

大型光学镜子的结构、支承及重力变形计算方法

中国科学院南京天文仪器厂

胡企千

摘要：本文从力学观点出发对大型光学镜子的结构、支承及重力变形进行了分析归纳。提出了支承设计的某些原则和方法。特别详细地讨论了镜子重力变形的圆板分析解，结出了多点支承的、具有中央圆孔的圆板变形解法，最后介绍了镜子变形计算的数值分析方法。

一、引言

大型光学镜子在天文仪器及其他用途的光学探测器中的地位无疑是十分重要的。它的精度直接决定了仪器的精度，它的重量在一定意义上也决定了整合仪器的重量乃至仪器的造价。例如，对于过去几十年各国生产的天文望远镜进行了统计，仪器重量大约与主镜口径的2.4次方成正比而价格大约与口径的2次方成正比⁽¹⁾。由此可见，如何精心地选择镜子形状以及合理的支承方式，努力减轻镜子的重量是多么重要。而这一点又是和镜子在各个位置上的重力变形密切相关的。

有关大型光学镜子的支承及重力变形计算方法已在一些文章中阐述过。不过，这些多为针对某些具体的望远镜设计的研究。对此课题进行一般的理论探讨可以说是比较困难的，原因是：

(一) 它不仅是一个力学问题，而且是一个技术问题即设计和工艺的问题。镜子的材料、制作工艺、结构形状和支承方式之间是密切相关不可分离的。特别是由于近年来新工艺新技术的应用出现了较多种类的镜子结构和支承方式，很难用统一的力学模型加以描述。

(二) 虽然大型电子计算机和大规模结构分析程序的应用，使得对某一具体的力学模型进行结构分析已不是难事，然而要得出镜子变形的一般规律，或某些简单易行的公式、算法尚有不少困难。而后者正是仪器设计者所迫切需要的。这一点正如光学设计：要计算一个光学系统的象差并不困难，但要用象差理论来指导光学系统的设计却不是一件易事。

本文试图从力学观点对各类支承方式下的各类光学镜子的重力变形计算方法作一初步分析归纳，以期对大型光学仪器的设计者提供必要的理论依据和设计手段。

本文特别对于多点支承的圆板变形计算进行了比较详细的讨论，给出了具有中央圆孔的多点支承圆板的算法。圆板理论用于镜面变形分析有两方面的意义，它不仅是解算作为最有希望的新型大望远镜主镜的形式——薄镜面——的有效方法，而且对于其他类型镜子的初步变形计算也是有效的。

二、关于镜子结构和支承形式的一般评述

(一) 镜子结构

传统的镜子结构是实心圆柱盘（可以带有中央圆孔，图1a）。这种镜子的优点是其本身刚度好，加工、安装和调整比较方便。早期的望远镜主镜多为这种结构。

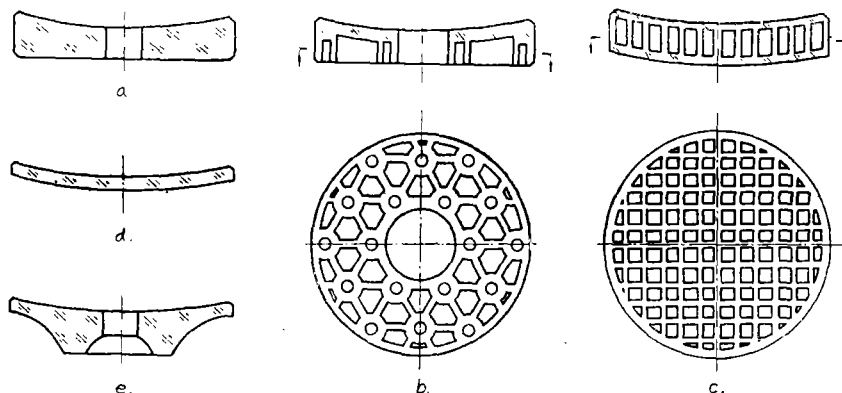


图 1

当研制更大的望远镜时，为获得足够的刚度，这种结构显得很重。这不仅使镜子以至整台仪器的重量和造价大到不能使人接受的地步，而且在传统的机械支承上产生很大的变形和应力。因此美国海尔天文台的5米镜、基特峰天文台的4米镜以及苏联专门天体物理台的6米镜都采用另一种结构——蜂窝结构（图1b）。这是一种带筋板的结构，筋板的许多交点上就是侧支承的支承孔。

不过，由于采用了气囊、气垫和小银带侧支承，在一定程度上改善了支承力分布的均匀性，再加上蜂窝结构的制作工艺毕竟比较复杂，因此一、二十年来制造的天文望远镜大多数仍然采用实心圆柱盘镜子，包括正在研制中的英国4.2米镜等。

美国新研制成功的多镜望远镜(MMT)的单块镜子采用了新的轻型结构——所谓“蛋格”结构(2)。它是由上下两层薄板中间夹以交错格栅薄片制成的，我们称之为“空心板”结构(图1c)。

新型望远镜的一种趋势是采用所谓“主动光学”，包括所谓“主动结构”和“主动镜面”。后者是指很薄的镜子(图1d)，本身刚度很小，很轻，其形状要由支承力的分布大小来决定。薄镜子的最大优点是重量轻、镜坯工艺简单。但对支承力的精确度却要求很高，一般不超过1%。作为正在酝酿中的美国25米望远镜的一种方案是考虑采用径厚比大到100的薄镜子(3)。对于一般的光学镜子，只要支承设计合理，也可采用薄镜子。例如对于空间望远镜就要求主镜重量很轻，薄镜子也是可考虑的方案之一。

作为单块轻型镜子的另一种类型，是所谓的“拱型”或“碟形”结构(图1e)。虽然到目前为止尚未见到大望远镜上采用这种结构的镜子，但已经在这方面有过理论和实践的研究(4)、(5)。作者认为这种结构对于4米以下的镜子是可行的。这种结构是建立在实心圆柱盘基础上的，但是由于合理地分布了镜子材料，使得一块4米的镜子仅仅采用相当于径厚比为

18的薄镜子的材料，而其本身仍然不失为一块刚性较强的实心镜子，在支承方式上却比薄镜子简单得多。

从散热和热平衡的观点出发，当然空心结构（包括蜂窝结构和空心板结构）比实心结构好，薄镜子比厚镜子好，但这不在本文的讨论之列。

（二）支承类型

为了确定镜子的位置，应消除它的6个刚体自由度；如不计它绕光轴的转动自由度，则也有5个自由度应加约束。对大型镜子来讲这些约束就是若干刚性支承点，一般有3个底支承、2个侧支承就足以消除其全部刚体自由度。刚性点超过这个数目，就不能保证每一个点都与镜子接触。支承点数目等于要消除的刚体自由度数，这样的支承方式称为静定支承（图2a）。静定支承的支承力可由镜子的刚体平衡求出。静定支承只适用于较小的镜子，例如对实心圆柱盘镜子一般用于直径40cm以下的情况。

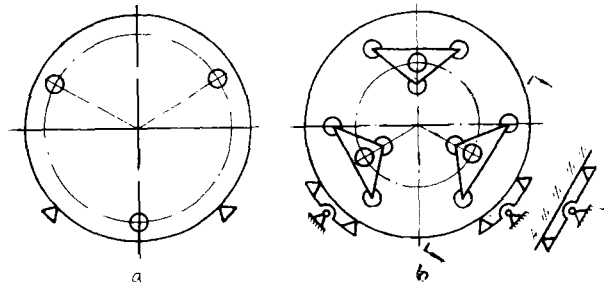


图 2

对于稍大一些的镜子，常常采用浮动支架支承（图2b）。这种支承在〔2〕中称为“摇板式”支承，在〔6〕中称为“Grubb”系统。它是在每一个静定的支承点上通过一个刚性的浮动支架，把支承点数扩大为2或3，再作用于镜子。由于浮动支架本身是静定的，因此作用于镜面的支承力的大小并不彼此独立，而是服从静力平衡规律的，它们的比例可由浮动支架的杠杆比来确定。因此，对支承力来讲，它是一个静定系统，但对镜子弹性变形来讲它是一个超静定系统。由于作用于镜子上的支承点数的增加，镜子的重力变形得到了改善。浮动支架结构的层次并不限于2层，例如曾有人用4层（第4层为81个支承点）来支承过 $\phi 1820\text{mm}$ 的望远镜主镜〔7〕。浮动支架支承的优点是结构简单，支承力的分布静定易算，缺点是它的支承力分布只能服从一些简单的死的规律，没有调整的余地。

广泛用于大型镜子的支承系统是由固定支承点和浮动支承（点）结合而成的支承系统。固定支承点起定位作用而浮动支承（点）起卸荷作用。这样支承系统就成为超静定系统了。作为超静定系统，在分析镜子变形之前先要确定支承力。下面列出几种浮动支承，并说明它们的支承力是怎样确定的。

1. 杠杆重锤（图3）。杠杆重锤系统被广泛采用于2米以下的主镜支承（包括侧支承和底支承）。正在研制中的我国2.16米望远镜主镜即全部采用杠杆重锤系统。杠杆重锤系统的优点是对于不同的镜子位置（不同的天顶距），各浮动点的支承力自动适应重力方向变化而同步变化（在这种情况下，固定支承点上的力基本上也按同样比例改变，不会发生局部出现很大的支承力的现象），而不需要其他自动控制系统。底支承和侧支承的杠杆重锤系统可以分开互相

独立(图3a),也可以结合起来构成一个部件(图3b)。美国基特峰国立天文台的2.1米镜就是后一种设计⁽⁷⁾。杠杆重锤系统的支承力是人为调节的。

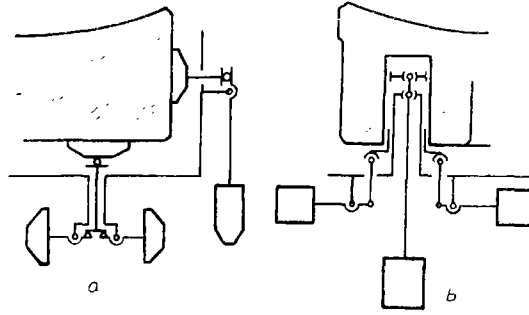


图 3

2. 气囊和气垫(图4a和b)。气囊和气垫比杠杆重锤结构简单,但需要有一适应镜子位置变化的自动供气系统。一般气垫是一些“点”而气囊可以是点也可以是环或面。例如英国2.5米牛顿望远镜主镜的底支承是三个环的气囊,美国海军天文台1.5米镜的底支承是面型的气囊支承⁽¹⁾。气囊容易构成压力均匀连续支承,是比较理想的大型镜子的支承形式。气囊和气垫的支承力也是可以人为调节的。

3. 水银带(图4c)。水银带一般只用于侧支承,例如美国海军天文台的1.5米镜和英澳同春山天文台3.8米镜等⁽¹⁾。如图,当镜子处于垂直位置时,镜子圆周上所受到的法向压力为

$$q(\varphi) = [R(1 - \cos \varphi) + \delta] \rho \cdot b$$

式中 R 为镜子半径, b 为水银带宽度, ρ 为水银比重, δ 为水银带厚度,也等于镜子与镜室壁之间的间隙,一般很小可以忽略不计。这里附带说明一下水银带宽度 b 与镜子重量 G 的关系。根据阿基米德定理,如果被镜子“排开”的水银重量正好等于镜子重量,即

$$\pi R^2 \cdot b \cdot \rho = G$$

则镜子完全而且正好浮在水银中,不需要其它支承来承受其重量。因此

$$b = \frac{G}{\pi R^2 \cdot \rho}$$

5. 钢带(图4.d)。钢带一般用于固定位置的侧支承,如镜子水平检验等情况。例如无圆周方向摩擦(不利的摩擦可用一些滚子来消除),则可以假设钢带作用于镜子的法向压力处处相等,为 q ,由静力平衡得

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} q R \cdot \sin \theta \, d\theta = G$$

$$q = \frac{G}{2R}$$

上述支承中后三种的支承力是连续分布的(单个气垫除外)。在进行镜子变形的数值分析时可将这些力离散压为一系列间断点上的支承力。

在新的“主动镜面”概念中,摒弃了“定位”支承点与“卸荷”支承点的概念,代之以“主动”支承点与“被动”支承点;被动支承点采用气囊,主动支承点采用可调压力的气

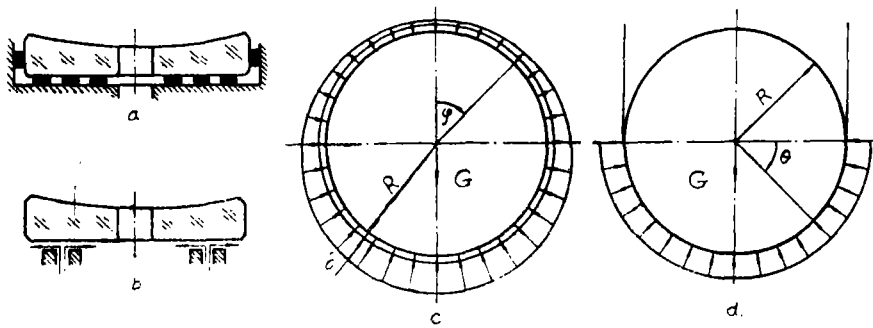


图 4

垫，主动支承点不仅决定了镜子的刚体位置，而且可使镜子形状调整得十分完美⁽²⁾。

(三) 有关支承设计的一些原则和方法

1. 约束原则和优化设计变量

镜子支承系统的优化设计当然以镜子表面变形为目标函数，但对不同的支承系统和不同的设计观点可有不同的设计变量。

上面已讲静定支承系统的支承力大小由支承点分布的几何位置决定，位置确定后不能作人为的调整，而且即使支承力有某种变化也不能影响镜子变形，只能使之产生运动。故而在力学分析时应把静定支承看作是一种“位移约束”，即支承点上沿镜子表面法线方向的位移为零。适当调整支承点位置，可以使镜子表面变形最小。因此，静定支承系统应以支承位置为设计变量。

虽然超静定支承系统同样可以选择支承力来满足支承点位移为零的条件。但这往往不是最好的支承系统，因为支承点位移为零不是优化的目的。选择支承力的原则应该是下面两种考虑：

a. 单纯考虑镜子表面变形最小，在此情况下支承位置和浮动支承点（或圈）的支承力都可用作优化设计变量；

b. 使镜子表面变形最小，但还希望各支承点有差不多的支承力。这主要是从简化设计和工艺的目的出发的。这时应以支承位置为设计变量。

因此，对于超静定支承系统，除了少数固定点应处理为位移约束外，大多支承点都应处理为荷载（即力的约束）。这样就扩大了设计变量的范围，更容易获得最优结构。这是一个重要的概念。

2. 初步设计时支承的分布应尽量均匀、匀称。不仅是底支承应分布均匀，最好侧支承也分布到镜子平面的各个部位。

计算结果表明：对于沿镜子平面均匀分布侧支承的镜子，镜子变形主要是水平放置位置下的变形。当然在此情况下，也要注意使侧支承力作用于镜子的垂轴重心平面内，以免产生附加的力矩。如果侧支承仅仅集中在边缘上，则要充分注意镜子垂直位置的变形。Malvick曾通过大量计算分析过侧支承作用下的镜子变形⁽⁸⁾。发现一点支承与两点支承引起很大的局部变形，钢带支承不如正弦支承，法向力作用的支承不如平行垂直力作用的支承，最后，单是下半周分布的支承不如上拉下推的支承。对1米以上的镜子应充分注意到这一点。

3. 为使支承分布均匀并使支承力基本相等，在初步设计时可將镜子粗略地分为若干重

量相等的小块，每一支承作用于小块的重心上。Mack 在文〔9〕中介绍了英国4.2米镜的支承设计（图5）。由于4.2米望远镜是地平式装置，镜子上各点的运动都处于互相平行的垂直平面内，因此在设计侧支承时，先将镜子用若干平行的垂直平面分割为若干重量相等的长条，每一条底部有一支承点，而且支承力作用于通过每一条的重心的重力线方向（不是沿镜子的径向）。

4. 尽可能消除支承摩擦力。由于材料膨胀不一以及由于弹性变形引起的支承摩擦力是有害的，应设法消除。消除摩擦的方法有采用滚动摩擦或气垫等〔2〕。

5. 关于多支承点的排列形式，经 Nelson 等人的研究发现，对多点支承的无限大平板（当镜子很大，底支承点很多时可以接近于这种情况），在可能呈现的各点同形（即对任意一点，它周围各点的排列形式都一样）的三种几何排列中，等边三角形的支承效率最高。所谓“支承效率”是这样定义的，按薄板理论，变形与每个点所分担的面积有关：

$$\delta_{r.m.} = \gamma_N \frac{q}{K} \left(\frac{A}{N} \right)^2$$

式中， $\delta_{r.m.}$ 是变形均方根值， A 为板面积， N 为支承点数， q 为荷载强度， K 为板的弯曲刚度， γ_N 为“支承效率”。

三种几何排列的支承效率分别是：

$$\begin{aligned} \text{正六角形} \quad \gamma_6 &= 2.36 \times 10^{-3} \\ \text{正方形} \quad \gamma_4 &= 1.33 \times 10^{-3} \\ \text{等边三角形} \quad \gamma_3 &= 1.19 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

因此认为三角形几何排列的支承效率可以作为衡量底支承效率的一种极限。一般在圆形镜子上安排底支承不容易做到等边三角形，因此不可能达到这个极限，但应尽量采用接近等边三角形的排列。

三、镜子表面变形的评价

镜子表面变形带来了光学性能的降低，因此毫无疑问应该用光学性能的降低程度来评价。主要方法有两种：一种是计算变形引起的反射光线的转角（镜面的倾斜）；另一种是计算变形引起的波面误差（镜面的起伏）。文〔11〕认为第一种方法适用于波面误差比波长大的情况，而第二种方法适用于波面误差比波长小的情况。至于中间情况则要完整地应用光的物理理论。天文光学多为小象差系统，因而比较适合用第二种方法。

根据瑞利准则，波面误差不应超过 $\frac{\lambda}{4}$ 。如果忽略镜子表面本身的弯曲，则对反射面来讲要求其轴向变形不大于 $\frac{\lambda}{8}$ 。但在考虑镜面加工误差和表面变形计算误差后最好取 $\frac{\lambda}{16}$ 为容限。

一般镜面变形用许多表面点相对于某一“吻合面”的轴向偏差的均方根值来表示。之所以用“吻合面”而不是用理论反射面来衡量镜面变形，是为了放宽对变形的容限。吻合面同

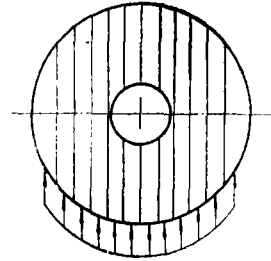


图 5

样也是一个旋转曲面，但它的焦距和光轴方向都允许有小量的变动。文^[6]指出了水平放置的抛物面镜面的最佳吻合面的求法。作为最简单的一种吻合面是将理论反射面平移表面点位移的算术平均值后得到的一个旋转曲面。这时表面误差可表示为

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \bar{\Delta}_i^2}{n}}$$

$$\bar{\Delta}_i = \Delta_i - \Delta_0 = \Delta_i - \frac{\sum_{i=1}^n \Delta_i}{n}$$

式中 n 为表面点数， Δ_i 表示表面点位移， Δ_0 表示表面点位移的算术平均值。在轴对称模型中，由于各点所代表的表面积不同（假定各点间距相同），则应加进权因子^[5]：

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \left(\frac{r_i}{\sum_{i=1}^n r_i} \right) \bar{\Delta}_i^2}{n}}$$

式中 r_i 第 i 个环的半径。

一般镜子变形计算只须计算水平位置和垂直位置两种状态，而其他位置的表面变形可以粗略地归结为这两种变形的矢量合成。于是可把光学镜面的变形限制归结为

$$\delta_{\text{水平}} \leq \frac{\lambda}{16}$$

$$\delta_{\text{垂直}} \leq \frac{\lambda}{16}$$

有时镜面变形也可用相对于某一参考面的最大变形 $\bar{\Delta}_{\dots}$ 来表示。对于多点支承的薄镜子，最大变形大致为均方根变形的 5 倍。在本文下面要分析的圆板变形中，为方便和安全起见，要求水平位置下，

$$\bar{\Delta}_{\dots} \leq \frac{\lambda}{16}$$

因为当支承点太少时，最大变形与均方根变形之间就不一定是 5 倍的关系。

四、镜子重力变形的圆板理论分析

（一）圆板理论的适用性

连续支承（单圈或多圈）的圆板弯曲有直接的弹性力学分析解；对于多点支承的情况也可找到它的级数解；而一圈以上的支承点数达到六人以上时其结果又接近连续支承。因此用圆板理论来指导镜子的初步设计是很有好处的。一般望远镜主镜焦距与口径之比都达到 3 以上，故而镜子都比较扁平，接近于圆板形状。少数弯曲得很厉害的镜子是不宜用圆板理论分析的。

圆板理论适用于支承跨距与板厚之比大于 5—8 的情况。因此薄镜子首先符合这一条件，圆板理论用于薄镜子可获得很高精度的解。对于实心圆柱盘镜子（一般径厚比为 6—8），在单圈连续支承和单圈多点支承的情况圆板理论也是适用的；对于多圈多点支承情况，

由于薄板理论忽略了剪应变的影响，而有较大的误差，但可用下面的公式来粗略地加以修正：

$$\delta_{\text{总的}} = \delta_{\text{弯曲}} \left[1 + \alpha \left(\frac{h}{u} \right)^2 \right],$$

式中 u 为有效跨度， α 为常数。对于下述两种情况 α 有推荐值：

1. 边界连续支承情况： $u = D$ （镜子直径）， $\alpha = 0.7$ ；
2. 优化得比较好的多点支承情况^[11]： $u = \frac{D}{\sqrt{N}}$ ， $\alpha = 2$ 。

式中 N 为支承点数目。

空心板镜子在初步计算时也可用圆板理论，其弯曲刚度是（当 $H \gg h$ 时）：

$$K = \frac{2E}{1-\nu^2} \int_{\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}+h} z^2 dz \approx \frac{H^2 h}{4(1-\nu^2)}$$

式中 H 为上下面板之间的距离， h 为面板厚度。

（二）规化圆板变形和圆板径厚比公式

1. 连续支承圆板在均布荷载作用下任意点的挠度 w 与 $\frac{qa^4}{K}$ 成正比， q 为荷载强度， a 为圆板半径， K 为弯曲刚度。从下面将要讨论的多点支承情况看，这个关系也是存在的。因此，可以将挠度（圆板变形）规化为

$$\bar{w} = \frac{w}{qa^4/K} \quad (1)$$

将下列关系式

$$q = \rho' h \quad (\rho' \text{ 为比重, } h \text{ 为板厚}),$$

$$a = \frac{D}{2} \quad (D \text{ 为圆板直径}),$$

$$K = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (E \text{ 为弹性模量, } \nu \text{ 为泊松比})$$

代入(1)式得（一般镜子材料 $\nu = 0.25$ ）

$$\bar{w} = 1.42 \frac{E}{\rho'} \frac{h^2}{D^4} w \quad (2)$$

如果 ω 是镜面各点的最大变形差，且取 $\frac{w}{2}$ 作为衡量变形的基准，则按变形容差要求

$$\bar{w}_{\text{max}} = \frac{w}{2} \leq \frac{\lambda}{16} = 3.47 \times 10^{-6} \text{ cm} \quad (\text{取 } \lambda = 5550 \text{ \AA})$$

代入(2)式整理后得

$$\left(\frac{D}{h} \right) \cdot D \leq \sqrt{\frac{9.85 \times 10^{-6} E}{\rho' w}} \quad (\text{cm}) \quad (3)$$

几种常用镜子材料的 $\frac{E}{\rho'}$ 值是：

普通光学玻璃	3.0×10^8 cm
派勒克斯玻璃	2.8×10^8 cm
熔石英	3.4×10^8 cm
微晶玻璃	3.3×10^8 cm

取平均数 $\frac{E}{\rho} = 3 \times 10^8$ 代入(3)式得

$$\left(\frac{D}{h}\right) \cdot D \leq \frac{54.4}{\sqrt{w}} \quad (\text{cm}) \quad (4)$$

(三) 单圈连续和点支承圆板变形算法

1. 单圈连续支承圆板变形公式

采用符号:

- a 圆板外半径,
- b 支承半径,
- c 圆板内孔半径,
- r 所考虑的变形点的半径,

$$\alpha = \frac{c}{a}, \quad \beta = \frac{b}{a}, \quad \rho = \frac{r}{a}.$$

无孔圆板变形公式 (图6b):

$$\bar{w} = \begin{cases} \frac{1}{8} \left\{ \frac{1-\beta^2}{2} \left[\frac{(3+v) - (1-v)\rho^2}{1+v} \right] - \frac{1-\rho^2}{8} \left[\frac{5+v}{1+v} - \rho^2 \right] + (\beta^2 + \rho^2) \ln \beta \right\} (\rho \leq \beta) \\ \frac{1}{8} \left\{ \frac{1-\rho^2}{8} \left[\frac{(7+3v) - 4(1-v)\beta^2}{1+v} + \rho^2 \right] + (\beta^2 + \rho^2) \ln \rho \right\} (\rho \geq \beta) \end{cases} \quad (5)$$

有孔圆板变形公式 (参考^[10]和^[11]):

$$\bar{w} = \bar{w}_1 + \bar{w}_2 \quad (6)$$

其中 (图6c和d):

$$\bar{w}_1 = \frac{1}{32(1+v)} \left[(3+v) - \alpha^2(3+v) + 4(1+v) \frac{\alpha^4}{1-\alpha^2} \ln \alpha \right] (1-\rho^2) - \frac{1-\rho^4}{64} - \frac{\beta^2}{16(1-v)} \left[(3+v) + 4(1+v) \frac{\alpha^4}{1-\alpha^2} \ln \alpha \right] \ln \rho - \frac{1}{8} \alpha^2 \rho^2 \ln \rho \quad (7)$$

$$\bar{w}_2 = \begin{cases} \frac{1-\beta^2}{16} \left\{ \left[-\frac{1-v}{1+v} - \frac{2(1-\alpha^2)}{1-\beta^2} + \frac{2\alpha^2}{1-\beta^2} \ln \beta \right] (1-\rho^2) + \left[2\alpha^2 - \frac{2(1-\alpha^2)(\beta^2 + \rho^2)}{1-\beta^2} \right] \ln \rho - \frac{4(1+v)\alpha^2}{(1-v)(1-\beta^2)} \ln \beta \ln \rho \right\}, (\rho \geq \beta) \\ \frac{1-\beta^2}{16} \left\{ \left[-\frac{1-v}{1+v} (1-\rho^2) - 2(1-\alpha^2) \right] + \frac{2(\alpha^2 - \rho^2) - 2\beta^2(1-\alpha^2)}{1-\beta^2} \ln \beta + 2\alpha^2 \ln \rho - \frac{4(1-v)\alpha^2}{(1-v)(1-\beta^2)} \ln \beta \ln \rho \right\} (\rho \leq \beta) \end{cases} \quad (8)$$

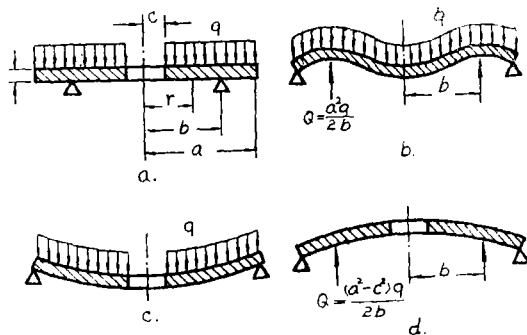


图 6

2. 单圈多点支承

采用符号:

θ 极坐标辐角

k 支承点数

m 级数项号

$$n = km$$

多点支承情况由于轴对称性的破坏无法求得连续的分析解, 但可得到三角级数解, 其形式是

$$\bar{w} = \bar{w}_0 + \bar{w}_s \quad (9)$$

式中 \bar{w}_0 为外缘连续支承的无孔或有孔圆板变形解, 即式 (5) 或 (6); \bar{w}_s 是级数部分:

$$\bar{w}_s = \sum_{m=1}^{\infty} \bar{w}_m \cos km\theta \quad (10)$$

式中:

$$\bar{w}_m = \begin{cases} A_m \rho^n + B_m \rho^{n+2} + C_m \rho^{-n} + D_m \rho^{-n+2}, & (\rho \geq \beta) \\ A'_m \rho^n + B'_m \rho^{n+2} + C'_m \rho^{-n} + D'_m \rho^{-n+2}, & (\rho \leq \beta) \end{cases} \quad (11)$$

式中系数分无孔和有孔情况分别说明如下。

A) 无孔圆板(11)式之系数给出如下:

$$\left. \begin{aligned} A_m &= \frac{\beta^n}{8(3+v)} \left[(1-v) \left(\frac{1}{n-1} - \frac{\beta^2}{n} \right) + \frac{8(1-v)}{n^2(n-1)(1-v)} \right] \\ B_m &= -\frac{\beta^n}{8(3+v)} (1-v) \left(\frac{1}{n} - \frac{\beta^2}{n+1} \right), \\ C_m &= -\frac{\beta^{n+2}}{8n(n+1)}, \\ D_m &= \frac{\beta^n}{8n(n-1)}, \\ A'_m &= A_m + \frac{\beta^{-n+2}}{8n(n-1)}, \\ B'_m &= B_m - \frac{\beta^{-n}}{8n(n+1)}, \\ C'_m &= D'_m = 0 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

B. 有孔圆板 由本文作者导出, 限于篇幅只列出结果, 详细推导将在另外文章中给出。

A_m 、 B_m 、 C_m 、 D_m 由下面线性方程组确定:

$$\begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_2\alpha^n & b_2\alpha^{n+2} & c_2\alpha^{-n} & d_2\alpha^{-n+2} \\ a_3\alpha^n & b_3\alpha^{n+2} & c_3\alpha^{-n} & d_3\alpha^{-n+2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_m \\ B_m \\ C_m \\ D_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$\begin{cases} A'_m = A_m + a_1 \\ B'_m = B_m + b_1 \\ C'_m = C_m + c_1 \\ D'_m = D_m + d_1 \end{cases} \quad (14)$$

式中

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{(1-\alpha^2)\beta^{-n+2}}{8n(n-1)}, \\ b_1 &= -\frac{(1-\alpha^2)\beta^{-n}}{8n(n+1)}, \\ c_1 &= \frac{(1-\alpha^2)\beta^{n+2}}{8n(n+1)}, \\ d_1 &= -\frac{(1-\alpha^2)\beta^n}{8n(n-1)}, \\ a_2 &= (1-\nu)n(n-1), \\ b_2 &= (n-1)[n+2-\nu(n-2)], \\ c_2 &= (1-\nu)n(n+1), \\ d_2 &= (n-1)[n-2-\nu(n+2)], \\ a_3 &= a_2n, \\ b_3 &= n(n+1)(n-4-\nu n), \\ c_3 &= -c_2n, \\ d_3 &= -n(n-1)(n+4-\nu n), \\ u_3 &= a_1a_2\alpha^n + b_1b_2\alpha^{n+2} + c_1c_2\alpha^{-n} + d_1d_2\alpha^{-n+2}, \\ u_4 &= a_1a_3\alpha^n + b_1b_3\alpha^{n+2} + c_1c_3\alpha^{-n} + d_1d_3\alpha^{-n+2}. \end{aligned}$$

计算结果表明, 三角级数收敛很快, 一般只要取前 3 项已足够了。

(四) 单圈连续和三点支承镜子的圆板分析结果

我们感兴趣的是两种典型的支承圈位置：边缘支承和“最佳支承”。所谓“最佳支承”不妨定义为使内外缘变形（对三点支承而言是内缘或外缘上变形的平均值）相等的支承圈位置，这样定义虽然比较粗糙但却十分简单。于是根据上述算法作者求得下面四种情况的最大变形 \bar{w} 、径厚限制 $\left(\frac{D}{h}\right) \cdot D$ 以及最佳支承圈位置 β^* ：

边缘连续支承： $\left(\frac{D}{h}\right) \cdot D \approx 200$

表 1

α	0	0.1	0.2	0.3
\bar{w}	0.0656	0.0700	0.0750	0.0758
$\left(\frac{D}{h}\right) \cdot D$	212	205	199	196

最佳单圈连续支承： $\left(\frac{D}{h}\right) \cdot D \approx 1200$

表 2

α	0	0.1	0.2	0.3
β^*	0.677	0.678	0.689	0.710
\bar{w}	0.0023	0.0023	0.0020	0.0014
$\left(\frac{D}{h}\right) \cdot D$	1130	1130	1216	1454

外缘三点支承： $\left(\frac{D}{h}\right) \cdot D \approx 160$

表 3

α	0	0.1	0.2	0.3
\bar{w}	0.1130	0.1178	0.1210	0.1212
$\left(\frac{D}{h}\right) \cdot D$	162	158	156	156

最佳三点支承 $\left(\frac{D}{h}\right) \cdot D \approx 310$

表 4

a	0	0.1	0.2	0.3
β^*	0.674	0.675	0.686	0.708
\bar{w}	0.0300	0.0300	0.0304	0.0321
$\left(\frac{D}{h}\right) \cdot D$	314	314	312	304

对于上述四种情况，各种尺寸镜子所要的径厚比如下：

表 5

D (cm)		10	20	30	40	50	80	100	120	150	200
$\frac{D}{h}$	边缘三点支承	16	8	5.3	(4)	(3.2)	(2)	(1.6)	(1.3)	(1.1)	(0.8)
	边缘连续支承	20	10	6.7	5	(4)	(2.5)	(2)	(1.7)	(1.3)	(1)
	最佳三点支承	31	15.5	10.3	7.8	6.2	(3.8)	(3.1)	(2.6)	(2.1)	(1.6)
	最佳连续支承	120	60	40	30	24	15	12	10	8	6

上面表格中粗折线左边的径厚比是可以接受的，右边就不经济了；而且当径厚比太小时，圆板理论的误差很大，所以括弧内的数字是不可靠的。另外，虽然最佳单圈支承所允许的镜子尺寸很大，但鉴于当镜子尺寸增大时支承附近的应力迅速增大，故虚线之右的尺寸是不宜采用的。

(四) 多圈连续支承和多圈点支承的圆板变形算法及支承优化

多圈支承圆板是超静定结构，上面已讲，对超静定情况没有必要使支承点位移为零；相反，各圈支承力的比例倒是可以自由选择。在此情况下，多圈支承下圆板变形可归结为若干单圈支承下圆板变形之加权和。即

$$w(\rho, \theta) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i w_i(\rho, \theta)$$

式中 ε_i 为第 i 圈引起的变形的权：

$$\varepsilon_i = \frac{g_i}{G},$$

g_i 为第 i 圈的支承力， G 为圆板重量。

作为一个特例，单圈 6 点支承圆板变形是两组 3 点支承圆板变形之加权和。计算表明，6 点支承效果大体上已接近连续支承。

由于圆板模型算法的简便,使支承点的优化成为可能。Nelson 等在计算机上用标准非线性函数的优化程序对无孔圆板从2点到36点支承系统进行了优化计算,目标函数采用变形的均方根值;设计变量是每一圈的点数、圈半径以及支承力。他们的计算结果对于多点镜面支承设计很有参考价值,本文将其列入附录中。

五、镜子重力变形的数值分析方法

对大多镜子来说,仅用圆板变形分析是不够的,特别是在设计的后一阶段应用更为精确的数值分析方法。

弹性力学问题的数值解法主要是差分法和有限元法两类。

Malvick(1972)用“动态松弛”(dynamic relaxation)法,并应用非正交曲线坐标系,解算了一块230厘米镜子和一块154厘米镜在各种支承位置下的变形⁽⁹⁾。这是属于差分法类型的解法。

六十年代发展起来的并在七十年代得到突飞猛进发展的有限元法,目前已广泛用于各个工程领域。它的最显著的优点是用统一的观点和计算格式来解算复杂边界和荷载的弹性体的变形(以及动力问题、稳定问题、温度场问题、塑性问题 and 断裂力学问题等等),从而使得工程力学问题的计算前的数据准备和问题本身的解法原理分离开来,使得不熟悉弹性理论和计算数学的工程技术人员也能计算复杂的弹性力学问题。目前国内外已有不少大规模的通用有限元程序,例如我国已引进并广泛使用的SAP-5程序就是其中之一;同时国内各单位也编制了许多有限元程序,其中许多是可以用于镜子变形计算的。工程技术人员可以直接使用这些程序,当然如能掌握其算法原理则更为主动。

一般来讲大多数镜子最好用三维模型求解。例如用20节点或8节点六面体等参单元等,计算精度可以较高。低精度单元如四面体常应变单元也可用来解算,不过一定要将网格划得很细才能得到满意的精度。解算三维有限元问题需要大量的内存,并要有更大的外存作为缓冲,在中小型计算机上算题是有困难的,甚至是不可能的。正在研制的英国4.2米望远镜主镜在两种位置下的重力变形已由Mack用三维单元算出⁽⁹⁾。计算是在IBM360/195机上进行的。

具有连续圈支承的圆柱盘镜子在水平位置下的重力变形可用有限元轴对称模型来计算。用轴对称模型来解算空间问题,使得三维问题从形式上降低到二维,因此所需机器容量大为减少,一般在中小型机器上都可以解算。而且由于内存的富裕,可以将网格划得很细,因此即使用低精度单元(例如常应变三角形截面环单元)也能得到满意的结果。

轴对称模型的分析时间短(一般只要几十秒钟到几分钟),因而使得镜子结构与支承的优化设计成为可能⁽⁵⁾。对于比较接近轴对称问题的镜子(例如一圈上支承点比较多的镜子)在初步分析时应尽量利用轴对称算法。

Mack 在计算4.2米镜水平位置变形时采用了轴对称四边形(环)单元,他通过计算来确定所使用的支承环的数目和位置⁽⁹⁾。本文作者曾用简单的三角形(环)单元对他的结果进行了核算,结果十分接近。作为25米多镜望远镜主镜的设想之一的薄镜子模型(直径10米厚10厘米)准备用多圈多点支承,在确定圈数和圈半径时也采用了轴对称模型⁽²⁾。

轴对称结构在非对称荷载作用下的变形仍然可用轴对称算法求解,只不过要对荷载和位移沿圆周进行富氏级数展开,并在刚度阵中包含环向分量因素。这种算法可以用来解算垂直

放置下的镜子变形，有关算法可参考^[12]。

用有限元薄板薄壳和厚板厚壳模型来计算镜子的重力变形也是减少计算容量、节省计算机时的一种方法。用这些方法同样也能对支承点进行优化计算。厚板厚壳因考虑了板的剪应变而获得较高的精度，适用于较厚的镜子计算。这些算法可参考^[13]。

空心结构可以用板壳与杆（梁）的组合结构来简化计算，中间筋板可处理成抗弯梁也可以处理成平面应力单元。

总之，有限元结构分析中结构模型是多样化的，不从局限于某一种模型中。由于大型计算机的费用很高，故而在初步分析时应尽量采用简化的模型以便在中小型计算机上计算（采用简化模型在大型计算机上也是合算的）。

有限元计算中数据准备的工作量是很大的，对于像镜子这样的有规则的几何体可以编制自动生成初始信息的子程序以减少输入数据量，并避免数据出错。

最后，数值分析还应与模型试验结合起来，用模型试验来验证算法的正确性。

附录 无孔圆板优化支承参数^[11]

支承点总数 N	优化变量数	支承效率系数 $\gamma \times 10^3$	变形峰值均方根											
1	0	2.60	3.8											
2	1	8.56	3.9	$\beta =$.3538									
3	1	5.76	4.2	$\beta =$.645									
6	1	2.93	4.3	$\beta =$.681									
7	2	2.36	4.9	$h =$ $\beta =$ $\Sigma =$ $\phi =$	1 0 .1487 0	6 .7542 .8513 0								
9	5	3.76	5.0	$h =$ $\beta =$ $\Sigma =$ $\phi =$	3 .2825 .2309 0	3 .7936 .3637 0	3 .7700 .4054 1.0472							
12	6	1.94	5.1	$h =$ $\beta =$ $\Sigma =$ $\phi =$	3 .3151 .2783 0	3 .7662 .2843 1.0472	3 .8257 .2187 .3497	3 .8257 .2187 -.3492						
15	7	2.32	5.4	$h =$ $\beta =$ $\Sigma =$ $\phi =$	3 .3192 .2833 0	3 .7765 .2046 .7833	3 .8412 .1538 .2615	3 .7765 .2046 -.7833	3 .8412 .1538 -.2615					
18	9	1.89	5.5	$h =$ $\beta =$ $\phi =$ $\Sigma =$	3 .4741 .1625 0	3 .3195 .2071 1.0472	3 .8171 .1731 .7820	3 .8536 .1421 .2663	3 .8171 .1731 -.2663	3 .8536 .1421 -.2663				
27	14	1.65	5.7	$h =$ $\beta =$ $\Sigma =$ $\phi =$	3 .2044 .1152 0	3 .8740 .1049 1.0472	3 .4777 .1347 .3399	3 .5555 .1162 .4280	3 .8787 .0955 .8383	3 .8574 .1110 -.3399	3 .5555 .1162 -.4280	3 .8787 .0955 -.8383	3 .8574 .1110 -.8383	
36	9	1.63	6	$h =$ $\beta =$ $\Sigma =$ $\phi =$	6 .2569 .1671 0	6 .5771 .1812 .2641	6 .5771 .1812 .7823	6 .8830 .1549 .1703	6 .8874 .1607 .5236	6 .8830 .1549 -.8769				

i —支承组组号
 h —支承组点数
 β —支承组相对半径
 Σ —支承组荷载权重
 ϕ —支承组相位角
 $\delta_{r.m.} = \gamma \frac{q}{K} \left(\frac{A}{N} \right)^2$
 A —圆板面积
 K —板弯曲刚度
 q —荷载强度

参 考 文 献

- [1] 南京天文仪器厂,“国外大型天文光学望远镜发展现状”,1977.
- [2] 南京天文仪器厂译,天文仪器1981第三集,55,
- [3] 同上, P100.
- [4] P.C.Talapatra, *Optica Acta*, 1975, 22, No.9, 745—759.
- [5] 胡企千, 光学机械, 1980, No.6, 31.
- [6] Makcyrov, 杨世杰译, 天文光学工艺, 科学出版社, 1964.
- [7] Meinel, *Telescopes*, The University of Chicago Press, P41.
- [8] Malvick, *Applied Optics*, 1972, 11, No.3, 575—585.
- [9] Mack, *Applied Optics*. 1980, 19, No.4.
- [10] “建筑结构静力计算手册”, 1974, 中国建筑工业出版社, P337.
- [11] “Formular for Stress and Strain”, 1975, McGraw-Hill Book Company, P334.
- [12] 朱伯芳,“有限单元法原理与应用”, 1979, 水利电力出版社, P102.
- [13] 同上, P168—229.