万 向 传 动 轴 的 精 度 分 析

孙 麟 治

近代仪器设计制造中，在某些情况下由于结构上的原因，不可避免地必须在传动链内插入万向传动轴来满足距离可调的要求。例如图1所示的大型电影经纬仪的俯仰传动系统中，精密蜗轮9直接与望远镜相连接，并由S569直流伺服电动机4驱动，在由伺服电动机驱动的主传动齿轮箱3的输出轴与传动蜗杆6之间，即是采用了一根精密万向传动轴5。从而对其提出不仅要传递一定值的扭矩，并且必须具有高精度、虚动量小，并能保持长期润滑等条件。

本文将对这类精密的万向传动轴的精度分析和虚动量的估算作一探讨。

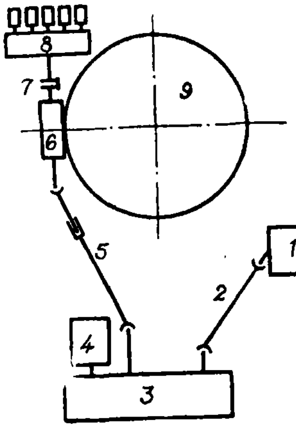

图1 俯仰角传动链示意

1—手动齿轮箱　2—万向传动轴
3—主传动齿轮箱　4—伺服电动机
5—万向传动轴　6—蜗　杆
7—联　轴　节　8—自整角机齿轮箱
9—蜗　轮

一、设 计 说 明

所设计的万向传动轴由万向联轴节和传动轴二大部分组成。万向联轴节的结构见图2。图中的十字形连接件4采用整体件，而轭形接头2分成为二半，十字连接件上的轴端与轭形接头的轴孔内采用滚针轴承3，以便减小摩擦并容纳润滑脂，满足长时期润滑要求。

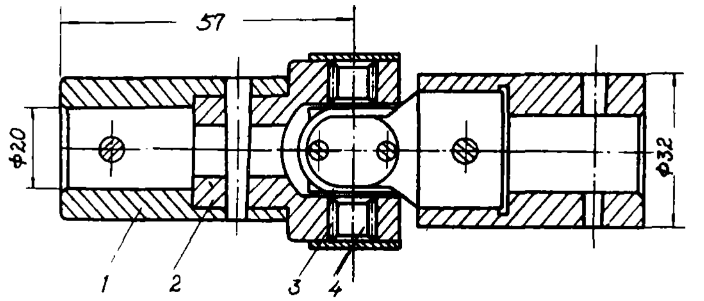

图2 万向联轴节

中间轴分成二段，采用滑键直接满足安装时可拆卸和调节轴向距离的要求。中间轴与万向联轴节，以及万向联轴节与齿轮箱轴之间全都采用圆锥销，以消除间隙并限制轴向位移。

滚针轴承的尺寸按轴承手册计算[1]。轴承中径D_0的计算式为

$$D_0=\frac{d_{针}}{\sin\frac{180}{Z}}=k\times d_{针}$$

轴承内的直径间隙为

$$g=d_{针}\ (k-1)\ -d_{轴}+f\times k$$

今选定滚针数$Z=17$，则$K=5.4421$。当滚针间留有间隙f时，则轴承中径为

$$D_0'=K\ (d_{针}+f)$$

若假定$f=0$，则

$$D_0=k\cdot d_{针}=5.4421\times1.6=8.707\text{mm}$$

$$d_{轴}=D_0-d_{针}=8.707-1.6=7.107\text{mm}$$

$$d_{孔}=D_0+d_{针}=8.707+1.6=10.307\text{mm}$$

今选定 $d_{轴}=7.1^{+0.015}_{+0.007}$，$d_{孔}=10.3^{+0.022}_{+0.012}$，$d_{针}=1.6_{-0.003}$

则可得出二种情况：

（1）轴径$d_{轴}$为最大值，滚针$d_{针}$为最小值时，滚针间将有最大间隙

$$D_0'=d_{轴}+d_{针}=7.115+1.597=8.712$$

$$\because kf=D_0'-D_0=D_0'-kd_{针}=8.712-5.4421\times1.597=0.021$$

故得 $f=\dfrac{0.021}{k}=0.00386$

验算$d_{孔}=D_0'+d_{针}=8.712+1.597=10.309$，即是小于$d_{孔}$的最小尺寸。

计算得出安装后的轴承内的直径间隙为

$$g=1.597(5.4421-1)\ -7.115+0.021=0$$

考虑轴承孔为最大值$d_{孔}=10.322$，由此得出轴承内的最大直径间隙为

$$\Delta_{max}=10.322-10.309+g=0.013$$

（2）轴径$d_{轴}$为最小值，滚针$d_{针}$为最大值时，滚针间将有最小间隙

$$D_0'=d_{轴}+d_{针}=7.107+1.6=8.707$$

$$\because\quad kf=D_0'-D_0=D_0'-kd_{针}=8.707-5.4421\times1.6=0$$

故$f=0$。验算$d_{孔}=D_0'+d_{针}=8.707+1.6=10.307$，即是小于$d_{孔}$的最小尺寸。

此时$g=1.6\times4.4421-7.107+0=0$

考虑轴承孔为最小值$d_{孔}=10.312$，由此得出轴承内的最小直径间隙为

$$\Delta_{min}=10.312-10.307+g=0.005$$

从而得出轴承内的平均直径间隙为

$$\Delta=\frac{1}{2}(\Delta_{max}+\Delta_{min})=\frac{1}{2}(0.013+0.005)=0.009\text{mm}\pm0.004\text{mm}$$

该值将是引起如下所述的中间轴二端叉面的相位差角的主要初始误差因素。

二、精 度 分 析

从双万向联轴节的原理可知，为了保证传动中从动轴和主动轴的传动比不变而恒等于1，必须遵从下列两个几何条件：

（1）中间轴两端的叉面必须位于同一平面内，如图3所示；

（2）中间轴与主动轴和从动轴之间的夹角必须相等，即是从动轴的轴线应当平行于主动轴的轴线，或即 $\alpha_1=\alpha_2$。

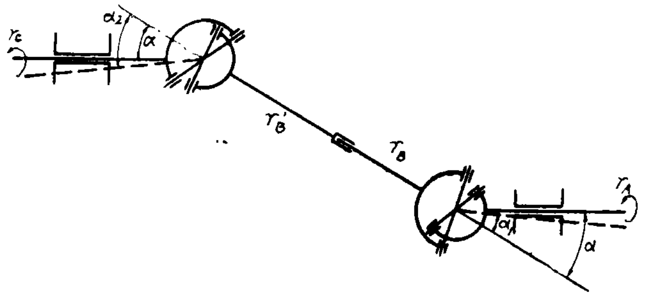

图 3　万向传动轴

这里先讨论一下前面一个问题，即是假定$\alpha_1=\alpha_2$，求 $\gamma'_B\neq\gamma_B$ 带来的传动误差。这时候第一个联轴节的主动轴与从动轴转角之间有关系式〔2〕

$$\mathrm{tg}\gamma_B=\mathrm{tg}\gamma_A\cdot\cos\alpha_1 \tag{1}$$

第 2 个联轴节的主从轴之间的转角关系式为

$$\mathrm{tg}\gamma_C=\frac{\mathrm{tg}\gamma'_B}{\cos\alpha_2} \tag{2}$$

今若中间轴两端十字连接件的叉面间有相位差角Φ（亦即 $\gamma'_B=\gamma_B+\Phi$），由泰勒级数展开可得

$$\mathrm{tg}\gamma'_B=\mathrm{tg}(\gamma_B+\Phi)\approx\mathrm{tg}\gamma_B+\frac{\Phi}{\cos^2\gamma_B}$$

从而（2）成为

$$\mathrm{tg}\gamma_C=\frac{\mathrm{tg}\gamma_B+\dfrac{\Phi}{\cos^2\gamma_B}}{\cos\alpha_2}=\frac{\mathrm{tg}\gamma_B}{\cos\alpha_2}+\frac{\Phi}{\cos\alpha_2\cdot\cos^2\gamma_B}$$

又因为　$\cos^2\gamma_B=\dfrac{1}{1+\mathrm{tg}^2\gamma_B}$，

和设定　$\alpha_1=\alpha_2=\alpha$

故得　$$\mathrm{tg}\gamma_C=\frac{\mathrm{tg}\gamma_A\cdot\cos\alpha_1}{\cos\alpha_2}+\frac{(1+\mathrm{tg}^2\gamma_B)}{\cos\alpha_2}\cdot\Phi=\mathrm{tg}\gamma_A+\frac{(1+\mathrm{tg}^2\gamma_A\cdot\cos^2\alpha)}{\cos\alpha}\cdot\Phi \tag{3}$$

假设由于相位差角Φ引起输出轴相对于输入轴转角的误差为$\Delta\gamma'_C$，即是

$$\gamma_C=\gamma_A+\Delta\gamma'_C$$

则式（3）的左边展开成为

$$\mathrm{tg}\gamma_C=\mathrm{tg}(\gamma_A+\Delta\gamma'_C)\approx\mathrm{tg}\gamma_A+\frac{\Delta\gamma'_C}{\cos^2\gamma_A}$$

代入（3）式后成为

$$\mathrm{tg}\gamma_A+\frac{\Delta\gamma'_C}{\cos^2\gamma_A}=\mathrm{tg}\gamma_A+\frac{1+\mathrm{tg}^2\gamma_A\cdot\cos^2\alpha}{\cos\alpha}\cdot\Phi$$

$$\therefore \quad \varDelta\gamma'_C=\frac{\cos^2\gamma_A(1+tg^2\gamma_A\cdot\cos^2\alpha)}{\cos\alpha}\cdot\Phi$$

化简之后最后得出

$$\varDelta\gamma'_C=\frac{(\cos^2\gamma_A+\sin^2\gamma_A\cdot\cos^2\alpha)}{\cos\alpha}\cdot\Phi \tag{4}$$

其次讨论第二个条件。若假定中间轴两端连接件的叉面间的相位差角 $\Phi=0$，而在万向传动轴的从动轴线与主动轴线间存在有歪斜角$\varDelta\alpha$时，则由此引起从动轴相对于主动轴的转角误差$\varDelta\gamma''_C$的计算式推导如下：

此时 $\varDelta\alpha=\alpha_2-\alpha_1$，$\gamma'_B=\gamma_B$，从式（1）和式（2）可得

$$tg\gamma_C=tg\gamma_A\frac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha_2} \tag{5}$$

今以 $\varDelta\gamma''_C=\gamma_C-\gamma_A$ 表示从动轴相对于主动轴的传动误差，则

$$tg\gamma_C=tg\ (\gamma_A+\varDelta\gamma''_C)=tg\gamma_A+\frac{\varDelta\gamma''_C}{\cos^2\gamma_A}$$

代入上式得

$$tg\ \gamma_A+\frac{\varDelta\gamma''_C}{\cos^2\gamma_A}=tg\gamma_A\frac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha_2}$$

故

$$\varDelta\gamma''_C=\frac{(\cos\alpha_1-\cos\alpha_2)}{2\cos\alpha_2}\sin 2\ \gamma_A$$

由于 $\alpha_1=\alpha_2-\varDelta\alpha$，$\cos\alpha_1=\cos(\alpha_2-\varDelta\alpha)$

这样上式中的

$$\frac{(\cos\alpha_1-\cos\alpha_2)}{\cos\alpha_2}=\frac{\cos\alpha_2\cdot\cos\varDelta\alpha+\sin\alpha_2\cdot\sin\varDelta\alpha-\cos\alpha_2}{\cos\alpha_2}$$

当 $\varDelta\alpha\ll\alpha_2$ 时，上式成为

$$\frac{(\cos\alpha_1-\cos\alpha_2)}{\cos\alpha_2}=tg\alpha_2\cdot\varDelta\alpha$$

代入原式后，可得

$$\varDelta\gamma''_C=\frac{1}{2}tg\alpha_2\cdot\varDelta\alpha\cdot\sin 2\ \gamma_A \tag{6}$$

今以图 2 所示的万向传动轴为例，计算一下传动误差。式（4）中的相位差角Φ受下列因素影响（1）十字连接件叉面的安装公差；（2）各个关节内的间隙；（3）中间轴的扭转变形。

表 1

初始误差	数　　值	计　算　式	不对称系数 α	分散系数 k	均　值 M〔$\Delta\Phi i$〕	标准差 σ〔$\Delta\Phi i$〕	备　　注
1.对称平面安装误差	$\pm 5'$	$\delta\Phi_1=5'$	0	1	0	1.7	$\sigma=\frac{k\cdot\delta}{3}=\frac{1\times 5}{3}=1.7'$
2.外叉轴承间隙	$\Delta_2=16\mu m$	$\delta\Phi_2=\frac{\Delta_2}{2R}=1.6'$ $R=17$	-0.47	1.2	$0.85'$ $0.85'$	$0.64'$ $0.64'$	因为是二端故乘二倍
3.内叉轴承间隙	$\Delta_3=16\mu m$	$\delta\Phi_3=\frac{\Delta_3}{2R}=1.6'$ $R=17$	-0.47	1.2	$0.85'$ $0.85'$	$0.64'$ $0.64'$	同上，乘二倍
4.中间轴滑键间隙	$\Delta_4=8\mu m$	$\delta\Phi_4=\frac{\Delta_4}{2R}=0.86'$ $R=16$	-0.47	1.2	$+0.45'$	$0.34'$	$\sigma=\frac{k\cdot\delta}{3}=\frac{1.2\times 0.86}{3}=0.34'$ $X=\alpha\delta+\Delta=-0.47\times 0.86+0.84=0.45$
5.中间轴扭转变形	$M=25kg\cdot cm$ $L=56cm$	$\delta\Phi_5=\frac{M_k L}{G\cdot I_p}=0.57$			$0.57'$		$G=810000kg/cm^2$ $I_p=\frac{\pi}{32}d^4=10.3cm^4$
总　　计					$4.42'$	$2.15'$	

按概率法计算相位差角的计算值参见表 1。表中所列的不对称系数和分散系数为（图 4）

$$\alpha=\frac{X_i-\Delta_i}{\delta}$$

$$k=\frac{3\cdot\sigma}{\delta}$$

式中　X_i——密集中心坐标（相当于均值M_i〔$\Delta\Phi$〕）；

Δ_i——公差带中心坐标；

δ——公差带之半。

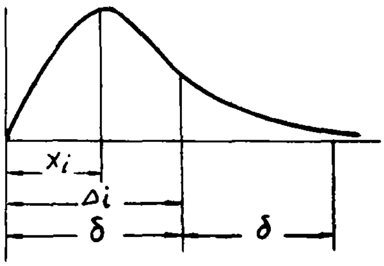

图 4

从而得出中间轴二端叉面的最大相位差角为

$$\Phi_{max}=M[\Phi]+3\sigma[\Phi]=4.42'+3\times 2.15'=10.87'$$

今因传动轴的安装倾斜角$\alpha=10°23'$，并将$\Phi_{max}=10.87'$代入(4)后，可得出图 5 所示的传动误差曲线。由此可见，由于相位差角引起万向传动轴的传动误差的最大值可达$\Delta\gamma'_\sigma=11.05'$，并且主要是位置误差（曲线中的常值部分）。不难看出，这类传动误差的波动幅值将随倾斜角α的增大而增大（图 5 中的虚线）。

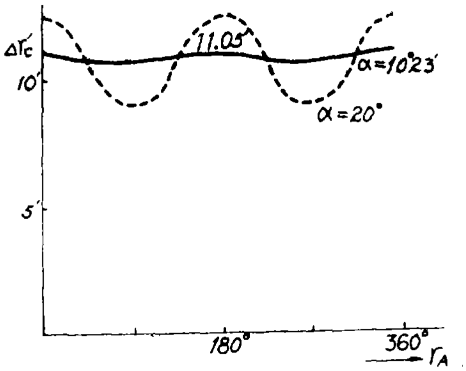

图5　相位差角引起的传动误差

再从式（6），当$\sin 2\gamma_A=1$，即 $\gamma_A=45°$时$\Delta\gamma''_c$有最大值。误差的均值和方差 按 下 式决定

$$M[\Delta\gamma''_c]=M\left(\frac{\mathrm{tg}\alpha_2}{2}\right)\cdot M[\Delta\alpha]=0$$

$$D[\Delta\gamma''_c]=\frac{1}{4}D(\mathrm{tg}\alpha_2\cdot\Delta\alpha)$$

$$=\frac{1}{4}[D(\mathrm{tg}\alpha_2)\cdot D(\Delta\alpha)+D(\Delta\alpha)\cdot M^2(\mathrm{tg}\alpha_2)+$$

$$+D(\mathrm{tg}\alpha_2)\cdot M^2(\Delta\alpha)]$$

今$\Delta\alpha=\pm30'$, $\mathrm{tg}\alpha_2=10°23'\pm15'$（即是万向传动轴两端有±3mm的偏移公差时），并假定相对不对称系数$\alpha=0$，相对分散系数$k=1$时，则

$$\because\quad D(\mathrm{tg}\alpha_2)=\left(\frac{\delta}{3}\right)^2=\left(\frac{\mathrm{tg}10°35'-\mathrm{tg}10°8'}{2\times3}\right)^2=0.0000023$$

$$\because\quad D(\Delta\alpha)=\left(\frac{\delta}{3}\right)^2=\left(\frac{30'}{3}\right)^2=100$$

$$\because\quad M(\mathrm{tg}\alpha_2)=\frac{\mathrm{tg}10°38'+\mathrm{tg}10°8'}{2}=0.183237$$

$$M^2(\mathrm{tg}\alpha_2)=0.033576$$

$$\therefore\quad D(\Delta\gamma''_c)=\frac{1}{4}(0.0000023\times100+100\times0.033576)=0.83946$$

故得标准差　$\sigma=\sqrt{D(\Delta\gamma''_c)}=0.916'$

因此，由此类误差引起的最大传动误差可达（图6）

图6　轴线不平行引起的传动误差

$$\Delta\gamma''_c = M(\Delta\gamma''_c) + 3\sigma(\Delta\gamma''_c) = 0 + 3\times0.916' = 2.75'$$

两项误差综合，得出万向传动轴的最大传动误差为

$$\Delta\gamma_c = \sqrt{\Delta\gamma'^2_c + \Delta\gamma''^2_c} = \sqrt{11.05^2 + 2.75^2} = 11.3'$$

万向传动轴的虚动只与各个关节内的间隙以及负载下的扭转弹性变形有关，为此从表 1 中的数据可得出最大虚动量为

$$\begin{aligned}\Delta\beta &= 2[2(M_2+3\sigma_2)+2(M_3+3\sigma_3)+(M_4+3\sigma_4)+M_5] \\ &= 2[2\times(0.85+3\times0.64)+2(0.85+3\times0.64) \\ &\quad +(0.45+3\times0.34)+0.57] = 26.24'\end{aligned}$$

三、精度的测试

曾经进行了静态误差、虚动量测试和动态误差测试。

万向传动轴的静态测试是在图 7 所示的装置上进行的。传动轴的主动端套装在轴承座 3 上，从动端套装在轴承座 8 上。测试时，使万向轴成为与工作状态相似的位置。轴承座的两个外端均装有精密度盘，度盘的分格值为1′，由读数显微镜细分和读数。精密度盘的端面垂直度找正在5 μm以内，并有很高的同心度。

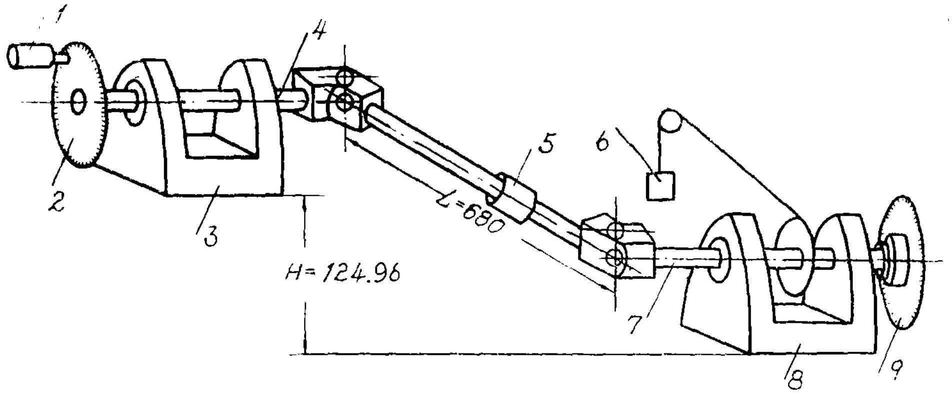

图 7　传动误差测试装置

1 —读数显微镜，2、9—精密度盘，3 —轴承座 I，4 —主动轴，5 —中间轴套筒，6 —砝码，7 —从动轴，8 —轴承座 II。

然后利用自准平行光管，根据度盘面进行轴线平行度找正，使两度盘的平行度小于1′。轴线的高度差是用精密高度游标卡尺直接测量出的，测试时采用的倾斜角为

$$\alpha = \sin^{-1}\frac{H}{L} = \sin^{-1}\frac{124.96}{680} = 10°35'20''$$

测试时，以万向传动轴连接蜗杆箱的一端作为主动，每转 10°，在从动端度盘上读取误差。测试时在从动轴端加有5kgcm的扭矩。

传动轴的虚动量测试在同一装置上进行，使万向传动轴连接蜗杆箱的一端锁紧，另一端上挂砝码。试验时同时读出两端度盘上的偏转角，以便扣除系统刚度的影响。测试结果见图 8 、 9 中曲线及表 2 。

表2 静态传动误差和虚动量

	Ⅱ 号 轴	Ⅲ 号 轴	Ⅳ 号 轴	备 注
静态误差	4′48″	3′10″	3′42″	测试扭矩5kg-cm
虚 动 量	37′	26′	17.6′	测试扭矩25kg-cm

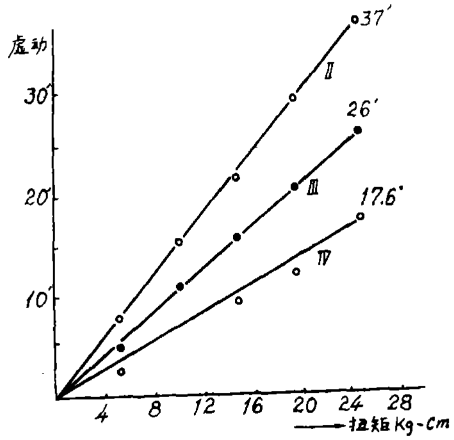

图8 虚 动 量

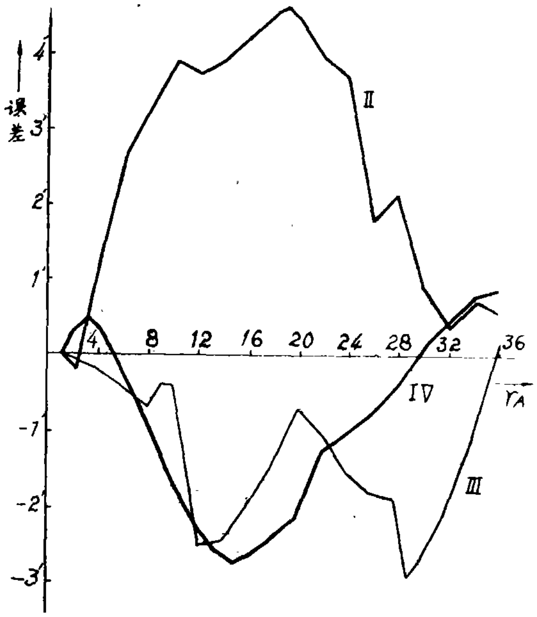

图9 静态传动误差

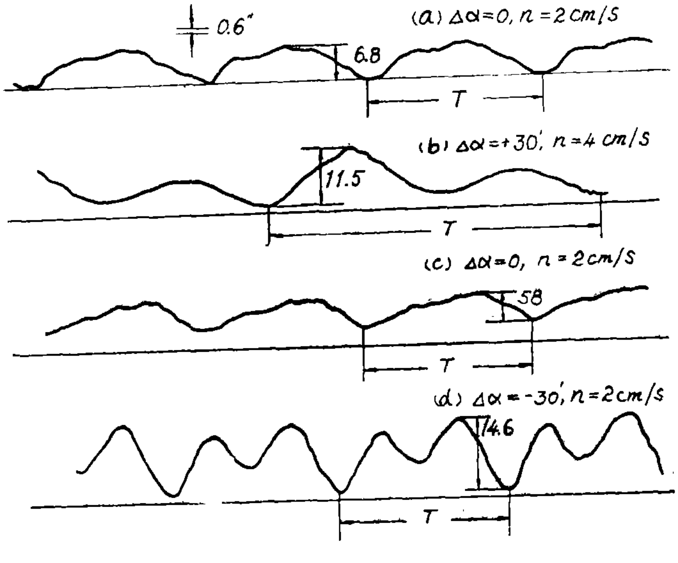

图10 动态传动误差

万向传动轴的动态传动误差也是在图7所示的装置上进行的。测试时将轴承座二个外端上的精密度盘换成了二个直径为100mm的磁盘，磁波数为750，磁盘转速为每转 1.7 秒，亦即频率等于440Hz。磁盘的安装精度为端面振摆小于10 μm，径向振摆小于6 μm。测试采用上海机床厂制造的磁分度仪。

试验了第Ⅳ号万向轴的传动误差。即是在静态误差测试完毕后，立即在同一安装状态下拆去精密度盘，换装上磁盘进行动态误差测试。结果参见图10。由此可见，当轴线歪斜角 $\Delta\alpha=0°$时，动态传动误差为3.48′～4.08′。当$\Delta\alpha=+30'$时静态传动误差为3′42″，动态传动误差增大至6.9′（曲线b）。$\Delta\alpha=-30'$时，动态传动误差为8.76′（曲线d）。

四、结　　语

1. 万向传动轴具有较大的传动误差，文内例举的大型电影经纬仪上的ϕ32万向传动轴的动态传动误差可达6.9′～8.76′。虚动量可达17.6′～37′（扭矩为25kg-cm时）。

2. 中间轴两端十字连接件叉面的相位差角对于传动误差的影响，远大于二轴线不平行度引起的误差。

3. 文内引用的用概率法估算万向传动轴的传动误差和虚动量，具有一定的可靠性。实际表明，实际误差不超出计算所得的最大值。

精度测试中得到左原之、姜志雄、沈潜德等同志的帮助特此致谢。

参考文献

[1] Бейзельман. Р. Д.;«Подшипник Качения Спрабочник» Машгиз.1960.

[2] 天津大学主编《机械原理》,人民教育出版社。

[3] 长春光机学院编《机构精度原理》1963年。