

线性退火时玻璃毛坯的温度响应

赵 文 兴

摘要: 本文讨论了线性退火时光学玻璃毛坯的各种温度响应及其影响因素, 获得了有限大玻璃毛坯的准稳态温度分布的简单表示。

一、前 言

光学玻璃退火过程是一种与传热学紧密相关的热处理过程。研究退火过程中热在玻璃毛坯中的传递及玻璃毛坯的温度响应, 可以进一步了解玻璃毛坯中的温度分布, 预测残余退火应力的大小及分布, 探索光学不均匀性的来源及预测其大小, 从而正确地制定光学玻璃的退火工艺规程, 提高退火质量。

二、线性退火时毛坯中的温度场变化

早在1920年, Adams and Williamson^[1]就对退火的热传导问题做了实验研究并进行了数学描述; E. Э. Данюшевский^[2]在前者的基础上进行了大量的实验工作, 并进一步应用于光学玻璃残余退火应力和光学不均匀性的数学计算。这些工作, 对光学玻璃退火工艺的发展起到了重要的作用。

光学玻璃线性退火制度, 是目前国内普遍采用的精密退火工艺。在退火炉载物室内的温度分布均匀的条件下, 这种工艺制度的数学表示如下:

$$\begin{array}{l}
 \text{微分方程: } \nabla^2 T = \frac{1}{K} \frac{\partial T}{\partial t} \quad t > 0 \\
 \text{初始条件: } T = T_0 \quad t = 0 \\
 \text{边界条件: } T_s = T_0 - ht \quad t \geq 0 \\
 \frac{\partial T}{\partial l} = 0 \text{ (对称面)} \quad t = 0
 \end{array} \quad (1)$$

式中, T 表示温度; T_s 是玻璃毛坯的表面温度; T_0 是退火温度; l 表示方向; K 是玻璃的导热系数, t 和 h 分别表示时间和退火速率。

这一问题的数学表示表明边界条件是给定表面温度为时间的函数; 利用 Duhamel^[3]原理, 可获得各种形状毛坯, 关于这一问题的温度响应, 其表示形式如下:

$$T(x, y, z, t) = T_0 - ht + T(x, y, z) + T_m(x, y, z, t) \quad (2)$$

上式右边四项组成了关于线性退火制度的偏微分方程的解，其中每一项都有其确定的物理意义： T_0 表示初始条件； $-ht$ 反映了边界条件； $T(x, y, z)$ 为准稳态温度分布，它表示了当时时间足够大时毛坯中的温度分布形式； $T_m(x, y, z)$ 是随时间衰减的暂态项。暂态项随着冷却时间的增长而迅速减小，主要表现在退火初期；由于光学玻璃的退火速率较小，暂态项的影响仅存在于退火温度范围的上部。

为了分析退火光学玻璃的残余退火应力和光学不均匀性，人们最关心的是 $T(x, y, z)$ 。这一分布自(2)式中的暂态项消失后，一直保持至退火温度下限。退火后玻璃毛坯中的残余应力分布正是反映了这一温度分布的存在型式。表1列出了三种理想形状毛坯的准稳态温度分布；式(3)和式(4)分别为有限长圆柱体与矩形截面体(图1)毛坯的准稳态温度分布。

表1 准稳态温度分布函数

毛坯形状	无限大平板	无限长圆柱体	球状
$T(x, y, z)$	$h(a^2 - x^2)/2K$	$h(R^2 - r^2)/4K$	$h(R^2 - r^2)/6K$
符号说明	a —半厚度 x —坐标函数	R —半径 r —坐标函数	R —半径 r —坐标函数

$$T(r, z) = \frac{8h}{\pi R} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^n J_0(\alpha_m r)}{(2n+1) J_1(\alpha_m R) \alpha_m A_{m,n}} \cos \frac{(2n+1)\pi z}{2H} \quad (3)$$

式中 α_m 是贝塞尔函数 $J_0(\alpha_m r) = 0$ 的第 m 个正根； R, H 分别表示圆柱体的半径和半厚度(图1)。
 $A_{m,n} = K[\alpha_m^2 + (2n+1)^2 \pi^2 / 4H^2]$ 。

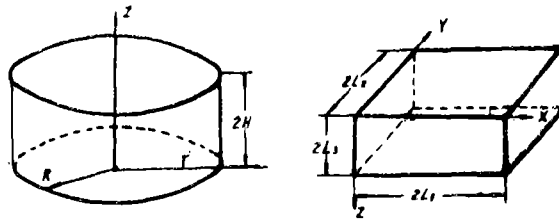


图1 圆柱体和矩形截面柱体

$$T(x, y, z) = \frac{64h}{\pi^3} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n+s} \cos \frac{(2m+1)\pi x}{2L_1} \cos \frac{(2n+1)\pi y}{2L_2} \cos \frac{(2s+1)\pi z}{2L_3}}{(2m+1)(2n+1)(2s+1)A_{m,n,s}} \quad (4)$$

式中， $2L_1, 2L_2, 2L_3$ 分别表示柱体的长、宽、高(图1)；

$$A_{m,n,s} = \frac{K\pi^2}{4} [(2m+1)^2/L_1^2 + (2n+1)^2/L_2^2 + (2s+1)^2/L_3^2]$$

式(3)、(4)与表1中各式比较, 显得过于复杂, 很难直观地分析玻璃毛坯在主冷却期间的温度分布情况。我们通过多次的分析与计算比较, 提出了它们的简单近似表示式。

$$T(r, z) \approx \frac{h}{2K} \cdot \frac{(R^2 - r^2)(H^2 - z^2)}{2(H^2 - z^2) + (R^2 - r^2)} \quad (5)$$

$$T(x, y, z) = \frac{h}{2K} \cdot \frac{(L_1^2 - x^2)(L_2^2 - y^2)(L_3^2 - z^2)}{(L_1^2 - x^2)(L_2^2 - y^2) + (L_2^2 - y^2)(L_3^2 - z^2) + (L_3^2 - z^2)(L_1^2 - x^2)} \quad (6)$$

表 2 给出了(3)、(5)两式的数学计算比较情况。从表中可以看出, 两式的结果是比较接近的, 尤其是当比值 $s = H/R$ 较小时, 两式的结果几乎是相同的。因此, 式(5)、(6)可直接应用于有限大玻璃毛坯的残余退火应力分析计算及退火工艺的制定。

表 2 温度分布函数 $T(r, z)$ 的计算比较

$T(r, z)$	$T(0.5R, 0.5H), s=1$		$T(0, 0), s=1$		$T(0, 0), s=1/5$	
计算公式	(3)	(5)	(3)	(5)	(3)	(5)
TK/hR^2	0.1256	0.1250	0.1748	0.1667	0.01869	0.01852

* (3)式的近似条件: $m=4, n=3$ 。

从式(5)、(6)中可以看出, 无论从哪个坐标方向趋向于无穷大, 则表示式便式为相应的理想形状物体的准稳态温度分布的函数表示式, 因此, 它们反映了有限大毛坯的三维温度分布, 从而更适用于光学玻璃退火工艺的制定与分析。图 2 是一对单块放置退火毛坯的径向温

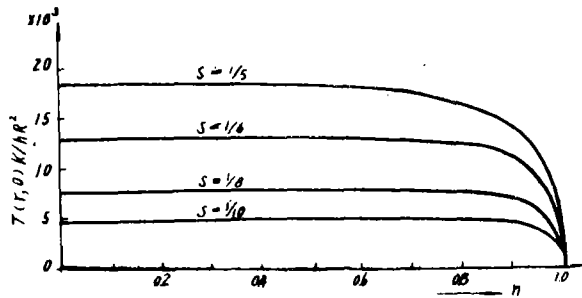


图 2 退火毛坯的径向温度分布

$$s = H/R \quad n = r/R$$

度分布分析的实例。从图中可以看出, 毛坯的径向温度变化主要集中于 $n=0.9$ 左右, 视 s 值的大小而稍有变化。这一结果间接地为选择测定大块退火玻璃毛坯的边缘应力的位置提供了理论依据。

三、炉温分布对毛坯中温度分布的影响

退火炉的结构对炉温分布的影响很大^[4]。同时, 加上各种其它不同因素的影响, 退火炉

载物室内总是存在着不同程度的不均匀温度分布。在退火时，这种不均匀的温度分布将使玻璃毛坯产生一定的附加应力。确定这一影响的大小及分布型式，有助于进一步改善光学玻璃的退火工艺，提高退火质量。

假设圆形退火炉载物室内在主冷却期间的温度分布仅与矢径有关，即 $T(r) = f(r)$ ，而厚度方向的温差忽略不计。随着时间的变化， $T(r)$ 仅在时间轴上作平行移动，其分布型式不变。这样，毛坯中的温度分布可由下面的问题求出：

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 T &= 0 \\ T(R, z) &= 0 \\ T(r, \pm H) &= f(r) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

有限长圆柱体关于这一问题的分析解是：

$$T(r, z)_L = \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\alpha_n r) \operatorname{ch}(\alpha_n z)}{J_1^2(\alpha_n R) \operatorname{ch}(\alpha_n H)} \int_0^R r f(r) J_0(\alpha_n r) dr \quad (8)$$

式中 α_n 是零阶贝塞尔函数 $J_0(\alpha_n r) = 0$ 时的第 n 个正根， $\operatorname{ch}(x)$ 是双曲余弦函数。

我们曾通过理论推导获得^[4]，圆形退火炉载物室内的温度分布呈二次抛物线形式。为计算方便，令 $f(r) = \beta h(R^2 - r^2)/4K$ ， β 是退火炉特性系数，可通过实验获得， K 是导温系数，取值与玻璃的 K 值相同，把 $f(r)$ 代入(8)式得：

$$T(r, z)_L = \frac{2h\beta}{KR} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\alpha_n r) \operatorname{ch}(\alpha_n z)}{J_1(\alpha_n R) \operatorname{ch}(\alpha_n H) \alpha_n^3} \quad (9)$$

由于 β 是一实验因数，故对(9)式取一级近似，

$\alpha_1 R = 2.4048 \approx 2.4$ ，令 $s = H/R$ ，得：

$$T(r, z)_L \approx \frac{h\beta R^2}{K} \cdot \frac{J_0(2.4r/R) \operatorname{ch}(2.4sz/H)}{3.63 \operatorname{ch}(2.4s)} \quad (10)$$

把(10)式分成两部分，令

$$T(r, z)_L = v(r)w(z) \quad (11)$$

$$v(r) = \beta h J_0(2.4r/R) R^2 / 3.63K \quad (11a)$$

$$w(z) = \operatorname{ch}(2.4sz/H) / \operatorname{ch}(2.4s) \quad (11b)$$

$v(0) - v(R) = \beta h R^2 / 3.63K \approx \beta h R^2 / 4K$ ，所以，炉温的影响随着 s 与 z 的变化而变化，在毛坯表面，炉温分布不变，而在内部，则按双曲余弦函数形式逐渐减小，即

$$T(r, z) \approx \frac{\beta h(R^2 - r^2)}{4K} \cdot \frac{\operatorname{ch}(2.4sz/H)}{\operatorname{ch}(2.4s)} \quad (12)$$

四、玻璃毛坯的抗热冲击能力

所谓抗热冲击能力，是指线性退火制度突然被破坏后，温度 ΔT 对毛坯内部温度场的影响程度。

在主冷却期间，圆柱体内的温度分布如式(3)所示。在时间 t_1 时，载物室内突然改变 ΔT 。令 $t = t_1 + \tau$ ，则毛坯对温度 ΔT 的响应可由下式求出：

$$\begin{aligned} \Delta^2 T &= -\frac{1}{K} \frac{\partial T}{\partial \tau} & \tau > 0 \\ \Gamma &= T(r, z, t) & \tau = 0 \\ T(R, H, \tau) &= T_0 - h(t_1 + \tau) + \Delta T & \tau \geq 0 \end{aligned} \quad (13)$$

由上式决定的分析解表示如下:

$$T = T(r, z, t) + \Delta T \left(1 - \frac{8}{\pi R} \sum \sum \frac{(-1)^n J_0(\alpha_m r) \cos\left(\frac{2n+1}{2} \pi z\right)}{(2n+1) \alpha_m J_1(\alpha_m R)} e^{-A_{m,n} \tau} \right) \quad (14)$$

上式右边第二项表示毛坯对温变 ΔT 的响应。从式中可以看出，玻璃毛坯的抗热冲击能力，主要决定于衰减因子 $e^{-A_{m,n} \tau}$ 。图 3 给出了衰减因子与 ΔT 的持续时间 τ 的函数关系。从图中可以看出，随着 H 的增大，抗热冲击能力逐渐增大，即整个毛坯改变温度 ΔT 的所需时间越长，或者说，抗热冲击能力随着毛坯体积的增大而增大。

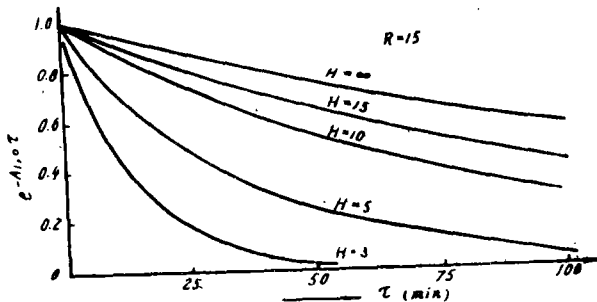


图 3 $\exp(-A_{m,n} \tau)$ 与 τ 的函数关系

五、结 论

1. 获得了有限大玻璃毛坯在退火主冷却期间的准稳态温度分布的简单数学表示式。这些表示式可应用于实际生产退火工艺的制定及预测退火毛坯的残余退火应力。
2. 炉温不均匀分布对毛坯的影响随着距毛坯表面的距离的增大而减小。
3. 体积大的毛坯具有较大的抗热冲击能力。
4. 大型玻璃毛坯，采用多块叠放放置方法退火，可减小炉温分布不均的影响，增大抗热冲击能力，因而有利于获得高对称应力分布的退火毛坯。

致谢

本工作是在导师王大珩教授、王世焯研究员的指导下完成的，在此表示感谢。

参 考 文 献

- [1] L.H. Adams and E.V. Williamson, J. Frankl. Inst., 1920, 190, 597, 835.
- [2] Е.Э. Данюшевский, 光学玻璃线性退火原理 (中译本), 1965.
- [3] H.S. Carslaw and J.C. Jaeger, Conduction of Heat in Solids, 1959, 30.
- [4] 赵文兴, 金海玉; 光学玻璃精密退火炉的炉温均匀性研究, 见本期。

The Temperature Responses of Glass Blocks During Linear Annealing

Zhao Wenxing

Abstract

In this paper influential factors during linear annealing and temperature responses of optical glass blocks are discussed. A simple expression function of temperature distribution as quasi-stable state in finite glass blocks is represented.