

0.5秒测角仪误差曲线的富里叶分析

王 哲 杨 牧

0.5秒测角仪光栅盘最大间隔误差是用三十六面棱体与光栅盘“全组合”测量的。用“全组合”法测得两台样机的误差数据见表1，误差曲线如图1所示。每条误差曲线可以看作是由许多不同频率的谐波综合的结果（组成误差曲线的第n次谐波是一个正弦波或余弦波）。误差曲线分析的目的就是要把误差曲线分离成不同频率的正弦波，并且求出这些正弦波的幅值，从而找到误差的分布规律，拟定消除这些误差的方法。为此我们对误差曲线作富里叶变换。图2为富里叶变换的直观说明。一个波形的富里叶变换的实质是：把这个波形分解成许多不同频率的正弦波，如果这些正弦波加起来成为原来的波形，那么，我们就确定了这个波形的富里叶变换，富里叶变换的图形表示就是一张显示每个被确定的正弦波的振幅和频率的图，在图中给出所分解的不同频率的正弦波的各自的振幅值。

富里叶变换可以分辨出或区分开组成任意波形的不同频率的正弦波和它们各自的振幅，在数学上，这种关系可以表示为：

表 1 两台样机误差数据

误差(秒)	位置												
	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°			
第一台	0.000	-0.160	-0.111	-0.049	-0.056	-0.208	-0.312	-0.368	-0.326	-0.424			
第二台	0.000	-0.132	-0.104	0.042	0.083	0.187	0.326	0.382	0.410	0.354			
	100°	110°	120°	130°	140°	150°	160°	170°	180°	190°	200°	210°	220°
	-0.479	-0.417	-0.285	-0.153	-0.111	-0.090	-0.076	-0.090	-0.125	-0.160	-0.139	-0.083	0.069
	0.278	0.181	0.181	0.077	-0.035	-0.125	-0.167	-0.090	-0.111	-0.160	-0.187	-0.028	0.056
	230°	240°	250°	260°	270°	280°	290°	300°	310°	320°	330°	340°	350°
	-0.215	-0.319	-0.382	-0.382	-0.424	-0.486	-0.437	-0.375	-0.208	-0.139	-0.104	-0.090	0.111
	0.104	0.167	0.250	0.271	0.251	0.125	0.069	0.069	-0.014	-0.104	-0.187	-0.181	0.118

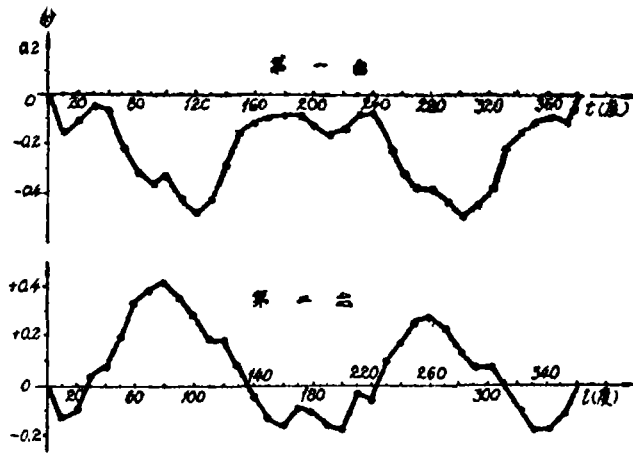


图1 两台样机误差曲线

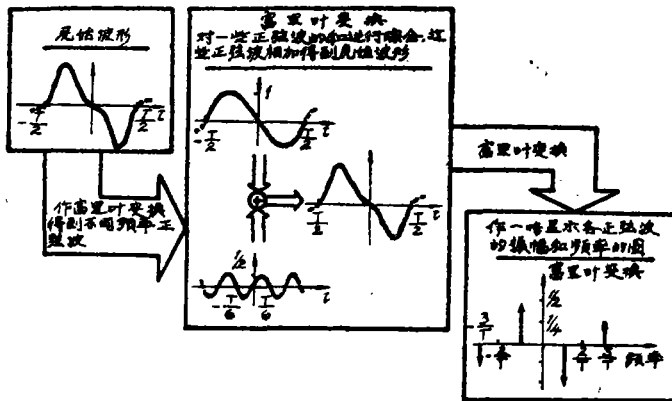


图2 富里叶变换的直观说明

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad (1)$$

式中 $S(t)$ 是被分解函数, $S(f)$ 是 $S(t)$ 的富里叶变换, $j = \sqrt{-1}$, f 为频率。

富里叶变换可以看作是时间函数在频率域上的表示, 富里叶变换频率域包含的信息和原函数所包含的信息完全相同, 不同的仅是信息的表示方法。所以富里叶变换使人们可以从另一个观点, 即变换分析的观点来研究一个函数。

在实际应用中, 公式 (1) 中的 $S(t)$ 很难用函数式具体表达出来, 例如我们所要变换的误差曲线, 由于测量点数有限, 只能给出离散的一些点, 这个用抽样点的样本值 (各点的误差测量值) 表示的误差曲线 (图 1 所示), 用函数关系就难以表达, 为了能在数字计算机上进行计算, 要适当的修改连续富里叶公式 (1), 用适合于抽样波形的离散富里叶变换:

$$G\left(\frac{n}{NT}\right) = \frac{T}{(NT)} \sum_{K=0}^{N-1} g(KT) e^{-j2\pi nK/N} \quad (2)^*$$

式中: $n = 0, 1, \dots, N-1$; $K = 0, 1, \dots, N-1$ 。 N 是误差曲线函数 $g(KT)$ 的一个周期内的样本数 (即测量点数)。 $g(KT)$ 为抽样周期函数, 在这里为用 N 个样本值 (各测量点的误差值) 表示的误差曲线, 计算时用 N 个误差值代入。 T 为抽样间隔。

* 公式推导见 E. O. 布赖姆著, 柳群译, 《快速富里叶变换》

如果 N 个样本点给出某误差曲线函数的一个周期，那么我们就可以用公式 (2) 来计算离散富里叶变换。

离散富里叶变换公式 (2) 在具体计算时可表示为：

$$G\left(\frac{n}{NT}\right) = \frac{1}{N} \left[\sum_{k=0}^{N-1} g(KT) \cos(2\pi nK/N) - j \sum_{k=0}^{N-1} g(KT) \sin(2\pi nK/N) \right] \quad (3)$$

令： $a[j] = g(KT)$

$$y = 2\pi nK/N$$

$$S_n = \sum_{k=0}^{N-1} a[j] \sin(y)$$

$$C_n = \sum_{k=0}^{N-1} a[j] \cos(y)$$

则有：

$$\begin{aligned} G\left(\frac{n}{NT}\right) &= \frac{1}{N} \left[\sum_{k=0}^{N-1} a[j] \cos(y) \right. \\ &\left. + j \sum_{k=0}^{N-1} a[j] \sin(y) \right] \quad (4) \end{aligned}$$

并令：

$$M_n = \sqrt{C_n^2 + S_n^2}$$

(各次谐波振幅的模)，

$$E = \sum M_n$$

(所有谐波振幅和)，

$$A_n = M_n / E$$

(各次谐波的相对幅值)，

$$B_n = M_n / N$$

(以秒值表示的各次谐波的振幅)。

上述公式可以编写出计算机程序，通过计算可以得到各次谐波分量的振幅值 B_n 。图 3 为两台样机误差曲线各次谐波及其振幅图，各次谐波的振幅值（已换算成秒值）见表 2。

从误差曲线分析的结果中可以看出：

1. 离散变换的结果是关于 $n = \frac{N}{2}$ 对称的，这是因为变换的实部是偶函数，而 $n > \frac{N}{2}$ 点的结果只不过是负频

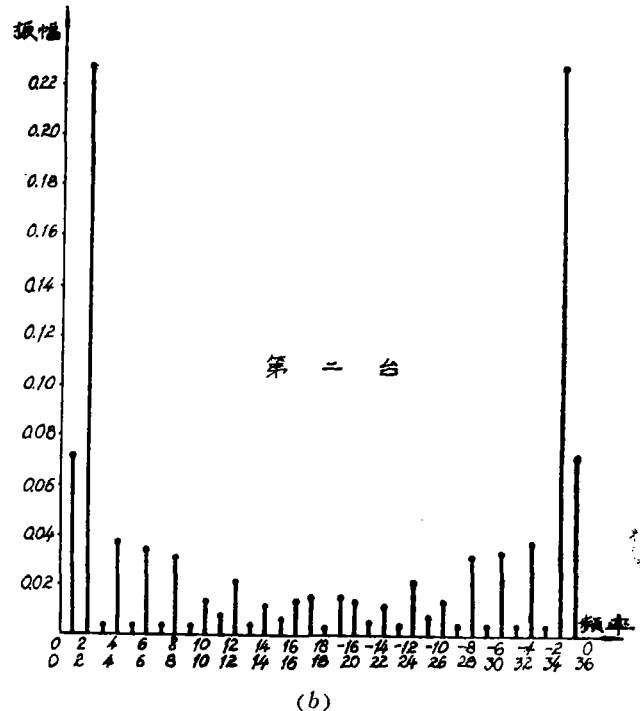
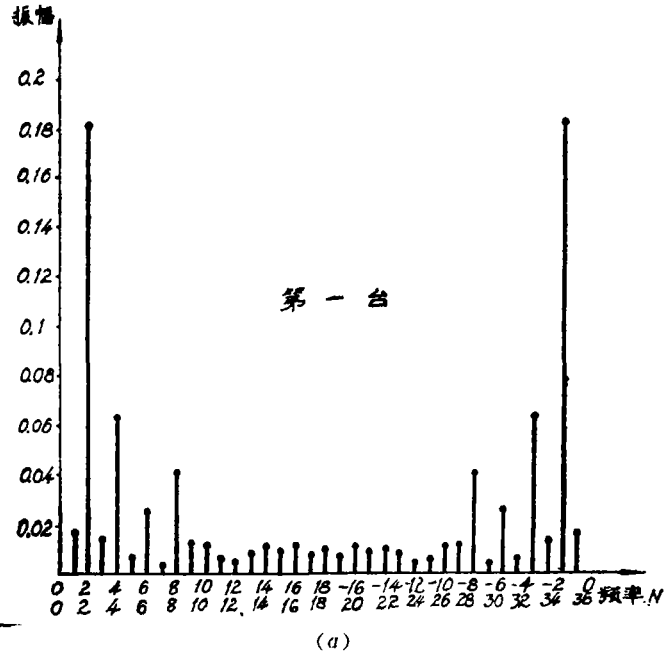


图 3 各次谐波的振幅值

率的结果，变换的虚部也是关于 $n = \frac{N}{2}$ 对称的奇函数， $n > \frac{N}{2}$ 点的结果也是负频率的结果。

表2 各次谐波的振幅数据

误差 编 号	n 次 (秒)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
		第一台	0.017	0.182	0.014	0.064	0.007	0.026	0.004	0.042
第二台		0.007	0.229	0.003	0.039	0.004	0.033	0.004	0.032	0.003
10	11	12	13	14	15	16	17	18		
0.012	0.006	0.005	0.009	0.011	0.010	0.012	0.008	0.011		
0.014	0.008	0.021	0.004	0.011	0.005	0.013	0.015	0.002		

2. 零次谐波的振幅值 M_0 仅与误差曲线的零点位置有关，如果适当的选择零点位置使误差曲线对称于横座标， M_0 将等于零，所以在具体分析时不考虑 M_0 。（在振幅图中没有标出 M_0 ）。

3. 最高次谐波：离散富里叶变换要求抽样频率至少是最高频率的两倍，否则离散富里叶变换会产生畸变，出现“混迭”效应，产生变换误差。因为误差曲线的测量点数是36，所以变换的最高频率不能大于18。我们在离散变换时选择最高频率为18。

4. 离散变换的结果，前18次谐波振幅总合第一台样机为 $0''.453$ 、第二台样机为 $0''.512$ （原始误差第一台样机为 $0''.486$ 、第二台样机为 $0''.597$ ）。离散变换的结果略小于原始误差，这是因为变换结果中不包含高于18次谐波部分的误差。

5. 奇次谐波振幅值较小，偶次谐波振幅值较大。前18次谐波中，奇次谐波第一台样机为 $0''.088$ ，第二台样机为 $0''.118$ ；偶次谐波第一台样机为 $0''.365$ ，第二台样机为 $0''.394$ 。奇次谐波振幅值比较小是因为测角仪采用对径读数的方法，消除了部分奇次误差。从理论上说，对径读数能消除奇次误差成分，但由于仪器的两个读数头的光电接收元件的灵敏度不一致以及均匀性误差等因素的影响，不能完全消除奇次误差，计算结果表明还残留少量奇次误差。

6. 从分析结果看出，偶次谐波中2、4、6、8次谐波振幅值较大，其中2次谐波的振幅值为最大，因此要进一步提高仪器精度就必须设法减小2、4、6、8次谐波，尤其要设法消除第2次谐波。当用均匀分布的四个读数头时可以消除1、2、3、5、6、7、9……次谐波，这种方案能进一步消除上述变换结果中比较突出的2、6次谐波，比较显著地提高仪器的精度。

误差曲线的富里叶分析的结果给出了组成这个误差曲线的各次谐波的振幅。根据这一变换结果，拟定消除这些误差的方法，这一点对于仪器设计者来说有着重要意义，因为它为设计者选择方案提供了重要依据。同时误差曲线的富里叶分析也给出了误差的分布规律，通过进一步分析，找到这些误差产生的原因，在以后的光栅生产中采取措施避免产生这些误差。

在此报告中ALGOL计算程序及流程图是韩之杰同志协助编制的； $0''.5$ 测角仪研制组的

测同志取了大量的测试数据。

附录

误差曲线离散富里叶变换计算程序流程图（见图4）。

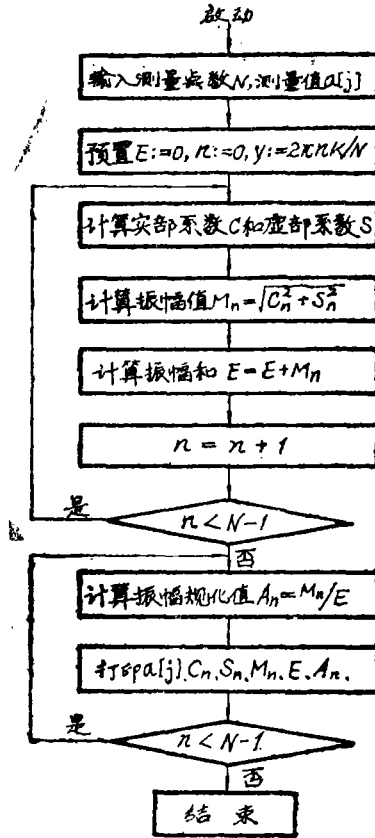


图4