

基于线扩散函数的象差容限

H. H. 霍普金斯*

(英国里丁大学)

摘要: 本文讨论线扩散函数和两边梯度的一般公式和归化因子线扩散函数和两边梯度间的关系。并给出以波差方差的函数 Ω 所表征的近似方程, 并研究了在对称光瞳和旋转对称光学系统的情况下, 特别是当圆形光瞳时, 波差系数和 Ω 的偶部 Ω_e 和奇部 Ω_o 之间的关系, 并利用 Ω_e 来确定最佳焦面的位置和利用 Ω 来求得线扩散函数最大值的位置, 同时给出了一些情况象差公差实例。

一、前 言

小象差对于点源象光强分布的影响是降低了衍射图样主极大的强度而使更多的光分布于图样的主极大之外。用Strehl强度比来表征点扩散函数(PSF)最大光强的降低。而Strehl强度比定义为有象差图样的光强中心极大和无象差、无离焦时的光强中心极大之比。

Maréchal^[1]指出在小象差的情况下, PSF的Strehl比可近似地用如下公式表述:

$$I = \left\{ 1 - \frac{2\pi^2}{\lambda^2} E \right\} \quad (1)$$

上式中 E 为整个出瞳上波差的方差。不难证明若括号中的表达式值 ≥ 0 , 则(1)式的近似值总是 \leq Strehl比的真值。这说明由(1)式所得的 I 值是可靠的。 E 越小则 I 越大。Maréchal利用这个事实得出象差的容限、确定最佳焦面和象差校正的方式。对于 $I \geq 0.80$ 由公式(1)可得:

$$E \leq \frac{\lambda^2}{187} \approx \frac{\lambda^2}{180} \quad (2)$$

Maréchal 选择上式的值作为光学系统象差的容限。

King^[2]对不同级的球差和彗差的情况下比较了由(1)式所得的值和由对应的衍射积分所得的值。并得出结论: 即当 $I \geq 0.50$ 时, (1)式所得的象差方差提供了评定象质的一个有用的参数。对于大的 I 必须有小的 E 值。对应于 $I = 0.5$ 时的方差为:

$$E = \frac{\lambda^2}{67.4} \quad (3)$$

这明显地大于(2)式所得到的值。

在后来的文章中King^[3]计算了Hopkins公式的系数^[4]。该系数以如下的形式来表示任意光学系统的方差:

* 本文为H. H. 霍普金斯教授未曾公开的手稿, 首次刊登, 由余景池同志译成中文, 摘要为译者所写, 译者并对文稿中明显的笔误作了改正。

$$E = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N P(i, j) A_i A_j \quad (4)$$

上式中对于任意给定的象差多项式，值 A_i 为对应于由光瞳上适当选定的少量抽样点的光线计算所得的归化横向象差。 $P(i, j)$ 为选来表示波差的特定象差多项式的系数。

在实际中是很少仅涉及一些孤立点的象。为此，我们研究了小象差对于作为无限窄线条象的强度分布函数的线扩散函数之 Strehl 比的影响。这个问题对于大部分情况是重要的。特别当 PSF 为非对称时，不同方位的线条有很大的区别。但 PSF 的 Strehl 强度比不能计及这个差别。例如，径向线条的象当没有弧矢焦差时是理想的，尽管存在一定的子午焦差。再如，当存在彗差时平行于对称轴的线条要比垂直于对称轴的线条清晰得多。象差容限对于这二个不同的方位将是不同的。以上的问题由于使用了 LSF 的 Strehl 比得以处理。这相对于评定两边象质量的两边响应函数 (ERF) 也有一附加的重要优点。在下一节中将会看到 ERF 的斜率，也即两边梯度 (EG) 在象的任一点处当略去一常数因子后都等于 LSF 在该点的强度。这就意味着最佳焦点和象差校正的条件对于最优化的两边梯度和 LSF 的 Strehl 比是一致的。而这二种情况的象差容限也有着简单的关系。

二、LSF 和两边梯度的一般公式

我们使用 Hopkins 的正则坐标系统。参考文献^[5]从 307 至 331 页叙述了这个坐标系统及其在成像理论中的应用。如图 1 所示，对于轴外象点光瞳函数记为 $F_0(x'_s, y'_r)$ 。其中 x'_s 和 y'_r 分别表示垂直于和包含于子午平面的正则光瞳轴。 (x'_s, y'_r) 的原点为光轴 $\overline{E'O'}$ 上的 $\overline{E'}$ 点。其几何象点取为成像光束的主光线 $\overline{E'Q'}$ 和象平面的交点。以该点为原点并平行于轴系 x'_s 和 y'_r 的轴系 u' 和 v'_r 来表述象平面上的临近点。

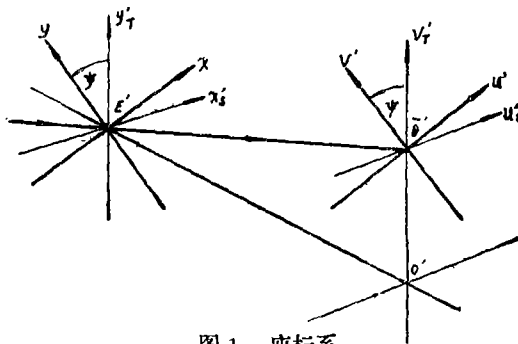


图 1 坐标系

为了处理线条，如图 1 所示采用了旋转轴系 x', y' 和 u', v' 。其与子午平面间的夹角为 ψ' 。必须注意到角度 ψ' 是在正则坐标系的简约空间中。当 $\psi' = 0$ 或 $\frac{\pi}{2}$ 时就和真实空间中的角度值相等；而对于其它的 ψ' 值真实空间的角度值由下式给出：

$$\tan \psi'_0 = (\rho'_r / \rho'_s) \tan \psi' \quad (5)$$

上式中 ρ'_r 和 ρ'_s 分别表示子午和弧矢截面中的数值孔径和轴上点 O' 的数值孔径之比。对于归化座标为 u' 的点来说其对应的真实空间的座标为：

$$\xi' = [(\rho'_s \cos \psi')^2 + (\rho'_r \sin \psi')^2]^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\lambda}{n' \sin \alpha'} \right) u' \quad (6)$$

上式中 $n' \sin \alpha'$ 是轴上的数值孔径， λ 是波长。

对于正则坐标轴 x'_s 和 y'_r 来说， $F_0(x'_s, y'_r)$ 是其瞳函数。则对应于旋转轴 x' 和 y' 的光瞳函数为：

$$F(x', y') = F_0(x' \cos \psi' - y' \sin \psi', y' \cos \psi' + x' \sin \psi') \quad (7)$$

那末在方位 ψ' ，距几何线象的规化距离为 u' 的点处的强度为：

$$G(u') = \int_{y'} \left| \int_{x'} F(x', y') \exp(i x' \sin u') dx' \right|^2 dy' \quad (8)$$

上式的积分限为整个出瞳范围。如参考文献^[6]所述，当采用适当的正则坐标系时，公式(8)适用于任何光学系统。以波长 λ 作为长度单位。设给定象点的波差为 $W_0(x'_s, y'_\tau)$ ，则光瞳函数如下式所示：

$$F_0(x'_s, y'_\tau) = \tau_0(x'_s, y'_\tau) \exp[i 2\pi W_0(x'_s, y'_\tau)] \quad (9)$$

上式中模 $\tau_0(x'_s, y'_\tau)$ 是波面上实振幅函数。根据(7)式在旋转坐标下的瞳函数为：

$$F(x', y') = \tau(x', y') \exp[i 2\pi W(x', y')] \quad (10)$$

上式中：

$$\begin{cases} \tau(x', y') = \tau_0(x' \cos \psi' - y' \sin \psi', y' \cos \psi' + x' \sin \psi') \\ W(x', y') = W_0(x' \cos \psi' - y' \sin \psi', y' \cos \psi' + x' \sin \psi') \end{cases} \quad (11)$$

上式中 $\tau(x', y')$ 和 $W(x', y')$ 分别为对应于旋转坐标 (x', y') 的实振幅和波差函数。

首先我们考虑两边梯度和线扩散函数的关系。两边的象，也即两边扩散函数为 $u=0$ 和 $u=+\infty$ 之间的线象的叠加。ERF可由下式表达：

$$H(u') = \int_{-\infty}^{+\infty} G(u' - u) du = \int_{-\infty}^{+\infty} G(z) dz \quad (12)$$

其中 $z = u' - u$ 。由(12)式知象的任一点 u' 处的两边梯度为：

$$\Gamma(u') = \frac{dH(u')}{du'} = G(u') \quad (13)$$

由上知两边响应函数在 u' 处的梯度是等于LSF的强度的。但必须注意到对于ERF和LSF使用了不同的规化条件。其数值因子体现在式(13)中。

对于线扩散函数来说，其规化因子为无象差、无离焦差的光学系统之线扩散函数在其几何象($u'=0$)处的强度。以 $G_0(o)$ 记之。则公式(8)给出：

$$G_0(o) = \int_{y'} \left| \int_{x'} F(x', y') dx' \right|^2 dy' \quad (14)$$

而规化的LSF由下式定义：

$$\hat{G}(u') = \frac{G(u')}{G_0(o)} = \frac{1}{G_0(o)} \int_{y'} \left| \int_{x'} F(x', y') \exp(i 2\pi u' x') dx' \right|^2 dy' \quad (15)$$

对完善系统而言，当 $u'=0$ 时式(15)的值为1。而对非完善系统来说总是小于1。这可从(8)式并结合Scharz不等式得到，

即： $G(u') < \int_{y'} \left| \int_{x'} F(x', y') dx' \right|^2 dy' = G_0(o)$

同样地利用Scharz不等式于 $G_0(u')$ 的表达式可得：

$$G_0(u') = \int_{y'} \left| \int_{x'} F(x', y') \exp(i 2\pi u' x') dx' \right|^2 dy' \quad (16)$$

上式表明衍射受限的LSF其极大值总是在几何线象($u'=0$)处。同时从式(13)可知对

于任何衍射受限系统其两边梯度 $\Gamma(u')$ 在 $u' = 0$ 处有极大值。则量 $\hat{G}(u')$ 当然地即为 u' 点处的LSF的Strehl比。

一般地说对不同的方位 ψ' 都必须分别地计算其归化因子 $G_0(o)$ 。因此，对于具有等振幅，即 $\tau(x', y') = |F(x', y')| = 1$ 的由 $-a \leq x' \leq +a$ 和 $-b \leq y' \leq +b$ 所定义的矩形光瞳，我们可以发现当 $\psi' = 0$ 时，有：

$$G_0(o) = \int_{-b}^{+b} \left| \int_{-a}^{+a} dx' \right|^2 dy' = 8a^2b \quad (17)$$

而当 $\psi' = \pi/2$ 时，有：

$$G_0(o) = \int_{-a}^{+a} \left| \int_{-b}^{+b} dy' \right|^2 dx' = 8ab^2 \quad (18)$$

如果 $b > a$ ，则有 $8a^2b < 8ab^2$ 。那末对于 $\psi' = 0$ 其衍射受限的LSF的极大值较小。这是与如下事实相符的，即垂直于光瞳较小宽度方向的衍射象较宽。

ERF的归化因子为远离两边几何象的点处之常强度。由式(12)可求得该强度为：

$$H(\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(u') du' \quad (19)$$

如果LSF被看成为沿着直线 $-\infty \leq v' \leq +\infty$ 的所有点的象之叠加，就有关系为：

$$G(u') = \int_{-\infty}^{+\infty} G(u', v') dv' \quad (20)$$

上式中 $G(u', v')$ 为点扩散函数，由式(19)同样可得到：

$$H(\infty) = \iint_{-\infty}^{+\infty} G(u', v') du' dv'$$

由Parseval理论， $G(u', v')$ 等于瞳函数 $F(x', y')$ 模的平方可得：

$$A = H(\infty) = \iint_{-\infty}^{+\infty} |F(x', y')|^2 dx' dy' \quad (21)$$

在此将 $H(\infty)$ 记为 A 。这是由于 $\tau(x', y') = |F(x', y')| = 1$ 的等振幅的情况下， $H(\infty)$ 的值就简单地等于归化坐标 (x', y') 或 (x'_s, y'_r) 时的瞳面积 A 。

ERF的归化形式定义为：

$$\hat{H}(u') = H(u') / H(\infty) = H(u') / A \quad (22)$$

而在 u' 处的斜率为：

$$\hat{\Gamma}(u') = \frac{1}{A} \frac{dH(u')}{du'} = G(u') / A \quad (23)$$

在利用(13)式求 $H(u')$ 的导数之后，现在用(15)式求 $G(u')$ 的归化式。则有：

$$\hat{\Gamma}(u') = \left[\frac{G_0(o)}{A} \right] \hat{G}(u') \quad (24)$$

上式说明在 u' 点处归化的ERF的梯度和LSF的强度之间仅相差一个因子 $G_0(o)/A$ 。对于衍射受限系统当 $u' = 0$ 时， $G(u') = 1$ ，其对应的两边梯度为 $G_0(o)/A$ 。

在等振幅情况下，单位半径的圆孔，其LSF的归化因子为：

$$G_0(o) = \int \left| \int_{-\sqrt{1-y'^2}}^{+\sqrt{1-y'^2}} dx \right|^2 dy = \frac{16}{3} \quad (25)$$

因此，用公式 (8) 于 $G(u')$ 和公式 (10) 于 $F(x', y')$ ，则规化的LSF为、

$$\hat{G}(u') = \frac{3}{16} \int \left| \int_{-\sqrt{1-y'^2}}^{+\sqrt{1-y'^2}} \exp[i2\pi W(x', y')] \exp[i2\pi u' x'] dx' \right|^2 dy' \quad (26)$$

以上式假设 $\tau(x', y') = 1$ 。同时，由于 $A = \pi$ ，从式 (24) 和 (25) 求得：

$$\hat{\Gamma}(u') = \left(\frac{16}{3\pi} \right) \hat{G}(u') \quad (27)$$

上式建立了规化的EG和LSF间的关系。

三、小象差时 LSF 的 Strehl 比

我们将考虑等振幅的情况，但对光瞳的形状是没有限制的。用于表征波差的参考球面的中心取在象平面上的动点 u' 处。从式 (16) 可知在这个参考球面中心处有：

$$\hat{G}(o) = \frac{1}{G_0(o)} \int_y \left| \int_{x'} \exp[i2\pi W(x', y')] dx' \right| dy' \quad (28)$$

$\hat{G}(o)$ 为给定点处 LSF 的 Strehl 比。在这个过程中，我们用 $W(x', y')$ 中的垂轴焦点位移项来代替 (15) 式中的因子 $\exp[i2\pi u' x']$ 。

图 2 中 $ACBD$ 为光瞳的边缘。为了方便起见以中心在 E' 的圆来代表。式 (28) 中的波差表示成旋转坐标 (x', y') 的函数。线段 AB 位于 x' 轴上方高度为 y' 。对应于该 y' 值的 x' 的极限值分别为端点 A 和 B 的坐标 $x' = A(y)$ 和 $x' = B(y)$ 。将 C 和 D 点的 y' 座标记为 C 和 D 。则 C 和 D 分别为 (28) 式中 y' 的上下限。即：

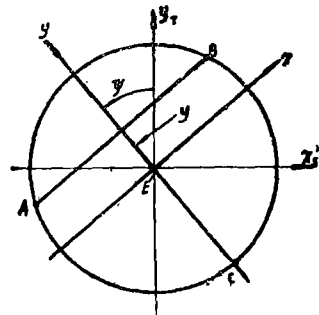


图 2 光瞳的形状和积分限

$$\hat{G}(o) = \frac{1}{G_0(o)} \int_c^D \left| \int_{A(y')}^{B(y')} \exp[i2\pi W(x, y)] dx \right|^2 dy \quad (29)$$

上式中为了方便起见略去了 (x', y') 中的撇号。(29) 式的规化因子的值由 (16) 式略去撇号得到如下：

$$G_0(o) = \int_c^D [B(y) - A(y)]^2 dy \quad (30)$$

现在我们将寻求小象差情况 LSF 的 Strehl 比的近似公式。

为此目的，首先设：

$$\bar{W}_1(y) = \frac{1}{B(y) - A(y)} \int_{A(y)}^{B(y)} W(x, y) dx \quad (31)$$

上式中 $\bar{W}_1(y)$ 为整个 AB 上 $W(x, y)$ 的平均值。那末记:

$$\int_{A(y)}^{B(y)} \exp[i2\pi W(x, y)] dx = \exp[i2\pi \bar{W}_1(y)] \int_{A(y)}^{B(y)} \exp[i2\pi [W(x, y) - \bar{W}_1(y)]] dx$$

上式有效地减少了积分中指数函数幅角的变化范围。而在 $W(x, y) - \bar{W}_1(x, y)$ 不大时可改写

$\left| \int_{A(y)}^{B(y)} \exp[i2\pi W(x, y)] dx \right|^2$ 如下:

$$\left| \int_{A(y)}^{B(y)} \exp[i2\pi W(x, y)] dx \right|^2 \approx \left| \int_{A(y)}^{B(y)} \{1 + i2\pi [W(x, y) - \bar{W}_1(y)] - 2\pi^2 [W(x, y) - \bar{W}_1(y)]^2\} dx \right|^2 \quad (32)$$

将(31)式代入上式则简化为:

$$\left| \int_{A(y)}^{B(y)} \exp[i2\pi W(x, y)] dx \right|^2 \approx [B(y) - A(y)]^2 \{1 - 2\pi^2 [\bar{W}_2(y) - \bar{W}_1^2(y)]\}^2 \quad (33)$$

上式中 $\bar{W}_2(y)$ 为 AB 上 $W(x, y)$ 的均方值, 即:

$$\bar{W}_2(y) = \frac{1}{B(y) - A(y)} \int_{A(y)}^{B(y)} W^2(x, y) dx \quad (34)$$

由于 $\bar{W}_1(y)$ 为 $W(y)$ 的平均值, 则可看到 $\bar{W}_2(y) - \bar{W}_1^2(y)$ 是 AB 线上 $W(x, y)$ 的方差。

式(32)和(33)中的近似符号是可以不等号 \geq 来代替的。因此设 θ 为 x 的任意函数, 则:

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} \exp(i\theta) dx \right|^2 = \left(\int_{x_1}^{x_2} \cos\theta dx \right)^2 + \left(\int_{x_1}^{x_2} \sin\theta dx \right)^2 \geq \left(\int_{x_1}^{x_2} \cos\theta dx \right)^2 \text{ 由于 } \cos\theta \geq 1 - \frac{1}{2} \theta^2,$$

故:

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} \exp(i\theta) dx \right|^2 \geq \left[\int_{x_1}^{x_2} \left(1 - \frac{1}{2} \theta^2\right) dx \right]^2 \quad (35)$$

上式当 $(1 - \frac{1}{2} \theta^2) \geq 0$ 或 $|\theta| \leq \sqrt{2}$ 时是成立的。

(35) 式的条件在所研究的问题中是显然成立的。(32)和(33)式的展开式因此可改写为:

$$\left| \int_{A(y)}^{B(y)} \exp[i2\pi W(x, y)] dx \right|^2 \geq [B(y) - A(y)]^2 \{1 - 2\pi^2 [\bar{W}_2(y) - \bar{W}_1^2(y)]\}^2 \quad (36)$$

将上式中第二个括号展开并略去平方项 (恒为正) $4\pi^2 [\bar{W}_2(y) - \bar{W}_1^2(y)]^2$ 。该略去项和仍保留下的项的比值为 $\pi^2 [\bar{W}_2(y) - \bar{W}_1^2(y)]$, 该比值当保留项 $4\pi^2 [\bar{W}_2(y) - \bar{W}_1^2(y)] \leq 0.4$ 时小于或等于0.1。故从(36)式中略去平方项不会严重地影响到近似的程度。

现在将(36)式代入(29)式, 给出结果为:

$$\hat{G}(o) \geq \frac{1}{G_0(o)} \int_0^p [B(y) - A(y)]^2 \{1 - 4\pi^2 [\bar{W}_2(y) - \bar{W}_1^2(y)]\} dy$$

将公式(30)代入上式可得:

$$\hat{G}(o) \geq 1 - \Omega \quad (37)$$

上式中有:

$$\Omega = \frac{4\pi^2}{\int_c^b [B(y) - A(y)]^2 dy} \int_c^b [B(y) - A(y)]^2 [\overline{W}_2(y) - \overline{W}_1^2(y)] dy \quad (38)$$

在表征波差大小的参考球面的中心处 Ω 的大小即给出了LSF的Strehl比的不等式也给出了近似式。在衍射受限的情况下,当不存在离焦时 $W(x, y) = 0$, 则 $\Omega = 0$, Strehl $\hat{G}(0) = 1$ 。

四、对称光瞳

所谓对称光瞳是指光瞳的形状是关于 x_s 和 y_T 轴对称、波差是关于 x_s' 轴偶对称及关于 y_T' 轴为偶或奇对称的。例如旋转对称的系统。再次略去撇号记为:

$$W_0(x_s, y_T) = u_0(x_s, y_T) + v_0(x_s, y_T) \quad (39)$$

对任何的 x_s 和 y_T 值,其偶函数部分满足:

$$u_0(-x_s, y_T) = u_0(x_s, y_T) \quad u_0(x_s, -y_T) = u_0(x_s, y_T) \quad (40)$$

奇函数部分满足:

$$v_0(-x_s, y_T) = v_0(x_s, y_T) \quad v_0(x_s, -y_T) = -v_0(x_s, y_T) \quad (41)$$

在上述情况下,可把 Ω 记为:

$$\Omega = \Omega_E + \Omega_0 \quad (42)$$

上式中 Ω_E 和 Ω_0 分别为象差的偶部和奇部对 Ω 的贡献。

而对于旋转轴系 (x, y) ,其(39)式的象差变为:

$$W(x, y) = u(x, y) + v(x, y) \quad (43)$$

$$\text{上式中: } \begin{cases} u(x, y) = u_0(x \cos \psi - y \sin \psi, y \cos \psi + x \sin \psi) \\ v(x, y) = v_0(x \cos \psi - y \sin \psi, y \cos \psi + x \sin \psi) \end{cases} \quad (44)$$

利用式(40)和(41)的对称性质求得:

$$u(-x, -y) = u(x, y) \quad v(-x, -y) = -v(x, y) \quad (45)$$

我们把这些对称性加于边界条件可得:

$$C = -D \quad A(-y) = -B(y) \quad B(-y) = -A(y) \quad (46)$$

以上条件对于任何关于 x_s 和 y_T 轴对称的光瞳形状都是适用的。

用式(43)代替 $W(x, y)$,从公式(31)即得:

$$\overline{W}_1(y) = \overline{u}_1(y) + \overline{v}_1(y) \quad (47)$$

上式中 $\overline{u}_1(y)$ 和 $\overline{v}_1(y)$ 分别为 $W(x, y)$ 的偶部和奇部在 AB 上的平均值。其定义如下:

$$\begin{cases} \overline{u}_1(y) = \frac{1}{B(y) - A(y)} \int_{A(y)}^{B(y)} u(x, y) dx \\ \overline{v}_1(y) = \frac{1}{B(y) - A(y)} \int_{A(y)}^{B(y)} v(x, y) dy \end{cases} \quad (48)$$

同样地将(43)的 $W(x, y)$ 表达式代入(34)式得到均方值为:

$$\overline{W}_2(y) = \overline{u}_2(y) + \overline{v}_2(y) + \overline{J}(y) \quad (49)$$

上式中 $\overline{u_2}(y)$ 和 $\overline{v_2}(y)$ 分别为 $W(x, y)$ 的偶部和奇部的均方值。其表达式为:

$$\begin{cases} \overline{u_2}(y) = \frac{1}{B(y) - A(y)} \int_{A(y)}^{B(y)} u^2(x, y) dx \\ \overline{v_2}(y) = \frac{1}{B(y) - A(y)} \int_{A(y)}^{B(y)} v^2(x, y) dx \end{cases} \quad (50)$$

$\overline{J}(y)$ 为 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 的乘积在 AB 上平均值的两倍, 即:

$$\overline{J}(y) = \frac{1}{B(y) - A(y)} \int_{A(y)}^{B(y)} 2u(x, y)v(x, y) dx \quad (51)$$

将 $\overline{W_2}(y)$ 和 $\overline{W_1}(y)$ 的表达式(49)和(47)代入 Ω 的一般方程, 并注意此时 $C = -D$ 而得到 Ω 的表示式为:

$$\Omega = \int_{-D}^{+D} \frac{4\pi^2}{[B(y) - A(y)]^2} dy \int_{-D}^{+D} [B(y) - A(y)]^2 [\overline{u_2}(y) + \overline{v_2}(y) + \overline{J}(y) - \overline{u_1}^2(y) - \overline{v_1}^2(y) - 2\overline{u_1}(y)\overline{v_1}(y)] dy \quad (52)$$

考虑到式(45)和(46)的对称条件可知 $\overline{u_1}(y)$ 为 y 的偶函数, 而 $\overline{u_1}(y)$ 和 $\overline{J}(y)$ 均为 y 的奇函数。由定义式(49)可知:

$$\overline{u_1}(-y) = \frac{1}{B(y) - A(y)} \int_{-B(y)}^{-A(y)} u(x, -y) dx$$

从(46)式有 $A(-y) = -B(y)$ 和 $B(-y) = -A(y)$, 则:

$$\overline{u_1}(-y) = \frac{1}{B(y) - A(y)} \int_{-B(y)}^{-A(y)} u(x, -y) dx$$

用 $-x$ 代替 x 并结合式(45)给出:

$$\overline{u_1}(-y) = \frac{1}{B(y) - A(y)} \int_{A(y)}^{B(y)} u(-x, -y) dx = \overline{u_1}(y)$$

同理可知 $\overline{v_1}(-y) = -\overline{v_1}(y)$; $\overline{J}(-y) = -\overline{J}(y)$ 。由此得到(52)式中 $\overline{J}(y)$ 和 $\overline{u_1}(y)$ 的积分均为零。

将(52)式中的 Ω 用下式来表示:

$$\Omega = \Omega_E + \Omega_0 \quad (53)$$

Ω_E 和 Ω_0 分别为 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 的函数, 也即波差的偶部 $u_0(x_s, y_r)$ 和奇部 $v_0(x_s, y_r)$ 的函数。且

$$\Omega_E = \int_{-D}^{+D} \frac{4\pi^2}{[B(y) - A(y)]^2} dy \int_{-D}^{+D} [B(y) - A(y)]^2 [\overline{u_2}(y) - \overline{u_1}^2(y)] dy \quad (54)$$

$$\Omega_0 = \frac{4\pi^2}{\int_{-D}^{+D} [B(y) - A(y)]^2 dy} \int_{-D}^{+D} [B(y) - A(y)]^2 [v_2(y) - v_1^2(y)] dy$$

(55)

上述的结果有非常重要的实际意义。除大视场角的情况外，焦平面的移动仅是改变 $u_0(x_s, y_T)$ 的值，所以当 Ω_s 为最小时即为最佳焦面。而与出现于 $v_0(x_s, y_T)$ 中的象差（如彗差）无关。类似地参考球面的中心在象平面上的移动仅改变 $v_0(x_s, y_T)$ 的值，在象平面上 LSF 最大值的位置 Ω_0 为最小而与在 $u_0(x_s, y_T)$ 中所包含的象差（如球差和象散）无关。此外，借助于象差系数求 Ω 表达式的工作量就大大减少了。以上方法特别适合应用于具有旋转对称结构及对称光瞳，如矩形、圆形和椭圆形光瞳的光学系统。

五、旋转对称系统

对于这种系统，极坐标形式波差多项式为：

$$W_0(\gamma, \phi) = \sum_m \sum_p W(m, p) \gamma^m \cos^p \phi \quad (56)$$

上式中为了避免下标的重复使用将象差系数记为 $W(m, p)$ 。则 $m = 1, 2, \dots$ ；而 $p = 0, 1, 2, \dots$ ；且有 $p \leq m$ 。当为直角坐标时，有 $x_s = \gamma \sin \phi$ 和 $y_T = \gamma \cos \phi$ 。(56)式变为：

$$W_0(x_s, y_T) = \sum_m \sum_p W(m, p) (x_s^2 + y_T^2)^{\frac{m-p}{2}} y_T^p \quad (57)$$

将偶部和奇部分别与 p 的偶次和奇数项相比较，则有：

$$u_0(x_s, y_T) = \sum_{m=2,4,\dots} \sum_{p=0,2,4,\dots} u(m, p) (x_s^2 + y_T^2)^{\frac{m-p}{2}} y_T^p \quad (58)$$

$$v_0(x_s, y_T) = \sum_{m=1,3,\dots} \sum_{p=1,3,\dots} v(m, p) (x_s^2 + y_T^2)^{\frac{m-p}{2}} y_T^p \quad (59)$$

将 $W(m, p)$ 分为两部分 $u(m, p)$ 和 $v(m, p)$ 以区分偶次和奇次象差项。这同样地使我们所取的 m 和 p 值易于被了解。

(58)式中 $m = 2, p = 0$ 的项 $u(2, 0)(x_s^2 + y_T^2)$ 在轴上和小视场角的情况代表焦点的轴向位移。关于这个系数最小化的 Ω_s 决定了最佳焦平面。类似地 (59) 式中 $m = 1, p = 1$ 的项 $v(1, 1)y_T$ 表示焦点垂轴位移的影响，也即参考球面的中心沿 v_T 轴在象平面上相对于几何象点的位移。关于这个系数最小化的 Ω 确定了 LSF 极大的位置。

根据(44)式 ψ 方位的直线其 $W(x_s, y_T)$ 的偶部与奇部在旋转坐标下分别为：

$$u(x, y) = \sum_m \sum_p u(m, p) (x^2 + y^2)^{\frac{m-p}{2}} (y \cos \psi + x \sin \psi)^p \quad (60)$$

$$v(x, y) = \sum_m \sum_p v(m, p) (x^2 + y^2)^{\frac{m-p}{2}} (y \cos \psi + x \sin \psi)^p \quad (61)$$

在对称形光瞳情况下分别将(60)和(61)式代入(48)和(50)式，同时给以适当的边界值给出结果如下：

$$\overline{u}_1(y) = \sum_m \sum_p u(m, p) \frac{1}{B(y) - A(y)} \int_{A(y)}^{B(y)} (x^2 + y^2)^{\frac{m-p}{2}} (y \cos \psi + x \sin \psi)^p dx \quad (62)$$

$$\overline{u_0}(y) = \sum_m \sum_p \sum_n \sum_q u(m, p) u(n, q) \frac{1}{B(y) - A(y)} \int_{A(y)}^{B(y)} (x^2 + y^2)^{\frac{m+n-p-q}{2}} (y \cos \psi + x \sin \psi)^{p+q} dx \quad (63)$$

对 $\overline{v_1}$ 和 $\overline{v_2}(y)$ 有同样形式的代达式只要用 $v(m, p)$ 和 $v(n, q)$ 来代替 $u(m, p)$ 和 $u(n, q)$ 并代以适当的 (m, p) 和 (n, q) 值即可。

将(63)式的 $\overline{u_2}(y)$ 和(62)式的 $\overline{u_1}(y)$ 的平方代入式(54)在 Ω_x 则有:

$$\Omega_x = \sum_m \sum_p \sum_n \sum_q C(m, p; n, q) u(m, p) u(n, q) \quad (64)$$

系数 $C(m, p; n, q)$ 由下式给出:

$$C(m, p; n, q) = \int_{-b}^b \frac{4x^2}{[B(y) - A(y)]^2 dy} \left[\int_{-b}^b \{ [B(y) - A(y)] J(m+n, p+q; y) - J(m, p; y) J(n, q; y) \} dy \right] \quad (65)$$

上式中:

$$J(r, s; y) = \int_{A(y)}^{B(y)} (x^2 + y^2)^{\frac{r-s}{2}} (y \cos \psi + x \sin \psi)^s dx \quad (66)$$

以 $v(m, p)$ 和 $v(n, q)$ 代替 $u(m, p)$ 和 $u(n, q)$ 并代入合适的 (m, p) 和 (n, q) 值则 Ω_0 有相同形式的表达式。从式(65)看到 (m, p) 和 (n, q) 的相互交换会导致系数 $C(m, p; n, q)$ 相互交换, 因此有如下关系:

$$C(n, q; m, p) = C(m, p; n, q) \quad (67)$$

上式简化了计算这些系数的符号。

以下重新恢复象差系数的更习惯的记法, 即以 $W_{m,p}$ 代替 $u(m, p)$, 此时 m 和 p 仅取偶数。则 $W_0(\alpha_s, y_T)$ 偶部的系数系列为:

$$\{W_{20}, W_{22}, W_{40}, W_{42}, W_{44}, W_{60}, W_{62}, W_{64}, W_{66}, \dots\} \quad (68)$$

在 Ω_x 的表达式(64)中出现的 $u(m, p)u(n, q)$ 也即 W_m, W_n 的值将为(68)式结果的积, 也即:

$$\begin{array}{l} W_{20} \\ W_{22} \\ W_{40} \\ W_{44} \\ W_{60} \\ \dots \end{array} \begin{array}{l} W_{20} \\ W_{22} \\ W_{40} \\ W_{44} \\ W_{60} \\ \dots \end{array} \begin{array}{l} W_{22} \\ W_{40} \\ W_{42} \\ W_{44} \\ W_{60} \\ \dots \end{array} \begin{array}{l} W_{40} \\ W_{42} \\ W_{44} \\ W_{44} \\ W_{60} \\ \dots \end{array} \begin{array}{l} W_{42} \\ W_{44} \\ W_{44} \\ W_{44} \\ W_{60} \\ \dots \end{array} \begin{array}{l} W_{44} \\ W_{44} \\ W_{44} \\ W_{44} \\ W_{60} \\ \dots \end{array} \begin{array}{l} W_{60} \\ W_{60} \\ W_{60} \\ W_{60} \\ W_{60} \\ \dots \end{array} \quad (69)$$

则式(64)可以写成为:

$$\Omega_x = \sum_{m=2,4,\dots}^M \sum_{p=0,2,\dots}^{p(m)} D(m, p; m, p) W_{m,p}^2 + \sum_{m=2,4,\dots}^M \sum_{p=m+2,\dots}^{p(m)} W_{m,p} \left[\sum_n \sum_q D(m, p; n, q) W_{n,q} \right] \quad (70)$$

$$\begin{aligned} \text{上式中当 } p < m \text{ 时有 } & \begin{cases} n = m; & q = p + 2, p + 4, \dots \\ n = m + 2, m + 4, \dots; & q = 0, 2, 4, \dots \end{cases} \\ \text{当 } p = m \text{ 时有 } & n = m + 2, m + 4, \dots; q = 0, 2, 4, \dots \end{aligned}$$

而在象差的偶部 $u_0(x_s, y_r)$ 中有:

$$\begin{cases} M = m \text{ 的最大值} \\ p(m) = \text{对应于每一 } m \text{ 值的 } p \text{ 之最大值且 } p(m) \leq m \end{cases} \quad (71)$$

设 $D(m, p, n, q)$ 为新系数的值, 则有,

$$D(m, p, n, q) = \begin{cases} C(m, p, n, q) & \text{当 } n = m \text{ 和 } q = p \text{ 时} \\ 2C(m, p, n, q) & \text{当 } n \neq m \text{ 或 } q \neq p \text{ 时} \end{cases} \quad (72)$$

如果 N 为 $u_0(x_s, y_r)$ 中的总项数, 则与式(64)的 N^2 项相比较式(70)中仅有 $\frac{1}{2} N(N+1)$ 项。

将(61)式中的 $v(x, y)$ 代入式(48)和(50)给出了 $\bar{v}_1(y)$ 和 $\bar{v}_2(y)$ 的表达式。这些表达式和式(62)和(63)相同的形式, 仅有的区别在于以系数 $v(m, p)$ 来替换 $u(m, p)$ 和使用适当的奇数 m, p, n 和 q 。将上式的 $\bar{v}_1(y)$ 和 $\bar{v}_2(y)$ 代入 Ω_0 的表示式就得到:

$$\Omega_0 = \sum_m \sum_p \sum_n \sum_q C(m, p, n, q) v(m, p) v(n, q) \quad (73)$$

此时的系数 $C(m, p, n, q)$ 仍如式(75)和(76)所示, 仍保持其对称特性。

对应于式(68)中 Ω_s , 其最终的系数为:

$$\{W_{11}, W_{31}, W_{33}, W_{51}, W_{53}, W_{55}, W_{71}, \dots\} \quad (74)$$

这些系数同样地给出如(69)那样的对称方阵。以同样的方式处理就可求得,

$$\begin{aligned} \Omega_0 = & \sum_{m=1,3,\dots}^M \sum_{p=1,3,\dots}^{(p,m)} D(m, p, m, p) W_{m,p}^2 + \\ & \sum_{m=1,3,\dots}^M \sum_{p=1,3,\dots}^{(p,m)} W_{m,p} \left[\sum_n \sum_q^{(n,m)} D(m, p, n, q) W_{n,q} \right] \end{aligned} \quad (75)$$

$$\begin{aligned} \text{上式中当 } p < m \text{ 时有 } & \begin{cases} n = m; & q = p + 2, p + 4, \dots \\ n = m + 2, m + 4, \dots; & q = 1, 3, \dots \end{cases} \\ \text{当 } p = m \text{ 时有 } & n = m + 2, m + 4, \dots; q = 1, 3, \dots \end{aligned}$$

$$\begin{cases} M = m \text{ 的最大值} \\ p(m) = \text{对应于每一 } m \text{ 时 } p \text{ 的最大值且 } p(m) \leq m \end{cases} \quad (76)$$

(70) 式中系数再次被定义为

$$D(m, p, n, q) = \begin{cases} C(m, p, n, q) & \text{当 } n = m \text{ 和 } q = p \text{ 时} \\ 2C(m, p, n, q) & \text{当 } n \neq m \text{ 或 } q \neq p \text{ 时} \end{cases}$$

其和 Ω_s 的表达式完全一致。

如果象平面沿轴移动, 也即焦面的轴向移动其对波差的影响是加上如下的项于波差函数:

$$\delta W_s = \delta W_{z0} (x_s^2 + y_r^2) \quad (77)$$

但是对于其它的系数 (甚至对于象差的奇部) 在大孔径和大视场的情况下也会引起不可忽视

的变化。而相反地参考球面中心沿 x_0 轴的位移，也即焦点的垂轴移动反对系数 W_{11} 引起变化，其结果为：

$$\delta W_T = \delta W_{11} \gamma_T \quad (78)$$

当参考球面的中心取于几何象点处时 $W_{11} = 0$ 。因此，使 Ω_0 为极小时的条件 $\partial\Omega_0/\partial W_{11} = 0$ 将确定出LSF取极大值的 u' 的位置，即 $u' = W_{11}$ 。该点处的 Ω_0 的值即为确定象差容限所需的值。

因而将式(75)中包含 W_{11} 的项分离出来而改写成：

$$\begin{aligned} \Omega_0 = & D(1, 1; 1, 1)W_{11}^2 + W_{11} \left[\sum_{n=3,5,\dots}^M \sum_{q=1,3,\dots}^{P(m)} D(1, 1; n, q)W_{nq} \right] + \\ & \sum_{m=3,5,\dots}^M \sum_{p=1,3,\dots}^{P(m)} D(m, p; m, p)W_{mp}^2 + \\ & \sum_{m=3,5,\dots}^M \sum_{p=1,3,\dots}^{P(m)} W_{mp} \left[\sum_n^M \sum_q^{P(m)} D(m, p; n, q)W_{nq} \right] \end{aligned} \quad (79)$$

同样地当 $p < m$ 时 $\begin{cases} n = m, q = p + 2, p + 4, \dots \\ n = m + 2, m + 4, \dots; q = 1, 3, \dots \end{cases}$

当 $p = m$ 时 $n = m + 2, m + 4, \dots; q = 1, 3, \dots$

从上式对 W_{11} 微分可得 Ω_0 极小值的条件为：

$$\frac{\partial\Omega_0}{\partial W_{11}} = 2D(1, 1; 1, 1)W_{11} + \sum_{n=3,5,\dots}^M \sum_{q=1,3,\dots}^{P(m)} D(1, 1; n, q)W_{nq} = 0 \quad (80)$$

记 $D(1, 1; n, q) = D(n, q; 1, 1)$ 并以 m 和 p 来取代 n 和 q ，则方程(80)给出结果为：

$$W_{11} = - \sum_{m=3,5,\dots}^M \sum_{p=1,3,\dots}^{P(m)} D(m, p)W_{mp} \quad (81)$$

$$\text{上式中 } D(m, p) = \frac{D(m, p; 1, 1)}{2D(1, 1; 1, 1)} = \frac{C(m, p; 1, 1)}{C(1, 1; 1, 1)} \quad (82)$$

由(81)式所得之 W_{11} 为垂轴焦点位移的最佳值。

在方位角 $\psi = 0$ 时系数 $D(1, 1; 1, 1) = C(1, 1; 1, 1) = 0$ ，所以式(79)所得的 Ω_0 和 W_{11} 无关。这是由于在这种情况下LSF是关于沿直线 $u' = 0$ 的不变的极大值对称。其 W_{11} 项的影响只是使参考球面的中心沿这条线移动。接着只讨论 $\psi \neq 0$ 的情况，而 $\psi = 0$ 的特殊情况在以后再讨论。

当 $\psi \neq 0$ 时象平面上LSF的极大值处 Ω_0 的值可将式(81)代入(79)而得到。该 Ω_0 值为其极小值。

$$\begin{aligned} \bar{\Omega}_0 = & D(1, 1; 1, 1) \sum_{n=3,5,\dots}^M \sum_{q=1,3,\dots}^{P(m)} D(m, p)W_{mp} \left[\sum_{n=3,5,\dots}^M \sum_{q=1,3,\dots}^{P(m)} D(n, q)W_{nq} \right] - \\ & \sum_{m=3,5,\dots}^M \sum_{p=1,3,\dots}^{P(m)} D(m, p)W_{mp} \left[\sum_{n=3,5,\dots}^M \sum_{q=1,3,\dots}^{P(m)} D(1, 1; n, q)W_{nq} \right] + \\ & \sum_{m=3,5,\dots}^M \sum_{p=1,3,\dots}^{P(m)} D(m, p; m, p)W_{mp}^2 + \end{aligned}$$

$$\sum_{m=3,5,\dots}^M \sum_{p=1,3,\dots}^{p(m)} W_{m,p} \left[\sum_n^M \sum_q^{p(m)} D(m,p;n,q) W_{n,q} \right] \quad (83)$$

上式中 p, m, n, q 的取值如前所述。

(83) 式中第二项求和号下各项的次序为:

$$\{W_{31}, W_{33}, W_{51}, W_{53}, W_{55}, W_{71}, \dots\} \quad (84)$$

而每一项求和号下项所组成的系列均有一如(69)式所示的对称方阵。以同样的方式处理(83)式中的二个可将其写成如下形式:

$$\begin{aligned} & D(1,1;1,1) \sum_{m=3,5,\dots}^M \sum_{p=1,3,\dots}^{p(m)} D^2(m,p) W_{m,p}^2 + \\ & 2D(1,1;1,1) \sum_{m=3,5,\dots}^M \sum_{p=1,3,\dots}^{p(m)} D(m,p) W_{m,p} \left[\sum_n^M \sum_q^{p(m)} D(n,q) W_{n,q} \right] - \\ & \sum_{m=3,5,\dots}^M \sum_{p=1,3,\dots}^{p(m)} D(m,p) D(1,1;m,p) W_{m,p}^2 - \\ & 2 \sum_{m=3,5,\dots}^M \sum_{p=1,3,\dots}^{p(m)} D(m,p) W_{m,p} \left[\sum_n^M \sum_q^{p(m)} D(1,1;n,q) W_{n,q} \right] \end{aligned}$$

将上结果代入(83)式并合并同类项后得到:

$$\begin{aligned} \bar{\Omega}_0 &= \sum_{m=3,5,\dots}^M \sum_{p=1,3,\dots}^{p(m)} \bar{D}(m,p;m,p) W_{m,p}^2 + \\ & \sum_{m=3,5,\dots}^M \sum_{p=1,3,\dots}^{p(m)} W_{m,p} \left[\sum_n^M \sum_q^{p(m)} \bar{D}(m,p;n,q) W_{n,q} \right] \quad (85) \end{aligned}$$

m, p, n 和 q 的取值仍如前所述。上式中新系数为:

$$\begin{cases} \bar{D}(m,p;m,p) = D(1,1;1,1) D^2(m,p) - D(m,p) D(1,1;m,p) + D(m,p;m,p) \\ \bar{D}(m,p;n,q) = 2D(1,1;1,1) D(m,p) D(n,q) - 2D(m,p) D(1,1;n,q) + \\ \quad D(m,p;n,q) \quad \text{当 } n \neq m \text{ 或 } q \neq p \text{ 时} \end{cases} \quad (86)$$

现在我们直接以(65)式所定义的系数 $C(m,p;n,q)$ 来表示系数 $\bar{D}(m,p;m,p)$ 和 $\bar{D}(m,p;n,q)$ 。分别使用 $D(m,p;n,q)$ 和 $D(m,p)$ 的表示式(72)和(82)并注意到(85)式中 m 和 p 的值分别 ≥ 3 和 1 。则有:

$$\begin{aligned} \bar{D}(m,p;m,p) &= C(1,1;1,1) \left[\frac{C(m,p;1,1)}{C(1,1;1,1)} \right]^2 - \frac{C(m,p;1,1)}{C(1,1;1,1)} [2C(1,1;m,p)] \\ & \quad + C(m,p;m,p) \quad \text{当 } \psi \neq 0 \text{ 时} \end{aligned}$$

由于 $C(1,1;m,p) = C(m,p;1,1)$ 则上式可简化为:

$$\bar{D}(m,p;m,p) = C(m,p;m,p) - \frac{C^2(m,p;1,1)}{C(1,1;1,1)} \quad \text{当 } \psi \neq 0 \text{ 时} \quad (87)$$

以同样的方法可求得:

$$\begin{aligned} \overline{D}(m, p, n, q) &= 2C(1, 1, 1, 1) \left[\frac{C(m, p, 1, 1)}{C(1, 1, 1, 1)} \right] \left[\frac{C(n, q, 1, 1)}{C(1, 1, 1, 1)} \right] - \\ & 2 \left[\frac{C(m, p, 1, 1)}{C(1, 1, 1, 1)} \right] [2C(1, 1, n, q)] + 2C(m, p, n, q) \end{aligned}$$

并改写为:

$$\overline{D}(m, p, n, q) = 2 \left[C(m, p, n, q) - \frac{C(m, p, 1, 1)C(n, q, 1, 1)}{C(1, 1, 1, 1)} \right] \quad \text{当 } \psi \neq 0 \text{ 时} \quad (83)$$

对任何具有对称光瞳的系统, 在方位角 $\psi = 0$ 时系数 $C(1, 1, 1, 1) = 0$, 这是由于当 $\psi = 0$ 时式 (65) 和 (66) 中有 $A(y) = -B(y)$, 因此:

$$\begin{aligned} J(1, 1, y) \Big|_{\psi=0} &= \int_{-B(y)}^{+B(y)} y dx = 2B(y)y \\ J(2, 2, y) \Big|_{\psi=0} &= \int_{-B(y)}^{B(y)} y^2 dx = 2B(y)y^2 \end{aligned}$$

将上二结果用式(66)给出:

$$[B(y) - A(y)]J(2, 2, y) - J(1, 1, y) J(1, 1, y) = 0$$

因而 $C(1, 1, 1, 1) = 0$.

如前所述, 这就意味着(79)式所给出的 Ω_0 当 $\psi = 0$ 时和 W_{11} 无关。这是和以下事实相对应的, 即 W_{11} 值的改变在 $\psi = 0$ 的情况下仅只意味着参考球面中沿直线 $u' = 0$ 移动。而在该直线上LSF的强度是不变的且为极大值。为了求得 $\psi = 0$ 时LSF的极大值处的 Ω_0 , 让 $W_{11} = 0$, 则一般公式(79)就成为:

$$\begin{aligned} \overline{\Omega}_0 &= \sum_{m=3,5,\dots}^M \sum_{p=1,\dots}^{P(m)} D(m, p, n, q) W_{n,p}^2 + \\ & \sum_{n=3,5,\dots}^M \sum_{p=1,\dots}^{P(m)} W_{n,p} \left[\sum_n^M \sum_p^{P(m)} D(m, p, n, q) W_{n,q} \right] \end{aligned} \quad (89)$$

定义系数 $\overline{D}(m, p, n, q) = D(m, p, n, q)$ 则上式的情况就包含于 $\overline{\Omega}_0$ 的一般公式 (85) 之中了。此时有:

$$\overline{D}(m, p, n, q) \Big|_{\psi=0} = \begin{cases} C(m, p, n, q) & \text{当 } n = m \text{ 和 } q = p \text{ 时} \\ 2C(m, p, n, q) & \text{时 } n \neq m \text{ 或 } q \neq p \text{ 时} \end{cases} \quad (90)$$

同样地, 将式(87)和(88)合并成一个公式得:

$$\overline{D}(m, p, n, q) \Big|_{\psi=0} = \begin{cases} C(m, p, n, q) - \frac{C(m, p, 1, 1)C(n, q, 1, 1)}{C(1, 1, 1, 1)} & \text{当 } n = m \text{ 且 } q = p \text{ 时} \\ 2C(m, p, n, q) - \frac{C(m, p, 1, 1)C(n, q, 1, 1)}{C(1, 1, 1, 1)} & \text{当 } n \neq m \text{ 或 } q \neq p \text{ 时} \end{cases} \quad (91)$$

上式和(89)式一起确定了任意情况下的 $\overline{\Omega}_0$ 的系数。

必须注意到上述求对应于LSF最大值的位移量 \overline{W}_{11} 和该点处 Ω_0 之值的过程可以用于任一
对称光瞳的情况。

在解析研究时我们可以利用 Ω_0 的公式和由式(72)来定义的系数 $D(m, p, n, q)$, 来研究
关于垂轴位移 \overline{W}_{11} 和适当的象差系数使 Ω_0 最小化而求得LSF极大值的位置和最佳的校正方
案。当使用优化程序时, 直接涉及的是使LSF极大值的位置之 Ω_0 为最小, 而使以 $\overline{D}(m, p,$
 $n, q)$ 为系数的 $\overline{\Omega}_0$ 可以被应用。

六、圆形光瞳时系数的计算

借助于以式(65)和(66)所定义的系数 $C(m, p, n, q)$ 而得到了 $D(m, p, n, q)$, $D(m, p)$ 和
 $\overline{D}(m, p, n, q)$ 的表达式(72), (82), (86)和(87)。这些公式适用于关于 x_s 和 y_T 对称的任意形状
的光瞳。

在透镜系统所成的轴上点情况, 其光瞳在正则条件下为单位圆。在轴外象的情况下, 通常
其光瞳近似为椭圆, 而在正则座标时也是单位圆。King^[7]指出这个近似甚至在有渐晕时也是
有用的。为此我们考虑光瞳为 $x_s^2 + y_T^2 = 1$ 时系数的计算。

在这时, 式(65)和(66)中 $J(m, p, y)$ 和 $C(m, p, n, q)$ 的上下限为:

$$A(y) = -\sqrt{1-y^2}, \quad B(y) = +\sqrt{1-y^2}; \quad D = 1 \quad (92)$$

$$\text{则: } \int_{-D}^{+D} [B(y) - A(y)]^2 dy = \int_{-1}^{+1} 4(1-y^2) dy = \frac{16}{3} \quad (93)$$

由图2知式(66)为:

$$J(r, s; y) = \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{+\sqrt{1-y^2}} (x^2 + y^2)^{\frac{r-s}{2}} (y \cos \psi + x \sin \psi)^s dx \quad (94)$$

$$\text{式(65)为: } C(m, p; n, q) = \frac{3}{4} \pi^2 \int_{-1}^{+1} [2\sqrt{1-y^2} J(m+n, p+q, y) - J(m, p; y) J(n, q; y)] dy \quad (95)$$

对在子午截面上的直线 $\psi = 0$, 此时(94)式改写为:

$$J(r, s; y) |_{\psi=0} = y^s \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{+\sqrt{1-y^2}} (x^2 + y^2)^{\frac{r-s}{2}} dx$$

展开括号并整理之可得:

$$\begin{aligned} J(r, s; y) |_{\psi=0} &= y^s \sum_{j=0}^{\frac{r-s}{2}} \binom{\frac{r-s}{2}}{j} (y^2)^{\frac{r-s}{2}-j} \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{+\sqrt{1-y^2}} x^{2j} dx \\ &= \sum_{j=0}^{\frac{r-s}{2}} \binom{\frac{r-s}{2}}{j} \left(\frac{2}{2j+1} \right) y^{r-2j} (1-y^2)^{\frac{2j+1}{2}} \end{aligned} \quad (96)$$

将(96)式代入(95)式得:

$$C(m, p; n, q) |_{\psi=0} = \frac{3\pi^2}{4} \int_{-1}^{+1} \left[2\sqrt{1-y^2} \sum_{j=0}^{\frac{m+n-p-q}{2}} \binom{\frac{m+n-p-q}{2}}{j} \left(\frac{2}{2j+1}\right) y^{m+n-2j} (1-y^2)^{\frac{2j+1}{2}} - \sum_{j=0}^{\frac{m-p}{2}} \binom{\frac{m-p}{2}}{j} \left(\frac{2}{2j+1}\right) y^{m-2j} (1-y^2)^{\frac{2j+1}{2}} \sum_{k=0}^{\frac{n-q}{2}} \binom{\frac{n-q}{2}}{k} \left(\frac{2}{2k+1}\right) y^{n-2k} (1-y^2)^{\frac{2k+1}{2}} \right] dy$$

定义标准积分为:

$$I(r, s) = \int_{-1}^{+1} y^r (1-y^2)^s dy = \frac{\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right) \Gamma(s+1)}{\Gamma\left(\frac{r+1}{2} + s + 1\right)} \quad (97)$$

上式中 r 为偶数。则得到 $C(m, p; n, q)$ 的表示式为:

$$C(m, p; n, q) |_{\psi=0} = 3\pi^2 \sum_{j=0}^{\frac{m+n-p-q}{2}} \binom{\frac{m+n-p-q}{2}}{j} \left(\frac{1}{2j+1}\right) I(m+n-2j, j+1) - 3\pi^2 \sum_{j=0}^{\frac{m-p}{2}} \binom{\frac{m-p}{2}}{j} \left(\frac{1}{2j+1}\right) \sum_{k=0}^{\frac{n-q}{2}} \binom{\frac{n-q}{2}}{k} \left(\frac{1}{2k+1}\right) I(m+n-2j-2k, j+k+1) \quad (98)$$

上式中 m 和 n 有相同的奇偶性。(98) 式中 y 的次数恒为偶数。注意到式 (98) 的情况其中 $(r+1)/2$ 和 $(r+1)/2 + (s+1)$ 两者对任意 r 来说均为 $\frac{1}{2}$ 的整数倍, 而 $(s+1)$ 为整数, 由 Γ 函数的乘积公式则 (97) 式可简化为:

$$I(r, s) = \frac{2^s s!}{(r+2s+1)(r+2s-1)(r+2s-3)\cdots(r+1)} \quad (99)$$

在 $\psi = 0$ 的情况下仅只需要对 (99) 中的 $r = (m+n-2j)$ 和 $s = (j+1)$ 及 $r = (m+n-2j-2k)$ 和 $s = (j+k+1)$ 时的情况计算 $C(m, p; n, q)$ 。

当 $\psi = \pi/2$, 也即线条在弧矢截面上时公式 (94) 简化为:

$$J(r, s; y) |_{\psi=\frac{\pi}{2}} = \int_{-1, i-\sqrt{y^2}}^{+1, i-\sqrt{y^2}} (x^2 + y^2)^{\frac{r-s}{2}} x^s dx = \sum_{j=0}^{\frac{r-s}{2}} \binom{\frac{r-s}{2}}{j} (y^2)^j \int_{-1, i-\sqrt{y^2}}^{+1, i-\sqrt{y^2}} x^{r-2j} dx = \begin{cases} 0 & \text{当 } r \text{ 为奇数时} \\ \left[\sum_{j=0}^{\frac{r-s}{2}} \binom{\frac{r-s}{2}}{j} \left(\frac{2}{r-2j+1}\right) y^{2j} (1-y)^2 \right]^{\frac{r-2j+1}{2}} & \text{当 } r \text{ 为偶数时} \end{cases}$$

(95)式 $C(m, p, n, q)$ 积分的第二项当为奇象差, 也即 m 和 n 为奇数时为零。

在 $\psi = \pi/2$ 的情况下将(100)式代入(95)并结合适当的 r 和 s 值可得:

$$\begin{aligned}
 C(m, p, n, q) \Big|_{r=\frac{\pi}{2}} &= \frac{3\pi^2}{4} \int_{-1}^{+1} \left[2\sqrt{1-y^2} \sum_{j=0}^{\frac{m+n-p-q}{2}} \binom{\frac{m+n-p-q}{2}}{j} \right. \\
 &\quad \left. \left(\frac{2}{m+n-2j+1} \right) y^{2j} (1-y^2)^{\frac{m+n-2j+1}{2}} - s(p, q) \sum_{j=0}^{\frac{m-p}{2}} \binom{\frac{m-p}{2}}{j} \right. \\
 &\quad \left. \left(\frac{2}{m-2j+1} \right) y^{2j} (1-y^2)^{\frac{m-2j+1}{2}} \sum_{k=0}^{\frac{n-q}{2}} \binom{\frac{n-q}{2}}{k} \times \left(\frac{2}{n-2k+1} \right) y^{2k} (1-y^2)^{\frac{n-2k+1}{2}} \right] dy
 \end{aligned} \tag{101}$$

$$\text{上式中 } s(p, q) = \begin{cases} 1 & m, n \text{ 为零或偶数} \\ 0 & m, n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

利用(98)式的积分于(101)式其结果为:

$$\begin{aligned}
 C(m, p, n, q) &= 3\pi^2 \sum_{j=0}^{\frac{m+n-p-q}{2}} \binom{\frac{m+n-p-q}{2}}{j} \left(\frac{1}{m+n-2j+1} \right) I \left(2j, \frac{m+n}{2} - j + 1 \right) - \\
 &\quad s(m, n) \sum_{j=0}^{\frac{m-p}{2}} \binom{\frac{m-p}{2}}{j} \left(\frac{1}{m-2j+1} \right) \sum_{k=0}^{\frac{n-q}{2}} \binom{\frac{n-q}{2}}{k} I \left(2j+2k, \frac{m+n}{2} - j + k + 1 \right)
 \end{aligned} \tag{102}$$

上式中 $I(r, s)$ 中的 r 恒为偶数, 因而对偶象差 $s(m, n) = 1$, 而 $I(r, s)$ 值由(99)式确定, 对奇象差 $I(r, s) = 0$ 。

在特殊情况下, 例如:

$$W(\gamma, \phi) = W_{42}\gamma^4 \cos^2\phi + W_{44}\gamma^4 \cos^4\phi \quad \text{且 } W_{14} = -W_{42} \tag{103}$$

$$\text{及 } W(\gamma, \phi) = W_{31}\gamma^3 \cos\phi + W_{33}\gamma^3 \cos^3\phi \quad \text{且 } W_{33} = -W_{31} \tag{104}$$

此时在子午截面上($\phi = 0, \pi$)和在弧矢截面上($\phi = \pm \frac{\pi}{2}$)波差均为零。在式(103)中波差在四个方位, 即 $\phi = 45^\circ, \pi - 45^\circ, -45^\circ$ 和 $-(\pi - 45^\circ)$ 处有极大值, 而(104)式中的波差同样地在四个方位, 即 $\phi = 54.7^\circ, \pi - 54.7^\circ, -54.7^\circ$ 和 $-(\pi - 54.7^\circ)$ 处有极大值。在这种情况下波面和其相关的点图的形状指出: 线象对(103)式当 $\psi = 45^\circ$ 时及对(104)式当 $\psi = 90^\circ - 54.7^\circ = 35.3^\circ$ 比 $\psi = 0$ 及 $\psi = 90^\circ$ 时有好得多的质量。可以求得 $0 \leq \psi \leq \pi$ 之间的任一 Ω 值。

在 $\psi = 0$ 或 $\psi = \pi/2$ 的情况下(94)式的积分可以展开因子 $(y \cos\psi + x \sin\psi)^4$ 所算得, 整个过程和 $\psi = 0$ 或 $\psi = 90^\circ$ 的情况是完全一致的。但是这导致求 $C(m, p, n, q)$ 的公式从一重和两重对称变为二重和四重对称。为了计算系数 $C(m, p, n, q)$ 必须计算大量的项, 特别当 (m, p) 和 (n, q) 有较大值时。这时若使用Gauss积分就比较方便了。对Gauss点 $y = y_1, y_2, \dots, y_s$ 。式(94)中 $J(r, s, y)$ 的积分可由Gauss积分得到, 然后根据这些 $J(r, s, y_i)$ 值再次利用Gauss法来计算

(95)式的积分而求得 $C(m, p, n, q)$ 。如果 (m, p) 及 (n, q) 有最大值为 $M = 10$ 和 $P = 10$, 那末积分 $J(r, s, y)$ 将为20阶的多项式 ($r = m + n, s = n + q$), $n \geq 11$ 的Gauss 积分就可给出积分的真值。

七、象差容限的例子

允许的象差极限为 $\hat{G}(o) \geq 0.80$, 也就是说象差不能超过这样的极限, 即LSF的最大强度的降低不应超过衍射受限系统焦点处LSF强度的20%。故容限的极限为:

$$\Omega \leq 0.20$$

相对于适当的象差系数使 Ω 最小化即可确定最佳焦面和最佳的象差校正形式。

1. 轴上球差

首先考虑初级球差加上三级球差的情况, 此时的波差为:

$$W(\gamma, \phi) = W_{20}\gamma^2 + W_{40}\gamma^4 + W_{60}\gamma^6 \quad (105)$$

其中 W_{20} 代表相对傍轴象平面的轴向焦点移动。此时 Ω 和方位角 ϕ 无关。利用式(72), (82), (86)和(87)得到:

$$\begin{aligned} \Omega = \Omega_x = & 2.4063W_{20}^2 + 2.5189W_{40}^2 + 2.2098W_{60}^2 + 4.7362W_{20}W_{40} \\ & + 4.2152W_{20}W_{60} + 4.6917W_{40}W_{60} \end{aligned} \quad (106)$$

在大部分实际系统中初级象差可以进行控制而反对三级象差产生微小的影响。最佳象差校正将是对 W_{40} 来说 Ω 为最小值时, 而最佳焦面则为相对于 W_{20} 来说 Ω 为最小值时。这两个条件给出方程如下:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial W_{40}} = 0 \quad \frac{\partial \Omega}{\partial W_{20}} = 0 \quad (107)$$

结合(105)和(107)式得到二个 W_{20} , W_{40} 和 W_{60} 的线性方程。这些方程的解为:

$$\beta_{40} = \frac{W_{40}}{W_{60}} = -1.48 \quad \beta_{20} = \frac{W_{20}}{W_{60}} = 0.58 \quad (108)$$

将式(108)代入(106)得:

$$\Omega_{min} = 0.0124W_{60}^2$$

所以满足 $\Omega \leq 0.20$ 时有:

$$|W_{60}| \leq 4.02\lambda$$

对于上述量PSF的Strehl比给出的结果为:

$$\beta_{40} = -1.50 \quad \beta_{20} = 0.60 \quad |W_{60}| \leq 4.00\lambda \quad (109)$$

这两组数据间无明显的差别。

2. 彗差

此时的波差形式为:

$$W(\gamma, \phi) = W_{11}\gamma \cos \phi + W_{31}\gamma^3 \cos \phi + W_{51}\gamma^5 \cos \phi \quad (110)$$

上式中 W_{31} 和 W_{51} 分别代表初级和三级彗差。 W_{11} 为焦点的垂轴移动, 加上这一项的原因是当 $\phi \neq 0$ 时LSF的最大值通常不在几何焦点处。离焦项 $W_{20}\gamma^2$ 是没有必要加入的, 这是因为该项将给出非零的 Ω_x 。由于 $\Omega = \Omega_x + \Omega_o$, 相对于焦平面使 Ω 最小化后, W_{20} 和 Ω_x 即为零。

在 $\phi = 0$ 时让 $W_{11} = 0$, 则有:

$$\Omega_o = 0.2674W_{31}^2 + 0.3857W_{51}^2 + 0.6250W_{31}W_{51} \quad (111)$$

当 $\partial\Omega_0/\partial W_{31} = 0$ 时为此象差校正最佳状况, 则有

$$\beta_{31} = \frac{W_{31}}{W_{51}} = -1.17 \quad (\psi = 0) \quad (112)$$

当此 W_{31} 值代入(111)得

$$(\Omega_0)_{\text{min}} = 0.02W_{51}^2 \quad (113)$$

由 $\Omega \leq 0.20$, 得到象差容限为:

$$|W_{51}| \leq 3.13\lambda \quad (\psi = 0) \quad (114)$$

在 $\psi = 90^\circ$ 时 $W_{11} \neq 0$, 则有

$$\Omega_0 = 10.528W_{11}^2 + 5.142W_{31}^2 + 3.391W_{51}^2 + 13.836W_{11}W_{31} + 10.284W_{11}W_{51} + 8.176W_{31}W_{51} \quad (115)$$

$\partial\Omega_0/\partial W_{11} = 0$ 和 $\partial\Omega_0/\partial W_{31} = 0$ 这两个条件分别给出 LSF 最大值的位置和象差的最佳校正状态。解这两个方程给出结果为:

$$\beta_{11} = \frac{W_{11}}{W_{51}} = 0.29 \quad \beta_{31} = \frac{W_{31}}{W_{51}} = -1.19 \quad (\psi = 90^\circ) \quad (116)$$

由这些 W_{11} 和 W_{31} 的值可知:

$$(\Omega_0)_{\text{min}} = 0.036W_{51}^2 \quad (117)$$

所以满足 $\Omega \leq 0.20$ 时的公差为:

$$|W_{51}| \leq 2.36\lambda \quad (\psi = 90^\circ) \quad (118)$$

和 ψ 无关的PSF的Strehl比给出的值如下:

$$\beta_{11} = 0.30 \quad \beta_{31} = -1.20 \quad |W_{51}| \leq 2.53\lambda \quad (119)$$

从上可以看到: 虽然 $\psi = 0^\circ$ 和 $\psi = 90^\circ$ 时 β_{31} 的值没有明显的区别, 但由LSF得到的 $|W_{51}|$ 的公差在 $\psi = 0^\circ$ 时明显地小于PSF所得到的值, 而对 $\psi = 90^\circ$ 这种情况更为严重。这种情况和LSF的形状是一致的, 原因是当 $\psi = 0$ 时线条在彗差图形的对称轴方向, 而当 $\psi = 90^\circ$ 时是在垂直对称轴的方向。

3. 象散和场曲

这时的象差为:

$$W(\gamma, \phi) = W_{20}\gamma^2 + W_{22}\gamma^2\cos^2\phi \quad (120)$$

上式中 W_{20} 为 $\psi = \frac{\pi}{2}$ 时从选定的象面到弧矢焦点的焦移。而 W_{20} 和 W_{22} 一起代表当 $\psi = 0^\circ$ 也即子午焦点的焦移。因此 W_{22} 即代表象散焦点间的间隔。

当 $\psi = 0$ 时, 附录表中给出的系数为:

$$\Omega_{\text{F}} = 2.4063W_{20}^2 \quad (121)$$

如果选取象面的位置使 $W_{20} = 0$, 也即选弧矢焦面作为象面。那末最佳焦面和象散公式应满足下式:

$$W_{20} = 0 \quad |W_{22}| \leq \infty \quad (\psi = 0) \quad (122)$$

上式说明象散的存在并不影响象质。

当 $\psi = 90^\circ$ 时象差的形式为:

$$\Omega_{\text{F}} = 2.4063W_{20}^2 + 2.4063W_{22}^2 + 4.8126W_{20}W_{22} \quad (123)$$

上式可以记成为:

$$\Omega_{\mathbf{E}} = 2.4063(W_{20} + W_{22})^2 \quad (124)$$

因此最佳焦面的象散的公式应满足:

$$W_{20} + W_{22} = 0 \quad |W_{22}| \leq \infty \quad (\psi = 90^\circ) \quad (125)$$

上式意味着: 当象面在子午焦点时为最佳焦点, 而象散的存在并不影响象质。

对 $\psi = 45^\circ$ 的直线, 系数表给出:

$$\Omega_{\mathbf{E}} = 2.4063W_{20}^2 + 2.1055W_{22}^2 + 2.4063W_{20}W_{22} \quad (126)$$

而 $\partial\Omega_{\mathbf{E}}/\partial W_{20}$ 的条件给出当在最佳焦面时有:

$$W_{20} = -\frac{1}{2}W_{22} \quad (\psi = 45^\circ) \quad (127)$$

此时最佳焦面在子午和弧焦面的中点处, 而有:

$$(\Omega_{\mathbf{E}})_{\min} = 0.9019W_{22}^2 \quad (128)$$

这就表明对于象散其公差为:

$$|W_{22}| \leq 0.47\lambda \quad (\psi = 45^\circ) \quad (129)$$

而 PSF 给出的最佳焦面条件和象散公差为:

$$W_{20} = -\frac{1}{2}W_{22} \quad |W_{22}| \leq 0.36\lambda \quad (130)$$

在小视场角时, 弧矢和子午焦差分别为:

$$W_{\mathbf{E}} = W_{\tau 0} = W_{\mathbf{F}} + \frac{1}{2}W_{22} \quad W_{\tau} = W_{20} + W_{22} = W_{\mathbf{F}} + \frac{3}{2}W_{22} \quad (131)$$

上式中 $W_{\mathbf{F}}$ 为从高斯象面到匹兹伐面的焦移。实际感兴趣的问题是如何求出象散系数 W_{22} , 使高斯象面处象质为最佳而匹兹伐项 $W_{\mathbf{F}}$ 保持为常数。

当 $\psi = 0$ 时将 $W_{20} = W_{\mathbf{F}} + \frac{1}{2}W_{22}$ 代入式 (121) 有:

$$\Omega_{\mathbf{E}} = 2.4063\left(W_{\mathbf{F}} + \frac{1}{2}W_{22}\right)^2$$

所以当 $W_{22} = -2W_{\mathbf{F}}$ 时 $\Omega_{\mathbf{E}} = 0$, 所以对象散来说当 $\psi = 0$ 时其最佳校正形式为:

$$W_{\mathbf{E}} = W_{\mathbf{F}} + \frac{1}{2}W_{22} = 0 \quad |W_{\mathbf{F}}| < \infty \quad (132)$$

此时 W_{22} 的选取使弧矢象面为平面, 匹兹伐项对象质无影响。而当 $\psi = 90^\circ$ 时同样地可将 $W_{20} = W_{\mathbf{F}} + \frac{1}{2}W_{22}$ 代入式 (124), 而有:

$$\Omega_{\mathbf{E}} = 2.4063\left(W_{\mathbf{F}} + \frac{3}{2}W_{22}\right)^2$$

故当 $\psi = 90^\circ$ 时 $W_{22} = -\frac{2}{3}W_{\mathbf{F}}$ 时为最佳象差校正状态。这意味着应满足如下条件:

$$W_{\tau} = W_{\mathbf{F}} + \frac{3}{2}W_{22} = 0 \quad |W_{\mathbf{F}}| < \infty \quad (133)$$

此时 W_{22} 的选择给出了平的子午象场, 而匹兹伐项仍旧对象质无影响。

将 $W_{20} = W_{\mathbf{F}} + \frac{1}{2}W_{22}$ 代入式 (126) 即得 $\psi = 45^\circ$ 时的 Ω 值如下:

$$\Omega_{\mathbf{E}} = 2.4063\left(W_{\mathbf{F}} + \frac{1}{2}W_{22}\right)^2 + 2.1055W_{22}^2 + 2.4063\left(W_{\mathbf{F}} + \frac{1}{2}W_{22}\right)W_{22} \quad (134)$$

当 $W_{22} = -0.615W_p$ 时, 上式取最小值, 对应地有:

$$W_B = 0.69W_p \quad W_T = 0.08W_p \quad (\psi = 45^\circ) \quad (135)$$

W_B 和 W_T 分别为弧矢和子午焦差。选取象散系数 W_{22} 使得弧矢和子午焦面在高斯象面的同侧, 并使其到子午焦面的距离是到弧矢焦面距离的0.11倍。将 $W_{22} = -0.615W_p$ 代入(128)式得到:

$$(\Omega_E)_{\min} = 0.925W_p^2 \quad |W_p| \leq 0.46\lambda \quad (136)$$

上式为 Ω 的最小值和匹兹伐场曲项的公差。

作为比较, 给出上述情况下由PSF所得出的值为:

$$W_B = 0.67W_p \quad W_T = 0 \quad |W_p| \leq 0.25\lambda \quad (137)$$

上式中 $|W_p|$ 的公差明显地小于由PSF所给出的值。

4. 象散形项的合成

我们考虑前几项偶象差函数的情况, 此时有:

$$W(\gamma, \phi) = W_{20}\gamma^2 + W_{42}\gamma^4 \cos^2\phi + W_{44}\gamma^4 \cos^4\phi \quad (138)$$

上式为(103)式加上轴向焦移项。将对特殊情况 $W_{44} = -W_{42}$ 进行处理, 此时当 $W_{20} = 0$ 时弧矢和子午截面上均无象差。

对 $\psi = 0$ 包含有 W_{44} 的所有项之系数为零, 则有:

$$\Omega_E = 2.4063W_{20}^2 + 0.0729W_{42}^2 + 0.5347W_{20}W_{42}$$

当 Ω_E 为最小值时, 有:

$$W_{20} = -0.11W_{42} \quad |W_{42}| \leq 2.15\lambda \quad (\psi = 0) \quad (139)$$

上式说明最佳焦面和 W_{42} 的公差当 $\psi = 0$ 时均与 W_{44} 无关。

$\psi = 90^\circ$ 时 Ω_E 的值为:

$$\Omega_E = 2.4063W_{20}^2 + 1.9618W_{42}^2 + 1.5556W_{44}^2 + 4.2015W_{20}W_{42} + 3.6667W_{20}W_{44} + 3.4445W_{42}W_{44}$$

在特殊情况 $W_{44} = -W_{42}$ 时, 为:

$$\Omega_E = 2.4063W_{20}^2 + 0.0729W_{42}^2 + 0.5348W_{20}W_{42}$$

上式对 W_{20} 求极小值, 并令该最小值 $(\Omega_E)_{\min} \leq 0.20$ 得出结果为:

$$W_{20} = -0.11W_{42} \quad |W_{42}| \leq 2.15\lambda \quad (\psi = 90^\circ) \quad (140)$$

上式完全和 $\psi = 0$ 时相同, 但此时仅适用于 $W_{44} = -W_{42}$ 的特殊情况。

当 $\psi = 45^\circ$ 时, Ω_E 的值为:

$$\Omega_E = 2.4063W_{20}^2 + 1.4970W_{42}^2 + 1.2548W_{44}^2 + 2.3681W_{20}W_{42} + 1.7188W_{20}W_{44} + 2.6780W_{42}W_{44}$$

而在 $W_{44} = -W_{42}$ 的特殊情况下, 有:

$$\Omega_E = 2.4063W_{20}^2 + 0.0738W_{42}^2 + 0.6493W_{20}W_{42} \quad (141)$$

上式对 W_{20} 求极小值, 并令该值 $(\Omega_E)_{\min} \leq 0.20$ 得出结果为:

$$W_{20} = -0.135W_{42} \quad |W_{42}| \leq 2.58\lambda \quad (\psi = 45^\circ) \quad (142)$$

应该注意到, 尽管最佳焦面的位置当线条在不同的方位 $\psi = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ 时没有明显的差别及当 $\psi = 0^\circ$ 和 90° 时的象差容限是一样的, 但当 $\psi = 45^\circ$ 时其容限是比较大的。因此, 尽管波差在 $\psi = 0^\circ$ 和 90° 时为零, 而在 $\psi = \pm 45^\circ$ 时为极大值, 但象质在 $\psi = 45^\circ$ 时还是比较好的。这个结果强调说明了几何象差和点列图作为象质评价指标时是有可能产生很大偏差的。

作为比较, 给出PSF在这种情况下的最佳焦面和公差应满足的条件为:

$$W_{20} = -0.125W_{42} \quad |W_{42}| \leq 1.77\lambda \quad (143)$$

由上式看到 W_{42} 的容限明显地小于LSF的对应值。

5. 替差型象差项的合成

在这个标题下, 我们考虑奇函数:

$$W(\gamma, \phi) = W_{11}\gamma \cos\phi + W_{31}\gamma^3 \cos\phi + W_{33}\gamma^3 \cos^3\phi \quad (144)$$

上式为式(104)加上垂轴焦点位移项。下面将处理 $W_{33} = -W_{31}$, 而在弧矢和子午截面下无象差的特殊情况。

在 $\psi = 0$ 时求得:

$$\Omega_0 = 0.2674W_{31}^2$$

其它项的系数在此情况下均为零。当 $\Omega_0 \leq 0.20$ 时的容限为:

$$|W_{31}| \leq 0.86\lambda \quad (\psi = 0) \quad (145)$$

当 $\psi = 0$ 时对有的奇象差, Ω_0 和 W_{11} 无关。

当 $\psi = 90^\circ$ 时有:

$$\Omega_0 = 10.5276W_{11}^2 + 5.14204W_{31}^2 + 3.4376W_{33}^2 + 13.8362W_{11}W_{31} + 10.8284W_{11}W_{33} + 8.0783W_{31}W_{33}$$

在 $W_{33} = -W_{31}$ 的情况下, 上式成为:

$$\Omega_0 = 10.5276W_{11}^2 + 0.5013W_{31}^2 + 3.0078W_{11}W_{31}$$

其对 W_{11} 取极小值, 其LSF最大值的位置座标 $u' = W_{11}$ 和象差容限分别为:

$$W_{11} = -0.14 \quad |W_{31}| \leq 0.84\lambda \quad (\psi = 90^\circ) \quad (146)$$

当 $\psi = 45^\circ$ 时, 有:

$$\Omega_0 = 5.2638W_{11}^2 + 2.7047W_{31}^2 + 1.7457W_{33}^2 + 6.9181W_{11}W_{31} + 4.9630W_{11}W_{33} + 4.0750W_{31}W_{33}$$

在 $W_{33} = -W_{31}$ 之情况下则有:

$$\Omega_0 = 5.2638W_{11}^2 + 0.3754W_{31}^2 + 1.9551W_{11}W_{31}$$

其对 W_{11} 取极小值, 则有 $\psi = 45^\circ$ 时的象差容限为:

$$W_{11} = -0.19W_{31} \quad |W_{31}| \leq 1.02\lambda \quad (\psi = 45^\circ) \quad (147)$$

由上可看到出于预料的事情再次发生, 即当 $\psi = 45^\circ$ 时其象差容限要大于 $\psi = 0^\circ$ 和 90° 时的容限。

作为比较, 给出对应的PSF所得到的象差容限为:

$$W_{11} = -0.17W_{31} \quad |W_{31}| \leq 0.78\lambda \quad (148)$$

上式中的容限同样是明显地小于LSF的对应值。

6. 焦深

对一具聚焦误差的衍射受限系统, 波差表达式简单地为:

$$W(\gamma, \phi) = W_{20}\gamma^2 \quad (149)$$

由上式得到 Ω 的值和离焦容限为:

$$\Omega = 2.4063W_{20}^2 \quad |W_{20}| \leq 0.29\lambda \quad (150)$$

PSF的对应容限为:

$$|W_{20}| \leq 0.25\lambda \quad (151)$$

这同样地比LSF所得的容限要严格些。

参 考 文 献

- [1] Marechal, A ; Rev. d'Optique, 1947, 26, 257.
- [2] King, W. B. ; JOSA, 1968, 58, 5, 655.
- [3] King, W. B. ; Appl. Optics, 1968, 7, 489.
- [4] Hopkins, H. H. ; Opt. Acta, 1966, 13, 4, 343.
- [5] Hopkins, H. H. ; 'Applied Optics and Optical Engineering, Vol IX', ed. by R. R. Shannon and Academic Press. 1983.
- [6] Hopkins, H. H. ; Appl. Optics, 1985, 24, 2491.
- [7] King, W. B. ; Appl. Optics, 1968, 7, 197.

Aberration Tolerances Based on the Line Spread Function

H. H. Hopkins

(Reading University U.K.)

Abstract

This paper discusses the general formulae and normalisation factor of line spread function and the edge.

An approximation equation specified by Ω , which is a function of the wavefront variation, of the Strehl ratio of the LSF, is given. The relationship between wavefront coefficients and Ω which is divided into even part Ω_e and odd part Ω_o for the symmetrical aperture and for rotational symmetrical optical system, especially for circular aperture, is investigated. Then use of Ω_e to determine the best focal plane and Ω_o to get the position of the maximum value of LSF is described. Finally some examples about the aberration tolerances in some cases are shown.