自由电子在静电势垒中的多光子吸收

翁 兆 恒

摘 要：

利用半经典理论分析了自由电子在光场影响下的势垒穿透问题，导出了穿透率和反射率的近似表达式，分析结果表明：当势垒对数的梯度可以与光波波长的倒数相比拟时 （即$\frac{1}{V}\frac{dv}{dx}\sim\frac{1}{\lambda}$)，自由电子在穿透势垒和被势垒反射时，将发生多光子吸收（或发射）效应，利用本文的结果，可以澄清 L.A.Lompre 等人最近的实验所引起的混乱。

1979年L.A.Lompra等人从实验上观察到自由电子在一维静电势垒中吸收到8个光子的现象[1]。但最近王之江教授等人的重复实验却没有观察到这一现象[2]为了弄清问题，本文利用半经典理论对此进行初步分析。

为简单起见，我们仅研究在EM均匀场的作用下，自由电子在一维势垒中的运动，不难写出它的 Schrödinger 方程如下

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=\frac{-\hbar}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{i\hbar e}{mc}A(t)\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{e^2}{2mc^2}A^2(t)\varphi+V(x)\varphi \tag{1}$$

式中$A(t)=A_0\cos\omega t$，是EM场的矢势，$V(x)$为势垒函数，φ为电子的波函数。我们令

$$\Psi(x,t)=\varphi(x,t)e^{-\frac{i}{\hbar}\int^t\frac{e^2}{2mc^2}A^2(t')dt'} \tag{2}$$

于是可把（1）式简化为：

$$i\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{i\hbar e}{mc}A(t)\frac{\partial\varphi}{\partial x}+V(x)\varphi \tag{3}$$

这就意味着与$A^2(t)$有关的项不影响研究结果，因此在分析中可以不加考虑。

一般说来，当$V(x)$不是常数时不可能获得(3)式的严格解，而只能用近似方法求解。对于中心力场的情况，已为M.Kroll等[3]及N.K.Rahmon等[4]在远场极限下获得近似解。但他们并未涉及在光场影响下的势垒穿透问题，因此我们利用类似的方法来求解和讨论这一问题。

当$V(x)=0$时，可以获得（3）式的齐次解为：

$$\varphi_0(x,t,K)=ExP[iKx-i\frac{E(K)}{\hbar}t+iK\beta_0\sin\omega t] \tag{4}$$

式中$E(K)=\frac{\hbar^2K^2}{2m}$，$\beta_0=\frac{eA_0}{mc\omega}$

为求出(3)式的非齐次解，利用 Dirac 的δ函数及格林函数G把$V(x)\varphi(x,t)$及$\varphi(x,t)$表示为：

$$V(x)\varphi(x,t)=\int V(x')\varphi(x',t')\delta(x'-x)\delta(t'-t)dx'dt' \quad (5)$$

$$\varphi(x,t)=\varphi_0(x,t,k)+\int V(x')\varphi(x',t')G(x'-x,t'-t)dx'dt' \quad (6)$$

把（5）式和（6）式代入（3）式后，可求得格林函数G所满足的方程为：

$$\left(-\frac{h^2\partial^2}{2m\partial x^2}+\frac{iehA_0\cos\omega t}{mc}\frac{\partial}{\partial x}-ih\frac{\partial}{\partial t}\right)G=\delta(x'-x)\delta(t'-t) \quad (7)$$

按照标准解法，不难求出（7）式的推迟格林解为：

$$G=\frac{i}{2\pi h}\int dk\varphi_0(x',t',K)\varphi_0(x,t,K) \quad (8)$$

为求得（6）式的近似表式，我们作如下递推：

$$\varphi_1(x,t)=\varphi_0(x,t,K)+\int G(x_0-x,t_0-t)V(x_0)\varphi_0(x_0,t_0,K)dx_0dt_0 \quad (9.1)$$

$$\varphi_2(x,t)=\varphi_0(x,t,K)+\int G(x_1-x,t_1-t)V(x_1)\varphi_1(x_1,t_1)dx_1dt_1 \quad (9.2)$$

………………………………………………………………

$$\varphi_{n+1}(x,t)=\varphi_0(x,t,K)+\int G(x_n-x,t_n-t)V(x_n)\varphi_n(x_n,t_n)dx_ndt_n \quad (9.3)$$

取极限可求得：

$$\varphi(x,t)=\lim_{n\to\infty}\varphi_{n+1}(x,t)$$

$$=\varphi_0(x,t,K)+\lim_{n\to\infty}\int G(x_n-x,t_n-t)V(x_n)\varphi_n(x_n,t_n)dx_ndt_n \quad (9.4)$$

假定入射波为$\varphi_0(x,t,K_i)$，透射波或反射波为$\varphi_0(x,t,k_f)$．利用(9.1)式可求出透射波或反射波的振幅的一级近似式为：

$$A_f=\frac{i}{2\pi h}\int dxdx'dt'dx\varphi_0{}^*(x',t',K)\varphi_0(x',t',K_i)$$

$$\cdot\varphi_0{}^*(x,t,K_f)\varphi_0(x,t,K) \quad (10)$$

把（4）式代入上式并完成积分后可求得：

$$A_f=\frac{i}{2\pi h}\Sigma J_v[\beta_0(K_i-K_f)]\delta(E_f-E_i$$

$$+v\omega h)\int_{-\infty}^{\infty}V(x')e^{i(K_i-K_f)x'}dx' \quad (11)$$

式中J_v为v阶贝塞尔函数，$\delta(E_f-E_i-v\omega h)$ 为 Dirac δ 函数，反映了能量守恒关系，即

$$E_f=E_i+v\omega h \quad (12)$$

这实际上反映了在反射波或透射波中的多光子吸收或发射。(11)式右边求和号内的因子：

$$\int_{-\infty}^{\infty}v(x')e^{i(K_i-K_f)x'}dx' \quad (13)$$

表示产生多光子吸收或发射的条件，当$V(x)$＝常数时，(13)式实际是$\delta(K_i-K_f)$，反映了透射波或反射波的动量与入射波的动量相等，即不发生多光子吸收或发射，因此，仅当满足

$$\frac{1}{V}\frac{dV}{dx}\geq\frac{1}{\lambda} \quad (14)$$

时，才能获得$K_i\neq K_f$的积分结果，即发生多光子吸收或发射，式中λ是光波波长，从(12)式有$K_i-K_f=\frac{2\pi}{\lambda}$。

根据量子力学中几率流的定义：

$$I = -\frac{ih}{2m}[\varphi\nabla\varphi^* - \varphi^*\nabla\varphi] + \frac{e}{mc}\varphi^*\varphi A(t) \tag{15}$$

由于$A(t) = A_0\cos\omega t$ 是周期函数，$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}$，对（15）式求平均有：

$$\overline{I} = \frac{ih}{2m}(\psi\nabla\psi^* - \psi^*\nabla\psi) \tag{16}$$

于是我们可求得入射波的几率流密度是：

$$\overline{I}_i = \frac{hK_i}{m} \tag{17}$$

反射波的几率流密度为：

$$\overline{I}_R = \frac{hK_R}{m}|A_R|^2 \tag{18}$$

式中K_R与（11）式中的K_f的关系为：

$K_f = -K_R$

透射波的几率流密度为：

$$\overline{I}_t = \frac{hK_t}{m}|A_t|^2 \tag{19}$$

式中 K_t 与(11)式中 K_f 的关系是 $K_t = K_f$

这样，我们就可求得自由电子被势垒的反射率为：

$$R = \frac{\overline{I}_R}{\overline{I}_i}$$

$$= \frac{K_R}{K_i}\left(\frac{1}{2\pi h}\right)^2 J_v^2[\beta_0(K_i + K_R)][\int_{-\infty}^{\infty} V(x')e^{i(K_i+K_R)x'}dx']^2 \tag{20}$$

而穿透率为：

$$\tau = \frac{K_t}{K_i}\left(\frac{1}{2\pi h}\right)^2 J_v^2[\beta_0(K_i - K_t)][\int_{-\infty}^{\infty} V(x')e^{i(K_i-K_t)x'}dx']^2 \tag{21}$$

由上述诸式可以得到以下结论：

1. (12)式说明：当 $v > 0$ 时，自由电子通过势垒或为势垒反射时，产生多光子吸收；反之，当 $v < 0$ 时产生多光子发射。

2. 从(14)式可知，仅当势垒对数的梯度接近或大于光波波长的倒数时，才能产生可观察到的多光子吸收效应。由此可见，由于L. A. Lompra等人的实验条件违背了（14）式的要求（他们的实验条件是$\frac{1}{V}\ \frac{dV}{dx} \ll \frac{1}{\lambda}$），因而不可能观察到多光子吸收，这就说明他们的实验结果是一种假象。

3. 当 $\beta_0 = 0$ 时，即无EM场的影响时，由于仅有 $J_0(0) \neq 0$，于是从(12)可知$K_i = K_R = K_t$， 这就简化成普通的势垒穿贯问题，并说明因子（13）式与无光场时的反射率和透射率有关。

最后必须指出，利用上述方法还可以进一步获得有关的各级近似，从而使表式（20）和（21）更精确，但限于篇幅，不再赘述。

参 考 文 献

[1] L.A.Lompra, G.Mainfray and G.Manus, (1979) phys. Rev. Lett. 43, 1243.
[2] 王之江等（1983）《光学学报》（待发表）.
[3] M.Kroll and M.Watsen, (1973) phys. Rev. A8, 804.
[4] N.K.Rahman, (1974) phys. Rev.A10, 440.