莫尔条纹的付里叶分析

王　雅　黎

摘　要

本文采用空间频率矢量概念，利用一维付里叶分析方法对两组周期性直条纹结构所产生的莫尔条纹进行了分析，简化了运算，得到了莫尔条纹间隔及方向的计算公式，还利用所得结果计算了Fresnel带板的莫尔条纹，并由实验加以验证。

一、引　　言

莫尔条纹在测量微小位移方面有着广泛的应用。A. W. Lohmann 曾采用二维付里叶级数方法对它进行了分析讨论[1]。我们知道：两相同直光栅（光栅常数 ω）相互错过一个小角度θ而叠加，就会产生间隔为 $d=\omega/2\sin(\frac{\theta}{2})$的莫尔条纹。但是计算条纹间隔在空间各处不相同的广义光栅叠加所产生的莫尔条纹，就无法应用上式。

本文采用空间频率概念，首先对两直条纹周期结构的莫尔条纹进行了一维付里叶分析，得出莫尔条纹的间隔和方向的计算公式，即矢量表达式。这种表达式还可以用来计算由广义光栅叠加而产生的莫尔条纹，用它计算了Fresnel 带板所产生的莫尔条纹，并从实验上加以验证。

二、莫尔条纹的付里叶分析

首先引入空间频率概念，对于一组周期平面直条纹结构，空间频率$\overrightarrow{K}$定义为：

$$\overrightarrow{K}=\begin{cases}|\overrightarrow{K}|=\dfrac{1}{d}\\ \overrightarrow{K}\parallel gradT(x,y)\end{cases}\tag{1}$$

其中d是条纹的周期，$T(x,y)$ 是条纹结的透过率函数。

空间频率为$\overrightarrow{K}$的黑白直条纹结构的透过率分布，实际上是$\overrightarrow{K}$方向上的一维问题，因为它可以写为：

$$T(x,\ y)=T(\overrightarrow{r}\cdot\overrightarrow{K})\tag{2}$$

将$T(x,y)$在$\overrightarrow{K}$方向上进行付里叶级数展开，可以得到如下结果：

$$T(x,\ y)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n e^{2\pi i n\overrightarrow{r}\cdot\overrightarrow{K}}\tag{3}$$

其中 C_n为付里叶展开系数。

当两组空间频率矢量分别为$\overrightarrow{K}_1$、$\overrightarrow{K}_2$；透过率分别为 $T_1(x,y)$、$T_2(x,\ y)$ 的直条纹叠加

时，其总的透过率$T(x,y)$可写为：

$$
\begin{aligned}
T(x,y) &= T_1(x,y)T_2(xy,) \\
&= T_1(\vec{r}\cdot\vec{K}_1)\ T_2(\vec{r}\cdot\vec{K}_2) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{2\pi i n\vec{r}\cdot\vec{K}_1}\cdot\sum_{m=-\infty}^{\infty} C'_m e^{2\pi i m\vec{r}\cdot\vec{K}_2} \\
&= \sum_{(m,n)=-\infty}^{\infty}\sum C_n C'_m e^{2\pi i(n\vec{K}_1+m\vec{K}_2)\cdot\vec{r}}
\end{aligned}
\tag{4}
$$

其中C_n，C'_m分别是$T_1(x,y)$和$T_2(x,y)$的付里叶展开系数。

对于黑白结构来讲，透过率函数是实函数，由付里叶分析的基本性质可知 $C_n=C^*_{-n}$，$C'_m=C'^*_{-m}$； 再者，对于一般条纹来讲，其低次项是主要的[1]。所以可以做低级近 似 处 理。取$n,m=0,\ \pm1$，在这样的近似下（4）式变为：

$$
\begin{aligned}
T(x,y) \doteq\ & C_0C'_0+2|C_0||C_1'|\cos[2\pi\vec{r}\cdot\vec{K}_2+\phi_1] \\
&+2|C_1||C'_0|\cos[2\pi\vec{r}\cdot\vec{K}_1+\phi_2] \\
&+2|C_1||C'_{-1}|\cos[2\pi\vec{r}\cdot(\vec{K}_1-\vec{K}_2)+\phi_3] \\
&+2|C_1||C'_1|\cos[2\pi\vec{r}\cdot(\vec{K}_1+\vec{K}_2)+\phi_4]
\end{aligned}
\tag{5}
$$

不难看出，其中第一项表示平均透过率；第二项、第三项分别对应于母条纹，这些都是莫尔条纹的背景，下面重点讨论第四、五项的物理意义。

根据（1）式的定义可以知道第四、五两项分别对应于空间频率为$\vec{K}_4=\vec{K}_1-\vec{K}_2$和$\vec{K}_5=\vec{K}_1+\vec{K}_2$的直条纹结构。这两组条纹到底那一组是莫尔条纹呢？我们知道两组直条纹叠加时，在一定面积上结点的个数一定，显然莫尔条纹是指那些结点密度大的线结构（这与晶体的解理面是相对应的）。也就是空间频率低的那些线结构，因此只要比较一下$|\vec{K}_4|=|\vec{K}_1-\vec{K}_2|$和$|\vec{K}_5|=|\vec{K}_1+\vec{K}_2|$那个大就行了。如果我们适当的选取$\vec{K}_1$、$\vec{K}_2$的正向，使得$(\vec{K}_1,\hat{\ }\vec{K}_2)<90°$，则$|\vec{K}_4|<|\vec{K}_5|$，即第四项代表莫尔条纹，第五项是背景。在这样选取正向的条件下，频率为$\vec{K}_1$和$\vec{K}_2$的两组周期直条纹叠加时，得到的莫尔条纹的空间频率为：

$$
\vec{K}=\vec{K}_1-\vec{K}_2 \tag{6}
$$

由（1）和（6）式给出了莫尔条纹的间隔和方向的公式。

三、Fresnel带板的莫尔条纹

当两个相同的Fresnel带板中心错开一个△后叠加，将产生莫尔条纹，使用（6）式对它进行分析，会得出明晰的结果。

1. 求带板的空间频率矢量

a）全息带板情况

采用图1所示的装置，得到同轴全息Fresnel带板，由干涉条件知：

$$
d(r)=\frac{\lambda}{\sin\theta} \tag{7}
$$

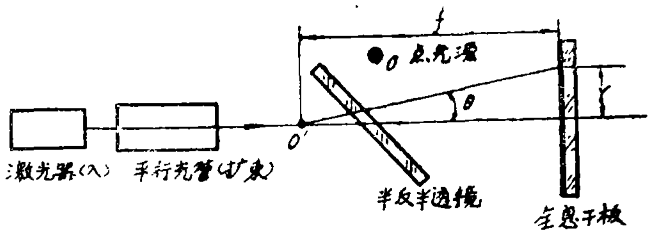

图1　同轴 Fresnel 带板制作简图

$d(r)$表示距中心 r 处的条纹间隔，θ 如图所示。

∵　$\theta \to 0$，　∴　$\sin\theta \doteq \dfrac{r}{f}$，代入（7）式则：

$$d(r)=\frac{f\lambda}{r} \tag{8}$$

$$\therefore\quad \vec{K}(r)=\frac{\vec{r}}{f\lambda} \tag{9}$$

b）几何带板情况

对于由作图而得的Fresnel 带板，在文献[2]中，已从纯几何量出发进行了推导。下面利用微分法推出，此法相对简单。

我们知道，作图的第 n 个环带半径r_n为：

$$r_n=\sqrt{nf\lambda}\qquad (n\text{ 为正整数})$$

当 n 很大时，r_n处的条纹间隔$d(r_n)$为：

$$d(r_n)=(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})\sqrt{f\lambda}$$

利用微分公式，可得：

$$d(r_n)\doteq\frac{\sqrt{f\lambda}}{\sqrt{n}}=\frac{f\lambda}{r_n}$$

去掉下标，

$$d(r)=\frac{f\lambda}{r}$$

$$\therefore\quad \vec{K}(r)=\frac{\vec{r}}{f\lambda}$$

所以不论是几何带板（用作图法得到的），还是全息带板，其空间频率矢量都可以写为：

$$\vec{K}(r)=\vec{r}/f\lambda \tag{10}$$

2. 带板叠加后的莫尔条纹的空间频率矢量$\vec{K}_{莫}$的计算

当两相同结构带板中心错过$\Delta\vec{r}$后叠加时，取坐标原点在$\Delta\vec{r}$的中点上，则由(10)式可得出这两个带板的空间频率矢量分别为：

$$\left.\begin{aligned}\vec{K}_1&=\frac{\vec{r}+\Delta\vec{r}/2}{f\lambda}\\ \vec{K}_2&=\frac{\vec{r}-\Delta\vec{r}/2}{f\lambda}\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

由于$\Delta \vec{r} \to 0$，所以可以利用（6）式计算莫尔条纹的空间频率矢量$\vec{K}_{莫}$。

$$\vec{K}_{莫} = \vec{K}_1 - \vec{K}_2 = \frac{\Delta \vec{r}}{f\lambda} \tag{12}$$

（12）式表明这是一组垂直于$\Delta \vec{r}$的莫尔条纹，其间隔d为：

$$d = \frac{1}{|\vec{K}_1 - \vec{K}_2|} = \frac{f\lambda}{\Delta r} \tag{13}$$

3. **实验验证**

我们测量了按图1所示光路用双曝光法所得莫尔条纹的间隔，根据所测得的f（焦距）和d（间隔），按（13）式计算出$\Delta r_{计}$与实测$\Delta r_{测}$进行了比较，结果列于表1。

表1　$\Delta r_{计}$与$\Delta r_{测}$的比较

d(mm)	f(mm)	$\Delta r_{计}$ μm	$\Delta r_{测}$ μm
3.70	352	62.20	60.0
0.60	271	285.80	285.0
2.05	269	83.04	85.0
1.45	269	117.39	120.0
2.30	253	97.12	95.0
0.48	440	580.07	585.0
0.77	323	265.45	270.0

测量精度为d，2%；f，2%；Δr，5%。由表1可以看出$\Delta r_{计}$和$\Delta r_{测}$符合得很好。

四、结　　语

1. 由前面的例子可以看出，使用公式(6)讨论莫尔条纹的参量是很方便的，尤其在母条纹的空间频率各处不相同时，更加优越。

2. 由实验测量结果可看出，Fresnel带板的莫尔条纹是等间隔的，条纹间隔与两带板分开距离Δr成反正，而且条纹方向垂直于$\Delta \vec{r}$，这可能在精密测量上有一定用场。

参 考 文 献

[1] A.W.Lohmann "Optical Information Processing",1978.
[2] Proceeding of the Symposium on Modern Optics Vol 17 New york 1967 P545.