 便获得稳定值。由此可见， $\Lambda_{\text{最优}}$ 必定是 E 的一个特征向量，

而与式(34)和 Λ 是否规范化无关。因此, 尽管 K 必定是 E 的一个特征值, $\lambda = 1$ 并不能确定 K , 但是, 对 E 的四个特征向量的每一个来说, 都有

$$G(\Lambda) = \Lambda^T E \Lambda = \Lambda^T K \Lambda = K \quad (35)$$

可见, 如果选取 $\Lambda_{\text{最优}}$ 为属于 E 的最大特征值的特征向量, $G(\Lambda)$ 将达到极大, 因此我们记为

$$E \Lambda_{\text{最优}} = K_{\text{极大}} \Lambda_{\text{最优}} \quad (36)$$

只要存在两个独立的观测, 方程(36)就有唯一解。这一点可从向量 $\sum_{i,j=1}^n a_i a_j \mathbf{W}_i \times \mathbf{W}_j$ 非零的条件来说明。这个向量的幅值越大, 所确定的姿态精度就越高。

2. 最优四元数 $\Lambda_{\text{最优}}$ 的构造

解的性质: 方程(34)可以重新表示为

$$\begin{bmatrix} \sigma & \mathbf{Z}^T \\ \mathbf{Z} & S - 6I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda \end{bmatrix}$$

展开即

$$\left. \begin{aligned} \sigma \lambda_0 + \mathbf{Z}^T \lambda &= K \lambda_0 \\ \mathbf{Z} \lambda_0 + (S - 6I) \lambda &= K \lambda \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

或

$$\left. \begin{aligned} K &= \sigma + \mathbf{Z}^T \frac{\lambda}{\lambda_0} = \sigma + \mathbf{Z}^T \mathbf{Y} \\ \mathbf{Y} &= [(K + \sigma)I - S]^{-1} \mathbf{Z} \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

式中

$$\mathbf{Y} = \frac{\lambda}{\lambda_0} = \mathbf{X} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$$

\mathbf{X} 是沿转轴的矢量, θ 是绕 \mathbf{X} 的转角, 它们与四元数的关系为

$$\Lambda = \frac{1}{\sqrt{1 + |\mathbf{Y}|^2}} \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{Y} \end{bmatrix} \quad (39)$$

当 $K = K_{\text{极大}}$ 时, \mathbf{Y} 及 Λ 对应地为最优转动, 而一旦已知 $K_{\text{极大}}$, 则 $\Lambda_{\text{最优}}$ 立即由式(38), (39)求出。(38)的两个式子可以合并为一个等式:

$$K = \sigma + \mathbf{Z}^T [(K + \sigma)I - S]^{-1} \mathbf{Z} \quad (40)$$

上式等价于与 E 的四个特征值对应的特征方程。

由式(23), (26), (35), (36)可得

$$K = 1 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i |\mathbf{W}_i - R \mathbf{V}_i|^2 \quad (41)$$

可以看出, E 的所有特征值均小于1; 当 R 为 $R_{\text{最优}}$ 时, K 即为 $K_{\text{极大}}$ 且接近于1; 如果转动 R 是完全精确的, 则 $K_{\text{极大}}$ 等于1。因此, 一般地 $K_{\text{极大}}$ 与1的偏差是很小的。

必须注意, 由(38)可见, 如果矩阵 $[(K + \sigma)I - S]$ 是奇异的, 向量 \mathbf{Y} 将无法确定, 以上讨论便不再适用。

更精确的表示: 现在讨论一种不用首先计算 \mathbf{Y} 就可以构造出 $\Lambda_{\text{最优}}$ 的方法。这个方法的根据是凯里—哈密顿理论: 任一方阵满足它自身的特征方程。

任一 3×3 矩阵 M 的特征值 ξ 满足:

$$M - \xi I = 0$$

或

$$-\xi^3 + 2n\xi^2 - k\xi + \Delta = 0$$

其中

$$n = \frac{1}{2} \text{tr} M, \quad k = \text{tr}(\text{adj} M), \quad \Delta = \det M.$$

根据凯里—哈密顿理论, M 满足:

$$M^3 = 2nM^2 - kM + \Delta I \quad (42)$$

一般情形下, 任何一个 M 的分析或旋转矩阵函数, 至少从形式上可以展开为

$$f(M) = b_0 I + \sum_{k=1}^n b_k M^k$$

重复使用(42), 上式总可以简化成 M 的二次式。特别地有

$$[(\omega + n)I - M]^{-1} = \gamma^{-1}(\alpha I + \beta M + M^2) \quad (43)$$

α, β, γ 可以在上式两边乘以 $[(\omega + n)I - M]$ 来确定。注意到 I, M, M^2 线性无关, 则有

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \omega^2 - n^2 + k \\ \beta &= \omega - n \\ \gamma &= (\omega + n)(\omega^2 - n^2 + k) - \Delta \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

取 $\omega = K_{\text{极大}}, M = S$, 将式(43)代入(38), 得

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}/\gamma, \quad \mathbf{X} = (\alpha I + \beta S + S^2)\mathbf{Z} \quad (45)$$

式中 \mathbf{X} 是非规范化的最优转轴, 由上式得

$$\wedge_{\text{最优}} = \frac{1}{\sqrt{\gamma^2 + |\mathbf{X}|^2}} \begin{bmatrix} \gamma \\ \mathbf{X} \end{bmatrix} \quad (46)$$

因上式分母绝不可能变为无穷大, 这就避免了前段中奇异矩阵所带来的麻烦。但若在某个瞬时 $(\gamma^2 + |\mathbf{X}|^2)$ 变为零, 则式(46)也将无法确定。通过讨论可知, 当且仅当转角为 π 及转轴 \mathbf{n}

为 $S_0 = 2 \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{V}_i \mathbf{V}_i^T$ 的特征向量时, $(\gamma^2 + |\mathbf{X}|^2)$ 才为零。

应该指出, 当 $(\gamma^2 + |\mathbf{X}|^2)$ 不为零时, 由于截短误差, 在计算 γ 和 $|\mathbf{X}|$ 时仍然存在着误差。

将式(43)代入(40), 并以 K 代替 ω , 便可导出 K 特征方程的一个简单表达式:

$$K^4 - (a+b)K^2 - CK + (ab + cn - d) = 0 \quad (47)$$

其中

$$a = n^2 - k, \quad b = n^2 + \mathbf{Z}^T \mathbf{Z}, \quad c = \Delta + \mathbf{Z}^T M \mathbf{Z}, \quad d = \mathbf{Z}^T M^2 \mathbf{Z}.$$

由于已知 $K_{\text{极大}}$ 十分接近于 1, 在使用(47)时, 以 1 作为初始值进行迭代将是相当迅速的。

3. 顺次转动法

当转角接近于 π 时, 可用另一种方法进一步改善精度。如果转角大于 $\pi/2$, 转动可以表为绕一个坐标轴转 π , 再绕某一新轴转小于 $\pi/2$ 。第一次转动等价于改变每个参考向量中两个分量的符号。将这样得到的新参考向量 \mathbf{V}_i' 变为观测向量 \mathbf{W}_i 的最优转动四元数: $P = p_0 + \mathbf{p}$, 它可以十分简单地与所要求的总转动最优四元数 $\wedge = \lambda_0 + \boldsymbol{\lambda}$ 联系起来。比如, 绕轴 \mathcal{Y} 转 π :

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_i' &= [-V_{i3}, V_{i4}, -V_{i2}]^T \\ \lambda_0 &= p_3, \quad \lambda_1 = -p_2, \quad \lambda_2 = p_1, \quad \lambda_3 = -p_0 \end{aligned}$$

尽管 $(\gamma^2 + |\mathbf{X}|^2)$ 可能不是很小,但若 $|\gamma|$ 很小,由式(46)计算出来的 $\Lambda_{\text{最优}}$ 将不是很精确的。

五 交换误差及其估算方法

交换误差起因于有限转动的不可交换性,它是影响捷联式姿态控制系统精度的重要因素。*J. S. Beggs*用欧拉参数法证明了如下的有限转动定理:“设刚体绕过定点的相交轴作连续的有限转动,其合成转动的数值与各个连续转动的次序无关;但刚体的最终姿态则与连续转动的次序有关,合成转动的转轴位置随连续转动的次序而改变。”但证法很烦,没有定量分析。这里我们用四元数法来研究。

为了用数值计算机积分四元数速率方程

$$\dot{\Lambda} = \frac{1}{2} \Lambda \omega \quad (48)$$

必须对陀螺进行定期采样,以获得被积角速度增量。但由于卫星的姿态依赖于绕其轴的角速度变化的时间次序,除非 ω 的方向不变或采样时间间隔趋近于零,被积角速度增量不能代表卫星的真实运动,因而出现了交换误差。这种误差只可能减小,但不能消除。特别对于周期性或重复性输入,会引起转换矩阵的检波漂移误差。

减小交换误差的一个重要途径是提高采样频率,亦即使采样时间间隔尽可能地缩小,但这就要求增加计算机速度,因而采用软件简单、计算时间少、积分能作为独立环节处理的姿态描述参数是有效的。这一点正是四元数优于其它参数之处。另一途径是改进采样方法,比如采用高阶函数对积累角度增量进行曲线拟合,取函数在适当点的导数;或者根据飞行要求与实验数据建立角速度模型,再确定采样方法。

下面我们提出两种交换误差的四元数算法。

1. 四元数矢量式算法

设将两个连续转动 θ_1, θ_2 (代表两个姿态偏差角)表示为四元数:

$$P = p_0 + \mathbf{p}, \quad Q = q_0 + \mathbf{q} \quad (49)$$

其顺乘四元数表示顺序合成转动 θ :

$$\Lambda = PQ = p_0 q_0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} + p_0 \mathbf{q} + q_0 \mathbf{p} + \mathbf{p} \times \mathbf{q} \quad (50)$$

其逆乘四元数表示逆序合成转动 θ' :

$$\Lambda' = QP = q_0 p_0 - \mathbf{q} \cdot \mathbf{p} + q_0 \mathbf{p} + p_0 \mathbf{q} + \mathbf{q} \times \mathbf{p} \quad (51)$$

两个合成转动的数值由乘积的标量部分确定:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_0 &= \cos \frac{\theta}{2} = p_0 q_0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} \\ \lambda_0' &= \cos \frac{\theta'}{2} = q_0 p_0 - \mathbf{q} \cdot \mathbf{p} \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

由于标乘的次序可以颠倒,上两式的数值相等,即有

$$\lambda_0 = \lambda_0', \quad \theta = \theta' \quad (53)$$

两个合成转动的矢量部分可表示为

$$\lambda = \mathbf{n} \sin \frac{\theta}{2}, \quad \lambda' = \mathbf{n}' \sin \frac{\theta'}{2} \quad (54)$$

于是合成转轴的方向由乘积的矢量部分确定如下:

$$\left. \begin{aligned} n &= \frac{1}{\sin\theta/2} (p_0\mathbf{q} + q_0\mathbf{p} + \mathbf{p} \times \mathbf{q}) \\ n' &= \frac{1}{\sin\theta'/2} (p_0\mathbf{q} + q_0\mathbf{p} - \mathbf{p} \times \mathbf{q}) \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

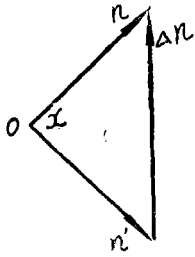


图 2

可见, $n \neq n'$, 亦即两个合成转动的轴线并不重合。

这就证明了连续转动次序不影响刚体最终转角的数值, 但却影响最终转轴的方向, 因而使最终姿态发生改变, 在姿态测量中出现交换误差。

为了定量地说明当连续转动次序改变而引起的刚体最终姿态的改变, 我们引进两个表征姿态改变的参数: 将顺序与逆序合成转轴单位矢 n, n' 之差定义为最终姿态的改变量, 用 Δn 表示; 而这两个单位矢 n, n' 之间夹角则是最终姿态的改变角, 用 α 表示 (图 2)。

最终姿态的改变量由下式确定:

$$\begin{aligned} \Delta n &= n - n' = \frac{1}{\sin\theta/2} \mathbf{p} \times \mathbf{q} - \frac{1}{\sin\theta'/2} (-\mathbf{p} \times \mathbf{q}) \\ &= \frac{2\mathbf{p} \times \mathbf{q}}{\sin\theta/2} \end{aligned} \quad (56)$$

显然, 两四元数的差值为

$$\Delta \Lambda = \sin\theta/2 \Delta n = 2\mathbf{p} \times \mathbf{q} \quad (57)$$

最终姿态的改变角则按下式计算:

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= n \cdot n' = \frac{1}{\sin^2\theta/2} (p_0\mathbf{q} + q_0\mathbf{p} + \mathbf{p} \times \mathbf{q}) \cdot (p_0\mathbf{q} + q_0\mathbf{p} - \mathbf{p} \times \mathbf{q}) \\ &= \frac{1}{\sin^2\theta/2} [(p_0\mathbf{q} + q_0\mathbf{p})^2 - (\mathbf{p} \times \mathbf{q})^2] \end{aligned} \quad (58)$$

2. 四元数矩阵式算法

设将两个连续转动四元数列矩阵表示为

$$P = [p_0, p_1, p_2, p_3]^T, \quad Q = [q_0, q_1, q_2, q_3]^T \quad (59)$$

其顺乘与逆乘四元数具有如下形式:

$$\Lambda = [\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3]^T, \quad \Lambda' = [\lambda'_0, \lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3]^T \quad (60)$$

按四元数矩阵乘法规则, 得顺序合成转动与逆序合成转动分别为

$$\Lambda = PQ = M(P)Q, \quad \Lambda' = QP = M(P)^*Q \quad (61)$$

式中四元数矩阵 $M(P)$ 及其蜕变矩阵 $M(P)^*$ 由下式确定:

$$M(P) = \begin{pmatrix} p_0 - p_1 - p_2 - p_3 \\ p_1 & p_0 - p_3 & p_2 \\ p_2 & p_3 & p_0 - p_1 \\ p_3 - p_2 & p_1 & p_0 \end{pmatrix}, \quad M(P)^* = \begin{pmatrix} p_0 - p_1 - p_2 - p_3 \\ p_1 & p_0 & p_3 - p_2 \\ p_2 - p_3 & p_0 & p_1 \\ p_3 & p_2 - p_1 & p_0 \end{pmatrix} \quad (62)$$

将式(62)代入式(61), 便得 Λ 与 Λ' , (61)中的 Q 应以(59)中第二个列矩阵代入。

从上式可以看出, 矩阵 $M(P)$ 与 $M(P)^*$ 的第一行和第一列完全一样, 改变的只是其右下角的三阶方阵。

$M(P), M(P)^*$ 的第一行分别乘以 Q , 决定合成转动四元数 Λ, Λ' 的标量部分, 它们并不改变, 即有等式

$$\lambda_0 = p_0q_0 - p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3 = \lambda_0' \quad (63)$$

于是得出两个合成转角的大小相等: $\theta = \theta'$.

合成转轴的方向决定于 $M(P)$ 与 $M(P)^*$ 右下角的三阶方阵, 显然它们是不相等的。

这里我们用四元数矩阵式算法再次证明了有限转动定理。刚体最终姿态的改变我们用两个合成转动的偏差四元数 $\Delta\Lambda = \Lambda - \Lambda'$ 表示, 按下列公式计算:

$$\Delta\Lambda = \Lambda - \Lambda' = [M(P) - M(P)^*]Q \quad (64)$$

这就是式 (57) 的矩阵写法。

3. 交换误差算例

现在我们举一个数值例题来应用上述结论。

法 1 设 i, j, k 为三个互垂单位矢, 两个连续转动为绕轴 i 转过 90° 以及绕轴 j 转过 90° , 表为四元数矢量式:

$$P = \cos 45^\circ + i \sin 45^\circ, \quad Q = \cos 45^\circ + j \sin 45^\circ$$

先计算顺乘四元数

$$\Lambda = PQ = \lambda_0 + \lambda = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(i + j + k)$$

解出

$$\theta = 120^\circ$$

以及

$$n = \frac{\sqrt{3}}{3}(i + j + k), \quad n_1 = n_2 = n_3 = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

示于图 3。

再计算逆乘四元数

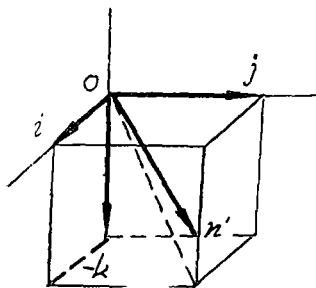


图 3

解出

$$\Lambda' = QP = \lambda_0' + \lambda' = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(i + j - k)$$

$$\theta' = 120^\circ = \theta$$

以及

$$n' = \frac{\sqrt{3}}{3}(i + j - k); \quad n_1' = n_2' = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$n_3' = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

示于图 4。

最终姿态的改变可计算如下:

$$\begin{aligned} \Delta n &= n - n' = \frac{\sqrt{3}}{3}(i + j + k) - \frac{\sqrt{3}}{3}(i + j - k) \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3}k \end{aligned}$$

即 Δn 的长度为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$, 方向平行于 k 。以及

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= n \cdot n' = \frac{\sqrt{3}}{3}(i + j + k) \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}(i + j - k) \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

于是得顺乘与逆乘两根最终转轴之间夹角为

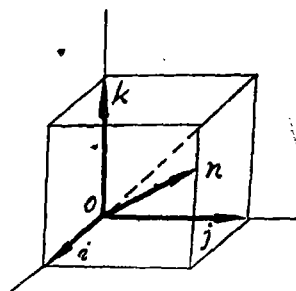


图 3

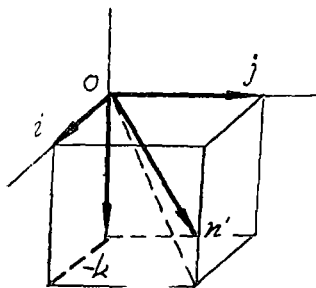


图 4

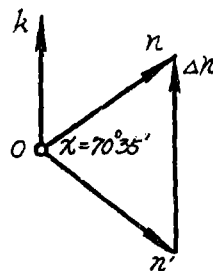


图 5

$$\alpha = 70^{\circ}35'$$

所得结果示于图 5，从中十分清晰地看出转轴的变化。

法 2 设将上述连续转动表为四元数矩阵式：

$$P = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0 \right]^T, \quad Q = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right]^T$$

顺乘四元数等于

$$\Lambda = PQ = M(P)Q = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

逆乘四元数等于

$$\Lambda' = QP = M(Q)P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

表征最终姿态改变的偏差四元数等于

$$\Delta\Lambda = \Lambda - \Lambda' = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]^T - \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right]^T \\ = [0, 0, 0, 1]^T$$

这意味着 $\Delta\Lambda$ 的标量部分为零，矢量部分的三个分量分别为 0, 0, 1。

六 结 束 语

误差的估算和消除是个相当复杂的问题。本文仅考虑了几种在四元数速率方程积分中和在速率信号提取过程中出现的主要误差，并研究了使这些误差尽可能小的最优四元数的构造问题。四元数的优化也是一个新课题，目前有关这方面的资料很少，尚待进一步研究。有关误差的计算及与方向余弦矩阵情形下的比较可参阅文献[2]。

参 考 文 献

- [1] 肖尚彬，“四元数在惯性导航中的应用”，西北工业大学，1979。
- [2] J.C.Wilcox, IEEE EAS, 1967, 3, No.5.
- [3] Itzhack Y.Bar, IEEE EAS, 1971, 7, No.2.
- [4] B.H.勃拉涅茨, И·И·什梅格列夫斯基,《四元数在刚体定位问题中的应用》，梁振和译，国防工业出版社，1977。
- [5] Malcolm D.Shuster, AIAA paper 78-1249.

- [6] G. Cattani, J. Michelin, AD AO55778.
- [7] John E. Bortz, NASA TR R-329.
- [8] A. V. Bronkhorst, AD AO55778.
- [9] 崔中兴:《捷联式惯导系统的原理与力学编排方程》, BH-182, 北京航空学院, 1980.
- [10] J. S. Beggs, «ACTA Mechanica», 1974, 20, No. 1-2.
- [11] B. P. Ickes, «AIAA Journal», 1970, 8, No. 1.