

Strehl比和波差方差的直接测定

余景池

摘要: 本文讨论了应用Fizeau干涉仪的一种新方法。其原理为干涉图的总光强是波差的函数,而当标准面沿轴振动时,系统的波差发生了变化,这就导致干涉图总光强的变化。由此可以得到Strehl比和波差方差。

一、前 言

干涉法已广泛地应用于波面象差的测定。通常用实际干涉条纹对理想条纹的偏离程度来确定波差的大小及分布。但对于最终完成的光学零件和系统其波差方差的大小更能准确地反应其质量。特别当进行小象差系统的测量时。这是由于此时系统的波差方差和评定点象质量的Strehl强度比之间存在着简单的关系。而当干涉仪中参考面或被检面沿轴作微小振动时,干涉图总光强的变化和波差方差的大小也存在着一定的关系。本文研究了这种关系并提出由光强的变化来测定均方波差,进而得到Strehl比的方法。

二、Strehl强度比和波差方差的关系

首先定义波差方差 E 为^[1]:

$$E = \frac{1}{A} \iint_A W^2 dA - \left(\frac{1}{A} \iint_A W dA \right)^2 \quad (1)$$

(1) 式中 A 为出瞳面积。 W 为光瞳函数。

令 \bar{W} 为出瞳 A 上的平均波差,则

$$\bar{W} = \frac{1}{A} \iint_A W dA \quad (2)$$

点像的Strehl强度比 S 有如下的定义:

$$S = I/I_0 = \left| \frac{1}{A} \iint_A e^{ikw} dA \right|^2 = \left| e^{ik\bar{w}} \cdot \frac{1}{A} \iint_A e^{ik(w-\bar{w})} dA \right|^2 \quad (3)$$

(3) 式中 I_0 为无象差时,理想象点处象点的中心亮度。 I 为存在象差时象点的中心亮度。

k 为波数,即 $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ 。

将 $e^{ik(w-\bar{w})}$ 展开成泰勒级数,并取前三项作为近似,则(3)式可改写为:

$$S = \left| \frac{1}{A} \iint_A \left[1 + ik(W - \bar{W}) - \frac{1}{2} k^2 (W - \bar{W})^2 \right] dA \right|^2 \quad (4)$$

将(4)式化简,并将(2)式代入,可得:

$$S = \left(1 - \frac{1}{2} k^2 E\right)^2 \quad (5)$$

对于一般光学系统而言, Strehl 强度比应大于或等于 $0.8^{[2]}$ 。其对应的波差方差 $E \leq \frac{\lambda^2}{187} \approx \frac{\lambda^2}{180}$

(4) 式的近似程度和 E 的大小直接有关。在作波差测量时, 10% 的理论近似误差是完全可以接受的。以此为依据, 表 1 列出了当近似误差为 10% 时, 所对应的最大允许波差和当 Strehl 强度比 $S = 0.8$ 时, 所对应的最大波差。由表 1 可看出, 当象差项变化时, 两者基本上是一致的。这说明在 $S \geq 0.8$ 的情况下, (5) 式是有足够精度的。同样, 从表 1 还可发现

表 1 $S = 0.8$ 和近似误差为 10% 时对应的波差

象 差 类 别	$S = 0.8$ 时的对应波差 (λ)	近似误差在 10% 时, 对应误差 (λ)
离 焦	0.25	0.26
初 级 球 差	0.25	0.25
初 级 彗 差	0.21	0.19
初 级 像 散	0.18	0.17

其允许的最大波差在各种情况下和瑞利判断是比较一致的。

图 1 显示了近似误差与对应波差之间的关系。由图可见, 当最大波差比表 1 所列的极限值小时, 近似误差的相对值下降很快。所以当对质量较高的系统与零件进行检测时, 近似误差是完全可以忽略不计的。

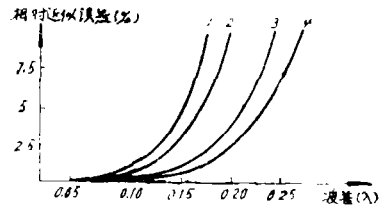


图 1 近似误差和波差的关系

1—初级彗差 2—初级球差 3—初级像散 4—离焦

三、干涉图总光强和波差方差的关系

干涉图总光强的大小是波差方差的函数。当作干涉测量时, 让标准面 (或被检面) 沿轴向作简谐振动。由于二相干波面相对位置的变化而产生了附加程差, 相应地波差方差也有了周期性的变化, 这导致干涉图总光强的变化。以下讨论两者的关系。

测量装置如图 2 所示。标准镜沿轴向作振动。

设标准镜的位移函数为 η ; 标准面和被检面的光强反射率分别为 R_1 和 R_2 ; 被检面的波差为 $\delta(x, y)$; 两相干波面的相互倾斜为 $\alpha x, \beta y$, 其中 α, β 为常数; 波面傍轴曲率中心在标准镜处于振动平衡位置

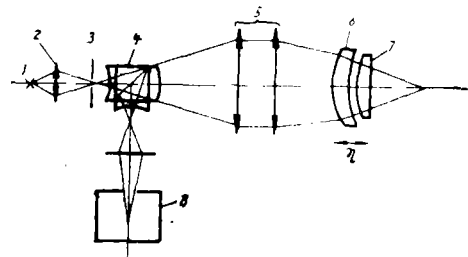


图 2 测量装置

1—光源 2—聚光镜 3—针孔 4—分光棱镜
5—半球面聚光系统 6—标准镜 7—被检镜
8—光强测量装置

时的轴向偏差为 ζ 。一般情况下 ζ 即为最佳焦面的离焦量。则两波面间的间隙 $\delta'(x, y)$ 为:

$$\delta'(x, y) = \delta(x, y) + (\alpha x + \beta y) + (\zeta + \eta) - \frac{1}{2}(\zeta + \eta)(x^2 + y^2)\sin^2 u \quad (6)$$

上式中 $\sin u$ 为被检系统的数值孔径。

干涉图的总光强 F 为:

$$\begin{aligned} F &= \iint_A \left[R_1 + R_2 + 2\sqrt{R_1 R_2} \cos \frac{4\pi}{\lambda} \delta'(x, y) \right] dA \\ &= (R_1 + R_2) A \left\{ 1 + \frac{2\sqrt{R_1 R_2}}{R_1 + R_2} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{A} \iint_A \exp i \frac{4\pi}{\lambda} \delta'(x, y) \right] dA \right\} \end{aligned} \quad (7)$$

$$\text{令: } \delta_1(x, y) = \delta(x, y) + \alpha x + \beta y - \frac{\zeta}{2}(x^2 + y^2)\sin^2 u \quad (8)$$

$$\delta_1'(x, y) = \delta_1(x, y) - \frac{\eta}{2}(x^2 + y^2)\sin^2 u \quad (9)$$

分别记 δ_1 和 δ_1' 的平均值为 $\bar{\delta}_1$ 和 $\bar{\delta}_1'$ 。则:

$$\bar{\delta}_1 = \frac{1}{A} \iint_A \delta_1 dA \quad (10)$$

考虑到象差的形式,其中含有 $\sin n\theta$ 和 $\cos n\theta$ 因子的象差在整个出瞳上的积分值为零。实际上的 $\bar{\delta}_1$ 具有很简单的形式如下:

$$\bar{\delta}_1 = -\frac{\zeta}{4}\sin^2 u + \left(\frac{\alpha_{40}}{3} + \frac{\alpha_{60}}{4} + \dots \right) \quad (11)$$

(11) 式中 $\alpha_{40}, \alpha_{60}, \dots$ 为象差系数。分别代表初级球差和高级球差。其中下标的第一个数字为波差函数中半径项的次数;第二个数字代表象差函数中幅角项中项角前的正整数 n 。

$$\bar{\delta}_1' = \frac{1}{A} \iint_A \delta_1' dA = \left(\frac{\alpha_{40}}{3} + \frac{\alpha_{60}}{4} + \dots \right) - \frac{\sin^2 u}{4} (\zeta + \eta) \quad (12)$$

将(11)和(12)式代入(7)式中项 $\operatorname{Re} \left[\frac{1}{A} \iint_A \exp i \frac{4\pi}{\lambda} \delta'(x, y) dA \right]$ 并作变换如下。

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{A} \iint_A \exp i \frac{4\pi}{\lambda} \delta'(x, y) dA \right] &= \operatorname{Re} \left[\frac{1}{A} \iint_A \exp i \frac{4\pi}{\lambda} (\zeta + \eta + \delta_1') dA \right] \\ &= \operatorname{Re} \left[\exp i \frac{4\pi}{\lambda} (\zeta + \eta + \bar{\delta}_1') \frac{1}{A} \iint_A \exp i \frac{4\pi}{\lambda} (\delta_1' - \bar{\delta}_1') dA \right] \end{aligned} \quad (13)$$

将(13)式中的 $\frac{1}{A} \iint_A \exp i \frac{4\pi}{\lambda} (\delta_1' - \bar{\delta}_1') dA$ 中的被积函数作泰勒展开,同时取前三项作为

其近似,并化简可得:

$$\begin{aligned} \frac{1}{A} \iint_A \exp i \frac{4\pi}{\lambda} (\delta_1' - \bar{\delta}_1') dA &= 1 - \frac{8\pi^2}{\lambda^2} \left\{ E + \frac{1}{48} (\zeta + \eta)^2 \sin^4 u + \frac{1}{4} (\alpha^2 + \beta^2) - \right. \\ &\quad \left. 2(\zeta + \eta) \sin^2 u \left[\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) \alpha_{40} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{8} \right) \alpha_{60} + \dots \right] + \frac{2}{\pi} \iint_A \delta (\alpha x + \beta y) dA \right\} \end{aligned} \quad (14)$$

从物理上的可能性来考虑, (14) 式中中括号里的值大于或等于零才是有意义的。令

$$B = \frac{1}{18} \sin^4 u \quad (15)$$

$$C = \sin^2 \eta \left[\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) \alpha_{40} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{8} \right) \alpha_{60} + \dots \right] \quad (16)$$

则光强与波差方差 E 的关系可将 (14)、(15) 和 (16) 式代入 (7) 式而得出如下:

$$F = (R_1 + R_2) A \left(1 + \frac{2\sqrt{R_1 R_2}}{R_1 + R_2} \left\{ 1 - \frac{8\pi^2}{\lambda^2} \left[E + B(\xi + \eta)^2 + \frac{1}{4} (\alpha^2 + \beta^2) - C(\xi + \eta) + \frac{2}{\pi} \iint_A \delta(\alpha x + \beta y) dA \right] \right\} \cos \frac{4\pi}{\lambda} \left[(\xi + \eta) \left(1 - \frac{\sin^2 u}{4} \right) + \frac{\alpha_{40}}{3} + \frac{\alpha_{60}}{4} + \dots \right] \right) \quad (17)$$

四、由光强变化测定波差方差的步骤

(17) 式反应了光强和波差方差间的关系。但在实际测量过程中还需作进一步的简化。同时还要考虑杂光形成的背景光及光源的时间和空间相干性所造成的影响。

设 A 为杂光形成的背景光所产生的光强分量。 T 和 S 分别为系统的时间和空间相干度。注意到在以后的讨论中只关心强度的相对变化, (17) 式中及以后遇到的常数因子将加以忽略。则 (17) 式改写为:

$$F = 1 + TS \frac{2\sqrt{R_1 R_2}}{(R_1 + R_2)(1 + A)} \left\{ 1 - \frac{8\pi^2}{\lambda^2} \left[E + B(\xi + \eta)^2 + \frac{1}{4} (\alpha^2 + \beta^2) - C(\xi + \eta) + \frac{2}{\pi} \iint_A \delta(\alpha x + \beta y) dA \right] \right\} \cos \frac{4\pi}{\lambda} \left[(\xi + \eta) \left(1 - \frac{\sin^2 u}{4} \right) + \frac{\alpha_{40}}{3} + \frac{\alpha_{60}}{4} + \dots \right] \quad (18)$$

(18) 式中的 ξ , α 和 β 是随参考象点的不同选择而变化的。在实际测量中随调整的状态而变化。一般对波差的评定总是在最佳象点处进行, 也即其对应的波差方差为最小, 而光强为最大时。依此首先改变参考象点的轴向位置使光强达最大。此位置同时为振动的平衡位置, 即 $\eta = 0$ 。然后分别在二个相互正交的垂轴方向改变参考象点的位置使光强达最大。此时所对应的 ξ , α 和 β 应满足下方程组:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \xi} [B\xi^2 - C\xi] = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{1}{4} (\alpha^2 + \beta^2) + \frac{2}{\pi} \iint_A \delta(\alpha x + \beta y) dA \right] = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\frac{1}{4} (\alpha^2 + \beta^2) + \frac{2}{\pi} \iint_A \delta(\alpha x + \beta y) dA \right] = 0 \end{cases} \quad (19)$$

简化 (19) 式得到:

$$\begin{cases} \xi = \frac{C}{2B} \\ \alpha = -4 \left[\frac{\alpha_{31}}{6} + \frac{\alpha_{51}}{8} + \dots \right] \\ \beta = -4 \left[\frac{\alpha_{31}'}{6} + \frac{\alpha_{51}'}{8} + \dots \right] \end{cases} \quad (20)$$

上式中 $\alpha_{31}, \alpha_{51}, \dots$ 表示在 x 方向的各级彗差系数。 $\alpha_{31}', \alpha_{51}', \dots$ 表示在 y 方向的各级彗差系数。将(20)代入(18)式并令:

$$E' = E - \frac{C^2}{4B} - 4 \left[\left(\frac{\alpha_{31}}{6} + \frac{\alpha_{51}}{8} + \dots \right)^2 + \left(\frac{\alpha_{31}'}{6} + \frac{\alpha_{51}'}{8} + \dots \right)^2 \right]$$

$$R = TS \frac{2\sqrt{R_1 R_2}}{(R_1 + R_2)(1 + \mathcal{L})}$$

可得如下关系式:

$$F = 1 + R \left[1 - \frac{8\pi^2}{\lambda^2} (E' + B\eta^2) \cos \frac{4\pi}{\lambda} \left[\left(\frac{C^2}{2B} + \eta \right) \left(1 - \frac{\sin^2 u}{4} \right) + \frac{\alpha_{40}}{3} + \frac{\alpha_{60}}{4} + \dots \right] \right] \quad (21)$$

在此再次强调以上原则仅适用于波差不超过瑞利判断的情况。而实际上当波差大于瑞利极限也较少采用干涉法进行检测。从(21)式中可以发现当 η 增大至某值时,中括号内的值小于零。这在物理上是不可能的。事实上当波差增至很大时总光强 F 为常数。这是因为此时整个干涉图上的条纹很多,参考面的微小振动虽然改变了各点的程差,但在整个干涉图上各种相位差的几率是均等的。设此时对应的光强为 R_0 ,我们将此值归化为1。图3表示了(21)式中 F 和 η 的关系。图中假设 $R = 0.5$; $\delta' = 0.5\rho^4 + 0.5\rho^3 \cos\theta$ 。此时求得在最佳调整状态下的 $\xi = 4$; $\alpha = -3333$; $\beta = 0$ 。以上各量均以波长为单位。

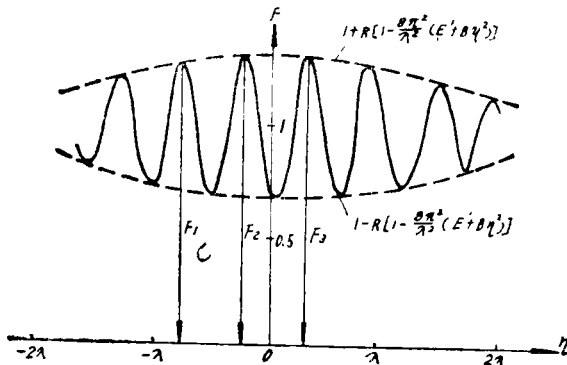


图3 全光强 F 和振动量 η 的关系

如图3所示,设三个相邻的极大值分别为 F_1, F_2 和 F_3 。又设所对应的 η 值分别为 η_1, η_2 和 η_3 。由于相邻的极大值其位相差为 2π ,故 η_1, η_2 和 η_3 有如下的关系:

$$\begin{cases} \eta_1 = \eta_2 - \frac{2\lambda}{4 - \sin^2 u} \\ \eta_3 = \eta_2 + \frac{2\lambda}{4 - \sin^2 u} \end{cases} \quad (22)$$

由(21)式可得到如下的方程组:

$$\begin{cases} 1 + R \left\{ 1 - \frac{8\pi^2}{\lambda^2} \left[E' + B \left(\eta - \frac{2\lambda}{4 - \sin^2 u} \right)^2 \right] \right\} = F_1 \\ 1 + R \left\{ 1 - \frac{8\pi^2}{\lambda^2} [E' + B\eta^2] \right\} = F_2 \\ 1 + R \left\{ 1 - \frac{8\pi^2}{\lambda^2} \left[E' + B \left(\eta + \frac{2\lambda}{4 - \sin^2 u} \right)^2 \right] \right\} = F_3 \end{cases} \quad (23)$$

解方程组(23)得:

$$E' = \frac{\lambda^2}{8\pi^2} - \frac{\lambda^2 \sin^4 u}{12(4 - \sin^2 u)^2} \left[\frac{2(F_2 - 1)}{2F_2 - F_1 - F_3} + \frac{(F_1 - F_3)^2}{4(2F_2 - F_1 - F_3)^2} \right] \quad (24)$$

由(24)式可看到 E' 的测量精度取决于 F_1 、 F_2 和 F_3 的测量精度。现假设 F_1 、 F_2 和 F_3 是等精度的,这与实际测量中的情况是一致的。且其误差为 δ 。则有如下关系:

$$\begin{aligned} \Delta E' &= \sqrt{\left(\frac{\partial E'}{\partial F_1} \Delta F_1 \right)^2 + \left(\frac{\partial E'}{\partial F_2} \Delta F_2 \right)^2 + \left(\frac{\partial E'}{\partial F_3} \Delta F_3 \right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{\partial E'}{\partial F_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial E'}{\partial F_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial E'}{\partial F_3} \right)^2} \delta \end{aligned} \quad (25)$$

由(24)式微分可得:

$$\begin{cases} \frac{\partial E'}{\partial F_1} = -\frac{\lambda^2 \sin^4 u}{12(4 - \sin^2 u)^2} \left[\frac{2(F_2 - 1)}{(2F_2 - F_1 - F_3)^2} + \frac{(F_1 - F_3)(F_2 - F_3)}{(2F_2 - F_1 - F_3)^3} \right] \\ \frac{\partial E'}{\partial F_2} = -\frac{\lambda^2 \sin^4 u}{12(4 - \sin^2 u)^2} \left[\frac{2(2 - F_1 F_3)}{(2F_2 - F_1 - F_3)^2} - \frac{(F_1 - F_3)^2}{(2F_2 - F_1 - F_3)^3} \right] \\ \frac{\partial E'}{\partial F_3} = -\frac{\lambda^2 \sin^4 u}{12(4 - \sin^2 u)^2} \left[\frac{2(F_2 - 1)}{(2F_2 - F_1 - F_3)^2} + \frac{(F_3 - F_1)(F_2 - F_1)}{(2F_2 - F_1 - F_3)^3} \right] \end{cases} \quad (26)$$

$$\text{设} \begin{cases} F_1 = F_2 + \Delta_1 \\ F_3 = F_2 + \Delta_3 \end{cases} \quad (27)$$

由于 Δ_1 和 Δ_3 与 F_1 、 F_2 和 F_3 相比是小量,故在以下的处理中略去高次小量 Δ_1^2 、 Δ_3^2 和 $\Delta_1 \Delta_3$ 。

由方程组(23)还可解得:

$$2F_2 - F_1 - F_3 = \frac{64\pi^2 BR}{(4 - \sin^2 u)^2} \quad (28)$$

将式(27)和(28)代入(25),并略去高次小量则有:

$$\begin{cases} \frac{\partial E'}{\partial F_1} = -\frac{3\lambda^2(4 - \sin^2 u)^2}{32\pi^4 \sin^4 u R^2} (F_2 - 1) \\ \frac{\partial E'}{\partial F_2} = \frac{3\lambda^2(4 - \sin^2 u)^2}{32\pi^4 \sin^4 u R^2} [2(F_2 - 1)] \\ \frac{\partial E'}{\partial F_3} = -\frac{3\lambda^2(4 - \sin^2 u)^2}{32\pi^4 \sin^4 u R^2} (F_2 - 1) \end{cases} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \Delta E' &= \frac{3\lambda^2(4 - \sin^2 u)^2 \delta}{32\pi^4 R^2 \sin^4 u} \sqrt{6} (F_2 - 1) \\ &= \frac{3\lambda^2(4 - \sin^2 u)^2 \sqrt{6}}{32\pi^4 R \sin^4 u} \left[1 - \frac{8\pi^2}{\lambda^2} \left(E' + \frac{\sin^4 u}{48} \eta^2 \right) \right] \delta \end{aligned} \quad (30)$$

由(30)式可见测量精度 $\Delta E'$ 是 δ 的线性函数。故应尽量提高 F_1 , F_2 和 F_3 的测量精度 δ 。而 $\Delta E'$ 和 R 成反比。由 R 的定义知应尽可能的提高光源的时间和空间相干性及减小两相干表面间的程差并使参考面和被检面尽可能地具有相同的反射率。同时由上式也可发现当 η 增大时 $\Delta E'$ 也会减小。但事实上并非如此。当 η 增大至某值时, 前面曾讨论过的由泰勒展开后的近似误差的增长速度大于 $\Delta E'$ 的减少。反而导致精度的下降。故在实际测量中应取小的 η 值。也即应取和平衡位置最接近的极值作为 F_2 。此时对应的 $\eta < 0.25\lambda$ 。则(30)式中的项 $\frac{\sin^4 u}{48} \eta^2$ 可略去不计。而(29)式可进一步简化为:

$$\Delta E' = 0.00236 \frac{(4 - \sin^2 u)^2 \lambda^2}{R \sin^4 u} \left(1 - \frac{8\pi^2}{\lambda^2} E' \right) \delta \quad (31)$$

五、结 论

以上的讨论提供了一种新的利用干涉仪来评定光学系统质量的方法之原理。这种方法当用于大数值孔径的系统时, 具有很高的精度和方便性。

考 参 文 献

- [1] Edited by Van Heel, «Advanced Optical Techniques», (North—Holland, 1967), Chapter 6, 223, by H.H.Hopkins
- [2] Marechal, A., Rev.d'Optique, 1947, 26, 257

Measurement of Strehl Ratio and Variation of Wavefront Error

Yu Jingchi

Abstract

This paper discusses a new method to apply Fizeau interferometry. The principle is based on that the total intensity of an interferogram is a function of wavefront error. When the standard surface vibrates along the optical axis, this will change the wavefront aberration and also total intensity of the interferogram. Then we can get Strehl ratio and variation of wavefront error from intensity function.