

在外电场作用下的BSO晶体的 标准折射率椭球方程

王 雅 黎

摘 要

BSO ($\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$) 是灵敏度很高的光致折射率晶体又是一种电光晶体。它的这种非线性近年来很受重视, 已用作相干光学实时处理元件及光学四波混频工作介质。但是不论作为那种使用, 知道它在使用状态下的标准折射率椭球方程都是极为有用的。

本文利用解久期方程(特征方程)的方法得到了在外电场方向沿(0, 0, 1); (1, 1, 0); (1, 1, 1); (1, -1, 1)时的BSO晶体的标准折射率椭球方程, 主方向和主折射率值。并由此结果从理论上对晶体的使用状态进行了分析讨论, 指出了最佳使用条件。

一、引 言

电光晶体 BSO 属于立方晶系 23 点群^[1]。不加外电场时, 它的折射率椭球方程是:

$$\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{n_0^2} = 1 \quad (1)$$

它的电光系数矩阵是:

$$(\gamma_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \gamma & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad (2)$$

在任意外电场 $\vec{E} = E(A, B, C)$ (其中 A, B, C 是 \vec{E} 的方向余弦) 的作用下, 它的折射率椭球方程变为:

$$\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{n_0^2} + 2\gamma E(Ax_2x_3 + Bx_1x_3 + Cx_1x_2) = 1 \quad (3)$$

下面分别讨论在外加电场 \vec{E} 分别沿 (0, 0, 1); (1, 1, 0); (1, 1, 1); (1, -1, 1) 等几个特定方向时的 BSO 晶体的标准折射率椭球方程。这个问题的数学实质是在什么样的坐标系下可把型如(3)的二次型化为标准型; 它的物理实质是在外电场的作用下, 分子极化是如何分布的。

二、理论分析计算

如前所述, 在任意方向的外电场作用下, $[\vec{E} = E(A, B, C)]$, BSO 晶体的折射率椭球方程变为:

$$\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{n_0^2} + 2\gamma E (Ax_2x_3 + Bx_1x_3 + Cx_1x_2) = 1$$

将此二次型化为标准式，只需解如下久期方程即可。

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{n_0^2} - \lambda & \gamma EC & \gamma EB \\ \gamma EC & \frac{1}{n_0^2} - \lambda & \gamma EA \\ \gamma EB & \gamma EA & \frac{1}{n_0^2} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (4)$$

展开之，可得一关于特征值 λ 的三次方程，即：

$$\left(\frac{1}{n_0^2} - \lambda\right)^3 - \left(\frac{1}{n_0^2} - \lambda\right)\gamma^2 E^2 (A^2 + B^2 + C^2) + 2\gamma^3 E^3 ABC = 0 \quad (5)$$

设 $\frac{1}{n_0^2} - \lambda = x$ ，且有 $A^2 + B^2 + C^2 = 1$ ($\because A, B, C$ 是方向余弦)

则有：

$$x^3 - \gamma^2 E^2 x + 2\gamma^3 E^3 ABC = f(x) = 0 \quad (6)$$

由图 1 可知，当我们改变 A, B, C 时，只能改变函数 $y = f(x)$ 这条曲线的位置而不改变它的形状。下面我们讨论此曲线的极限情况，即 $ABC = 0$ ， $ABC = \frac{1}{3\sqrt{3}}$ ，和 $ABC = -\frac{1}{3\sqrt{3}}$ 的情况。

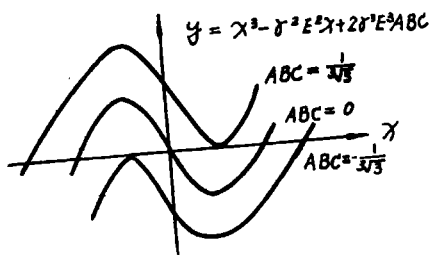


图 1 $y = x^3 - \gamma^2 E^2 x + 2\gamma^3 E^3 ABC$ 曲线

其中 $ABC = 0$ 对应于 $\vec{E} \parallel (0, 0, 1)$ 及 $\vec{E} \parallel (1, 1, 0)$
 $ABC = \frac{1}{3\sqrt{3}}$ 对应于 $\vec{E} \parallel (1, 1, 1)$
 $ABC = -\frac{1}{3\sqrt{3}}$ 对应于 $\vec{E} \parallel (1, -1, 1)$

下面分别讨论之：

1. $\vec{E} \parallel (0, 0, 1)$ ， $\vec{E} = E(0, 0, 1)$

此时 $A = B = 0$ ， $C = 1$ 代入(5)中则有：

$$\left(\frac{1}{n_0^2} - \lambda\right)^3 - \left(\frac{1}{n_0^2} - \lambda\right)\gamma^2 E^2 = 0 \quad (7)$$

$$\therefore \lambda_1 = \frac{1}{n_0^2}, \quad \lambda_{2,3} = \frac{1}{n_0^2} \pm \gamma E \quad (8)$$

且 λ_1 的特征向量 $x'_1 = (0, 0, 1)$

$$\left. \begin{aligned} \lambda_2 \text{ 的特征向量 } x'_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0) \\ \lambda_3 \text{ 的特征向量 } x'_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

利用折射率调制量是个小量的假设，可把 $\lambda_{2,3}$ 写成 $\frac{1}{n_{2,3}^2}$ 的形式，利用一般的微分运算可得：

$$\left. \begin{aligned} n_2 &= n_0 + \Delta n_2 \\ n_3 &= n_0 + \Delta n_3 \\ \Delta n_2 &= -n_0^3 \gamma E / 2 \\ \Delta n_3 &= n_0^3 \gamma E / 2 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

由以上的分析计算可知, 在新坐标系 $x'_1 x'_2 x'_3$ 中椭球方程(3)可近似写为:

$$\frac{(x'_1)^2}{n_0^2} + \frac{(x'_2)^2}{(n_0 + \Delta n_2)^2} + \frac{(x'_3)^2}{(n_0 + \Delta n_3)^2} = 1 \quad (11)$$

$$\Delta n_2 = -n_0^3 \gamma E / 2, \quad \Delta n_3 = \gamma E n_0^3 / 2$$

方程(11)表明: 在外加电场 $\vec{E} = E(0, 0, 1)$ 的作用下, BSO 晶体变为双轴晶体, 其主轴方向分别为:

$x'_1 = (0, 0, 1)$; $x'_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$; $x'_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)$ 。相应的主折射率值分别是 n_0 ; $n_0 - \gamma E n_0^3 / 2$; $n_0 + \gamma E n_0^3 / 2$ 。

$$2. \quad \vec{E} \parallel (1, 1, 0), \quad \vec{E} = E \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)$$

此时 $A = B = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $C = 0$ 代入(5)式得:

$$\left(\frac{1}{n_0^2} - \lambda \right)^3 - \gamma E \left(\frac{1}{n_0^2} - \lambda \right) = 0 \quad (12)$$

解之, 得:

$$\lambda_1 = \frac{1}{n_0^2}, \quad \lambda_{2,3} = \frac{1}{(n_{2,3})^2}, \quad \text{其中 } n_{2,3} = n_0 \mp n_0^3 \gamma E / 2$$

$$\left. \begin{aligned} \text{且 } \lambda_1 \text{ 的特征向量 } x'_1 &= (1, -1, 0) \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \lambda_2 \text{ 的特征向量 } x'_2 &= (1, 1, \sqrt{2}) \frac{1}{2} \\ \lambda_3 \text{ 的特征向量 } x'_3 &= (1, 1, -\sqrt{2}) \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

所以在新坐标系 $x'_1 x'_2 x'_3$ 中椭球方程(3)可写为

$$\frac{(x'_1)^2}{n_0^2} + \frac{(x'_2)^2}{(n_0 - n_0^3 \gamma E / 2)^2} + \frac{(x'_3)^2}{(n_0 + n_0^3 \gamma E / 2)^2} = 1 \quad (14)$$

(14) 式表明: 在外加电场 $\vec{E} = \frac{E}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$ 的作用下, BSO 晶体变为双轴晶体, 其主轴方向分别为: $x'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)$; $x'_2 = \frac{1}{2}(1, 1, \sqrt{2})$; $x'_3 = \frac{1}{2}(1, 1, -\sqrt{2})$, 对应的主折射率值分别为 n_0 ; $n_0 - \gamma E n_0^3 / 2$; $n_0 + \gamma E n_0^3 / 2$ 。

$$3. \quad \vec{E} \parallel (1, 1, 1), \quad \vec{E} = \frac{E}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$$

$A = B = C = 1/\sqrt{3}$, 代入(5)式得:

$$\left(\frac{1}{n_0^2} - \lambda \right)^3 - \gamma^3 E^3 \left(\frac{1}{n_0^2} - \lambda \right) + \frac{2}{3\sqrt{3}} \gamma^3 E^3 = 0 \quad (15)$$

解之, 得:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \frac{1}{n_0^2} - \gamma \frac{E}{\sqrt{3}} \\ \lambda_3 &= \frac{1}{n_0^2} + 2\gamma E / \sqrt{3} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

且 $\lambda_{1,2}$ 对应的特征向量为 $x + y + z = 0$ 平面上任两互相垂直的单位矢量。

$$\lambda_3 \text{ 对应的特征向量 } x'_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$$

所以当外加电场 $\vec{E} = \frac{E}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$ 时, 其折射率椭球的主轴方向为 $x'_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$; 和

两个互相垂直的在 $x + y + z = 0$ 平面上的单位矢量, 在这样的坐标下, 折射率椭球方程为:

$$\frac{(x'_1)^2 + (x'_2)^2}{(n_0 + \Delta n_1)^2} + \frac{(x'_3)^2}{(n_0 + \Delta n_3)^2} = 1 \quad (17)$$

$$\text{其中 } \Delta n_1 = \gamma E n_0^3 / 2\sqrt{3}, \Delta n_3 = -\gamma E n_0^3 / \sqrt{3} \quad (18)$$

(18) 式表明: 在外加电场 $\vec{E} = \frac{E}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$ 的作用下, BSO 晶体变为单轴晶体, 其晶轴为 (1, 1, 1) 方向。

$$4. \vec{E} \parallel (1, -1, 1); \vec{E} = \frac{E}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)$$

此时 $A = \frac{1}{\sqrt{3}}, B = -\frac{1}{\sqrt{3}}, C = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 代入 (5) 式则得:

$$\left(\frac{1}{n_0^2} - \lambda\right)^3 - \gamma^2 E^2 \left(\frac{1}{n_0^2} - \lambda\right) - 2 \frac{1}{3\sqrt{3}} \gamma^3 E^3 = 0 \quad (19)$$

解之, 得

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \frac{1}{n_0^2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \gamma E \\ \lambda_3 &= \frac{1}{n_0^2} - \frac{2}{\sqrt{3}} \gamma E \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

$\lambda_{1,2}$ (退化特征矢量) 对应的特征向量为: $x - y + z = 0$ 平面上任意两个互相垂直的单位矢量。

$$\lambda_3 \text{ 对应的特征向量为 } x'_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)$$

所以当外加电场 $\vec{E} = \frac{1}{\sqrt{3}} E (1, -1, 1)$ 时, 其折射率椭球为旋转椭球 (单轴晶体), 对称旋

转轴方向为 $x'_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)$ (即晶轴), 其折射率椭球方程为:

$$\frac{(x'_1)^2 + (x'_2)^2}{(n_0 + \Delta n_1)^2} + \frac{(x'_3)^2}{(n_0 + \Delta n_3)^2} = 1 \quad (21)$$

$$\text{其中 } \Delta n_1 = -\gamma E n_0^3 / 2\sqrt{3}, \Delta n_3 = \gamma E n_0^3 / \sqrt{3} \quad (22)$$

现将以上所得结果列在表 1 中

表 1 不同外加电场作用下的主轴方向、主折射率值

外加电场 \vec{E}	主轴方向	主轴折率值
$E(0, 0, 1)$	$(0, 0, 1)$ $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$	$n_1 = n_0$ $n_2 = n_0 - \gamma E n_0^3 / 2$ $n_3 = n_0 + \gamma E n_0^3 / 2$
$\frac{E}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)$ $\frac{1}{2}(1, 1, \sqrt{2})$ $\frac{1}{2}(1, 1, -\sqrt{2})$	$n_1 = n_0$ $n_2 = n_0 - \gamma E n_0^3 / 2$ $n_3 = n_0 + \gamma E n_0^3 / 2$
$\frac{E}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$	$x + y + z = 0$ 上任互相垂直的两单位矢量 $\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$	$n_{1,2} = n_0 + \frac{\gamma E n_0^3}{2\sqrt{3}}$ $n_3 = n_0 - \frac{\gamma E n_0^3}{\sqrt{3}}$
$\frac{E}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)$	$x - y + z = 0$ 上任互相垂直的两单位矢量 $\frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)$	$n_{1,2} = n_0 - \frac{\gamma E n_0^3}{2\sqrt{3}}$ $n_3 = n_0 + \frac{\gamma E n_0^3}{\sqrt{3}}$

三、讨 论

1. BSO 作为实时器件

此时它的工作原理通常是以纵向 pockels 效应为依据的, 它是利用光电导性先建立一个电场分布 (平面图形的) 通过 pockels 效应达到双折射调制来读入的。然后进行读出, 读出的实质是通过检测这种双折射的分布来复现电场分布从而复现原图形的明暗分布, 所以为了提高灵敏度 (在一定外电场作用下) 或是为了降低半波电压, 需要尽量提高双折射, 即要求有最大的 $|N_o - N_e|$ 的值。由表 1 可知, 在 $\vec{E} \parallel (0, 0, 1)$ 时, $|N_o - N_e| (= \gamma E n_0^3)$ 达到最大。所以实时器件的最佳外电场方向为 $(0, 0, 1)$ 。

2. BSO 作为四波混频介质

此时它是横向 pockels 效应为其物理依据的, 写入是利用三次非线性极化造成的折射率

调制也就是所谓的光致折射率效应而不是双折射,所以一般讲来,它可以工作于 $\vec{E} \parallel (1, 1, 0)$, $(0, 01)$; $(1, 1, 1)$; $(1, -1, 1)$ 等条件下,按 Miller 的理论^[2],光电三次极化系数是介质受光电场极化前折射率的升函数,所以由表 1 可知,最好的工作电场方向为 $\vec{E} \parallel (1, -1, 1)$,其次为 $\vec{E} \parallel (1, 1, 1)$,这两个方向的外电场不仅有如上的优点即在相同光电场下折射率的调制大而且由于折射率椭球是旋转对称的,加工也方便得多,只需定好晶体的 $(1, -1, 1)$ 或 $(1, 1, 1)$,其他方向完全不用考虑。

参 考 文 献

- [1] High Sensitivity Read-write Holographic Storage in $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}\text{-Bi}_{12}\text{GeO}_{20}$ Crystals. *Apple.phys.lett*, 29, 591. 1976.
- [2] R.C.Miller *Apple.phys.lett*; 5, 17, 1964.