

调相光栅远场性能分析

翁兆恒

本文利用惠更斯-费涅尔原理,分析了调相光栅的远场性能,根据计算机结果归纳出一近似公式。这一近似公式表明,利用调相光栅的远场性能进行激光加速,不可能获得有意义的加速能力。

一、引言

激光加速是一个意义重大、但至今仍未解决的课题。二十多年来,不少人对这问题进行了研究,提出了各种各样的方案。其中特别是1977年F. Rcarlat等提出利用黑白相间的调幅光栅的远场性能进行激光加速的方案^[1],和1979年彭桓武教授等提出的利用调相光栅的远场性能进行激光加速的新建议^[2],引起不少人的注意和争议。为了弄清问题,本文作者曾在文献(3)中利用谐波分析方法,对这一问题进行了理论分析,得到与文献(1)和(2)相反的结论,即:利用调相光栅的远场性能进行激光加速,不可能获得有意义的加速能力。为了进一步证明我们在(3)中所得结论的正确性,最近我们又利用光的衍射理论中的惠更斯-费涅尔原理,再一次从不同的角度分析了这一问题,根据计算结果归纳出一近似公式,从这一近似公式同样得到不可能获得有意义的加速能力的结论。

二、基本公式和近似表式

为分析方便起见,我们考虑图1形式的简化光栅结构。这一光栅的特点是在倾角为 θ 、介质折射率为 μ 的斜劈上,带有光程差为 $\frac{\lambda}{m_0}$ 的阶梯光栅。设入射光垂直于阶梯光栅表面,其偏振面在纸平面内,调幅函数为 $a_0(x')$ 。根据惠更斯-费涅尔原理,可以写出整个光栅表面在 x 点处的衍射光的叠加场强为:

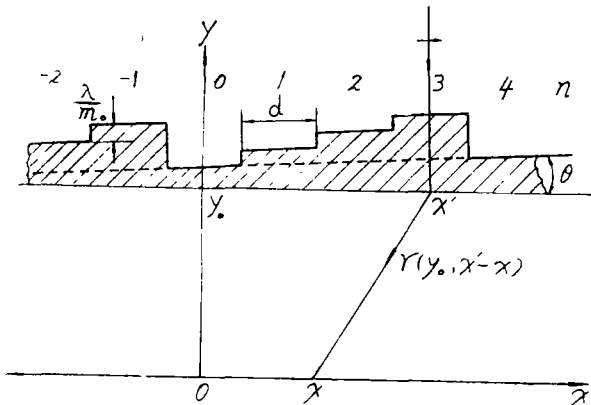


图1 调相光栅及光路图

$$A(x) = \sum_{n=-N}^N a_n(x), \quad (1)$$

式中

$$a_n(x) = \int_{(n-\frac{1}{2})d}^{(n+\frac{1}{2})d} y_0^2 dx' \frac{a_0(x')}{r^3} e^{ik(r + \mu x' \sin\theta + n \frac{\lambda}{m_0})}, \quad (2)$$

其中 $r = [y_0^2 + (x' - x)^2]^{\frac{1}{2}}$ 。这里必须说明，由于我们只考虑在 x 方向的偏振投影，在(2)式积分号内分母中的 r 的方次比通常的衍射公式中的多一次。

为看出(1)式的意义，我们假定入射角 θ 对 $y = y_0$ 的表面而言是布儒斯特角，因而应有 $\mu \sin\theta = \cos\theta$ 。又令 $Z = x' - x$ ，于是可把(2)式变换为：

$$a_n(x) = \int_{(n-\frac{x}{d}-\frac{1}{2})d}^{(n-\frac{x}{d}+\frac{1}{2})d} y_0^2 a_0(z+x) dz \frac{e^{ik[r(z) + (z+x)\cos\theta + n \frac{\lambda}{m_0}]}}{r^3(z)}, \quad (3)$$

式中 $r(z) = (y_0^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$ 。

由于我们只考虑调相光栅的远场性能，因此可认为： $y_0 \gg d$ ，这样，我们就可取下列近似：

① 设 $a_0(z+x) \doteq a_0(nd)$ ，即假定每一光栅槽上的光振幅不变；

② 用 $r(z) \doteq r(y_0, nd-x) + \left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)_{nd-x} \cdot (z-nd+x)$ ，代替(3)式积分号内的 $r^3(z)$ 。

②和③中的近似带来的振幅误差不超过 0.01%，而相位误差不超过 0.036°。再注意到

$\left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)_{nd-x} = \frac{nd-x}{r_n(x)}$ ，又令 $z' = z - nd + x$ ，于是可把(3)式变换为：

$$a_n(x) = e^{ik[r_n(x)nd\cos\theta + n \frac{\lambda}{m_0}]} \cdot a_0(nd) \int_{-\frac{1}{2}d}^{\frac{1}{2}d} y_0^2 dz' \frac{e^{ik[\cos\theta + \frac{nd-x}{r_n}z']}}{r_n^3(x)}, \quad (4)$$

完成(4)式的积分可得：

$$a_n(x) = \frac{y_0^2 da_0(nd)}{2r_n^3(x)} \frac{\sin\xi_n(x)}{\xi_n(x)} e^{ik[r_n(x) + nd\cos\theta + n \frac{\lambda}{m_0}]}, \quad (5)$$

式中

$$\xi_n(x) = \frac{kd}{2} \left(\cos\theta + \frac{nd-x}{r_n(x)} \right). \quad (6)$$

把(5)式代入(1)式可得:

$$A(x) = \frac{d}{2y_0} \sum_{n=-N}^N a_0(nd) A_n(x) e^{i\Phi_n(x)}, \quad (7)$$

式中

$$A_n(x) = \frac{y_0^3}{r_n^3(x)} \frac{\sin \xi_n(x)}{\xi_n(x)}, \quad (8)$$

$$\Phi_n(x) = K[r_n(x) + nd \cos \theta + n \frac{\lambda}{m_0}]. \quad (9)$$

公式(7)就是我们下面进行分析的基础。

三、近似表式和调相光栅的远场性能

首先我们讨论 $a_0(nd) = 1$ 的情况,这实际上就是文献(2)中所研究的等幅输入情况。由(8)式中 $A_n(x)$ 的函数形式不难看出:

- ① 当 $\xi_n = m\pi$, $m = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$ 时, $A_n(x) = 0$;
- ② 在 $m\pi$ 和 $(m+1)\pi$ 之间存在一个不为零的极值;
- ③ 当 $n \rightarrow \pm \infty$ 时有

$$\lim_{n \rightarrow \pm \infty} \xi_n(x) = \frac{Kd}{2} (\cos \theta \pm 1),$$

$$\lim_{n \rightarrow \pm \infty} A_n(x) = 0.$$

以上性质可由图2中的曲线看出。

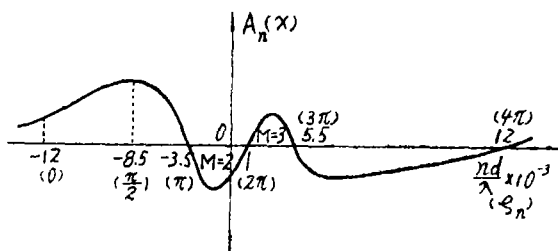


图2 $A_n(x)$ 与 $nd(\xi_n)$ 的关系曲线

另外,从相位关系来看,只有(7)式中 $A(x)$ 求和号中相邻两项之间的相位差满足:

$$\Phi_{n+1}(x) - \Phi_n(x) = 2\pi M, M = 0, 1, 2, \dots, \quad (10)$$

时, $A_n(x)$ 对 $A(x)$ 的贡献最大,为求出这一贡献最大的位置,我们近似地用微分代替相邻两项的相位差:

$$\Phi_{n+1} - \Phi_n \approx K \left[\frac{n' d^2}{r_n} + d \cos \theta + \frac{\lambda}{m_0} \right], \quad (11)$$

式中 $n' = n - \frac{x}{d}$ 。从(6)式和(10)式可求出:

$$\xi_x = \frac{m_0 M - 1}{m_0} \pi, M = 0, 1, 2, \dots, \quad (12)$$

由图(2)可以看出:在每个 $[m\pi, (m+1)\pi]$ 区间内,只有一个贡献最大的位置,对于

$m_0 = 2$ 的情况, 此贡献最大位置就在振幅 $A_n(x)$ 的各极值附近。把 (12) 式代入 (6) 式, 就可求出贡献最大位置的 $n'_M d$ 和 $\gamma_{n'_M}$ 之比值:

$$\frac{n'_M d}{r_{n'_M}} = M \frac{\lambda}{d} - \beta^{-1}, \quad (13)$$

式中

$$\beta^{-1} = \cos \theta + \frac{\lambda}{m_0 d}, \quad (14)$$

和文献 (2) 中的激光加速条件是等同的。由于

$$-1 < \frac{n'_M d}{r_{n'_M}} < 1,$$

所以有

$$\frac{d}{\lambda} (\beta^{-1} - 1) \leq M \leq \frac{d}{\lambda} (\beta^{-1} + 1), \quad (15)$$

由于光栅的周期性, 我们可以限于研究 $x \leq d$ 的情况。为了获得近似表式, 我们把 (7) 式改写为:

$$A(x) = \frac{d}{2y_0} \left(\sum_n A_n(x) + \sum_n A_n(x) + \dots \right) e^{i\phi_n(x)}, \quad (16)$$

式中 \sum_n 代表求和范围是

$$(M-1)\pi \leq \xi_{n'} \leq M\pi$$

进一步我们利用 (13) 式把 (16) 式改写为:

$$A(x) = \frac{d}{2y_0} \sum_{M=0}^N A_M(x) e^{ik(\beta^{-1} - M \frac{\lambda}{d})x + i\varphi_M(x)}, \quad (17)$$

式中

$$N \leq (\beta^{-1} + 1) \frac{d}{\lambda},$$

$$A_M(x) e^{i\varphi_M(x)} = \sum_n A_n(x) e^{i[\phi_n(x) - k(\beta^{-1} - M \frac{\lambda}{d})x]}. \quad (18)$$

我们利用 666 型电子计算机计算了 $A_M(x)$ 和 $\varphi_M(x)$ 对 x 的依赖程度, 结果见下列三个表。

表 I A_M 及 φ_M 对 x 的关系。 $m_0 = 4, d = \lambda, y_0 = 10^4 \lambda, \beta^{-1} = 1$ 。

M	x/d	0	0.25	0.50	0.75	1
1	$A_M(x)$	30.21	29.88	30.00	30.14	30.21
	$\varphi_M(x)$	44.62°	44.69°	44.75°	45.09°	44.62°

注: $M > 1$ 的各级 A_M 较小, 故未列入表中。

表 II: A_M 和 φ_M 对 x 的关系。 $m_0 = 2, d = 2\lambda, y_0 = 10^4\lambda, \beta^{-1} = 1$ 。

M	x/d	0	0.25	0.50	0.75	1
0	$A_M(x)$	0.08	-	-	-	0.08
	$\varphi_M(x)$	119.8°	-	-	-	119.8°
1	$A_M(x)$	22.12	22.15	22.44	22.26	22.12
	$\varphi_M(x)$	136.45°	136.27°	136.20°	136.27°	136.45°
2	$A_M(x)$	10.60	10.61	10.61	10.61	10.60
	$\varphi_M(x)$	224.99°	224.98°	224.98°	224.98°	224.99°
3	$A_M(x)$	4.44	4.44	4.44	4.44	4.44
	$\varphi_M(x)$	136.44°	136.44°	136.44°	136.44°	136.44°

表 III: A_M 和 φ_M 对 x 的关系, $m_0 = 4, d = 2\lambda, y_0 = 10^4\lambda, \beta^{-1} = 1$ 。

M	x/d	0	0.25	0.50	0.75	1
1	$A_M(x)$	10.47	10.51	10.50	10.40	10.47
	$\varphi_M(x)$	136.23°	136.33°	136.57°	136.93°	136.23°
2	$A_M(x)$	6.43	6.43	6.43	6.43	6.43
	$\varphi_M(x)$	224.99°	224.78°	224.99°	224.97°	224.99°
3	$A_M(x)$	2.86	2.81	2.86	2.86	2.86
	$\varphi_M(x)$	136.46°	136.45°	136.46°	136.46°	136.46°

注: 因 $M = 0$ 和 $M \geq 4$ 等各级的 A_M 较小, 故未列入表中。

于是我们可把(17)式近似为:

$$A(x) = \frac{d}{2y_0} \sum_{M=0}^{\infty} A_M(0) e^{ik(\beta^{-1} - M \frac{\lambda}{d})x + i\varphi_M(0)}, \quad (19)$$

式中

$$A_M(0) e^{i\varphi_M(0)} = \sum_n A_n(0) e^{i\varphi_n(0)}.$$

这一近似实际上是把(9)式中的 $r_n(x)$ 对 x 展开, 取一级近似:

$$r_n(x) = r_n(0) - \frac{nd}{r_n(0)} x. \quad (20)$$

然后用(13)式中的 $\frac{n'_M d}{r_{n'_M}}$ 代替上式中的 $\frac{nd}{r_n(0)}$, 再用 $A_n(0)$ 近似代替 $A_n(x)$, 就可由(15)

得到(19)式。这说明在各 M 区域内电矢量叠加的结果和贡献最大位置处的电矢量的相位相同、而振幅随 x 变化较小, 因而等于 $A_n(0)$ 。

现在, 我们利用(19)式讨论激光加速问题。考虑到光振幅随时间的周期变化, 因而有:

$$A(x, t) = A(x) e^{-i\omega t + \alpha}. \quad (21)$$

式中 α 是初始位相, 恒为常数。另外, 相对论电子从 $x = 0$ 处运动到 x 点的时间为:

$$t = \int_0^x \frac{dx}{V} = \frac{x}{C\beta}, \quad \beta = \frac{V}{C}. \quad (22)$$

式中 V 为电子速度, C 为光速。根据文献中所推导的激光加速条件, 上式中的 β 应满足 (14) 式, 于是 (21) 式可写为:

$$A(x, t) = A(x) e^{-i k \beta^{-1} x + a} \quad (23)$$

把 (19) 式中的 $A(x)$ 代入上式有:

$$A(x, t) = \frac{d}{2y_0} \sum_{M=0}^{\infty} A_M(0) e^{-i k M \frac{\lambda}{d} x - i \varphi_M(0) + i a} \quad (24)$$

这就是相对论电子在加速轴上运动到不同位置所感受到的电场, 而电子运动距离 d 后从电场获得的能量为:

$$E = e \int_0^d A(x, t) dx = \frac{ed^2}{2y_0} A_0(0) e^{i \varphi_0(0) + a} \quad (25)$$

从表 II 中可以看出 $A_0(0)$ 相对于 $A_1(0)$, 只有 0.36%, 实际上已失去加速能力, 这就是说: 在等幅输入情况下, 利用调相光栅的远场性能进行激光加速是不可能的, 它的加速能力实际趋近于零。

四、调幅光栅的远场性能

那末, 在调幅情况下是否可用调相光栅的远场性能进行激光加速呢? 为回答这一问题, 我们设 $a_0(x)$ 具有如下性质:

$$a_0(x) = \begin{cases} 1, & (nm'_0 - \frac{1}{2})d < x < (nm'_0 + \frac{1}{2})d \\ 0, & \text{其它 } x \text{ 值} \end{cases}$$

式中 m'_0 为调幅周期, n 为整数。因此, $a_0(nm'_0 d) = 1$, 其它为零。这样, 公式 (7) 可改写为

$$A(x) = \frac{d}{2y_0} \sum_{n=-N}^N A_{nm'_0}(x) e^{i \varphi_{nm'_0}(x)} \quad (26)$$

为了计算方便, 我们把上式改写为:

$$A(x) = A_0(x) e^{i \varphi_0(x)} \quad (27)$$

式中

$$\begin{cases} A_0(x) = [A_1^2(x) + A_2^2(x)]^{1/2}, \\ \varphi_0(x) = \tan^{-1}[A_2(x)/A_1(x)], \end{cases} \quad (28)$$

式中

$$\begin{cases} A_1(x) = \sum_{n=-N}^N A_{nm'_0}(x) \cos \varphi_{nm'_0}(x), \\ A_2(x) = \sum_{n=-N}^N A_{nm'_0}(x) \sin \varphi_{nm'_0}(x). \end{cases} \quad (29)$$

根据以上公式, 我们用 666 型电子计算机计算了 $A_0(x)$ 和 $K\beta^{-1}x - \varphi_0(x)$ 的值, 列于下表中。

表IV $A_0(x)$ 和 $Q(x) = K\beta^{-1}x - \Phi_0(x)$ 随 x 的变化。取 $y_0 = 10^4\lambda$, $d = 2\lambda$, $m_0 = m'_0 = 4$, $\beta^{-1} = 1$ 。

x/m'_0d	0	0.05	0.1	0.15	0.20	0.25	0.30
$A_0(x)$	13.64	6.32	6.7	7.96	6.26	6.11	6.52
$\theta(x)$	139.45°	84.26°	114.18°	69.59°	13.55°	262.39°	136.1°

x/m'_0d	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65
$A_0(x)$	6.78	4.3	2.66	6.62	3.53	2.81	6.02
$\theta(x)$	63.22°	346.03°	114.87°	13.74°	290.68°	31.13°	17.14°

x/m'_0d	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	1
$A_0(x)$	4.24	6.06	3.23	11.63	14.99	11.05	13.64
$\theta(x)$	263.34°	70.09°	204.73°	200.85°	121.06°	91.57°	139.45°

根据表中的数据, 可以证明:

$$\int_0^{m'_0 d} A_0(x) \cos[K\beta^{-1}x - \Phi_0(x)] dx \doteq 0. \quad (30)$$

这就是说, 相对论电子经过一个调幅周期 m'_0d 后, 所感受到的平均电场强度为零, 或电场对其所做的功为零, 因而得不到加速。

总起来说, 对于调相光栅, 不论输入等幅光还是调幅光, 试图利用它们的远场性能进行激光加速是不可能的, 因为相对论电子在一个调相周期或调幅周期内所感受到的平均电场为零。这样我又用和上文(3)不同的方法, 得到了和上文完全相同的结论, 这就更充分地证明了利用调相光栅的远场性能进行激光加速的不可能性。

本工作自始至终得到李光同志和梁浩明同志的关心和支持, 以及多次有益的讨论。另外, 表I—IV的计算工作是杨天功同志完成的, 作者在此一一致以谢意。

参 考 文 献

- [1] F. Rcarlat, M. Argesanu, IEEE Trans. Nucl. Science, 1977, NS-24, 3, 1651.
- [2] 彭桓武、庄杰佳, 中国科学, 1979, 10, 953.
- [3] 翁兆恒, 光学机械, 1982, 2, 4.