

大尺寸光学玻璃退火的 温度场问题有限元法分析

李 放

摘要:迄今对玻璃在退火过程中温度场的描述还是十分粗糙的,以致于很难通过它对退火中的许多有意义的现象进行准确预测。本文首次把温度场的有限元解法,用于计算光学玻璃退火中随时间缓慢变化的温度场,并编制了微机程序付诸实施。此外还把该方法用于确定玻璃在退火温度 T_r 的保持时间。

一、引 言

分析光学玻璃精密退火过程的温度场的意义,在于温度场是控制退火中玻璃结构转化和应力生成二过程的变量。通常以双折射表示的内应力和以折射率分布表示的光学不均匀评定光学玻璃退火质量。无疑,它们是由玻璃在退火过程中的温度场变化特征确定的。

温度场最可靠的数据资料应当由实验测量得到。由于玻璃退火工况中Biot准数不比可略内热阻的限度 $Bi < 0.1$ 大出多少,可以判断温差之小。因此,无论用传统的还是现代的测温手段,测定退火炉内高温玻璃的温度分布在技术上还存在着严重困难,何况测量仪表本身也有误差。

对于玻璃退火这一物理过程,数学模型是一个三维的导热微分方程的定解问题。实际问题中只有相当小的一部分可以得到精确解析解,而且这些解往往包含有无穷级数、特殊函数以及关于特征值的超越方程,它们的数值计算仍是一个艰巨的任务。迄今即便是简单外形的扁圆柱玻璃的计算,仍简化成二个问题分别求解,即(1)按薄板求沿径向的温度分布;(2)按长圆柱求沿轴向的温度变化^[1],显然从中只能得到相当粗糙的解答。对工程退火中可能出现的复杂边界条件,物性值可变等非线性问题,甚至有球面外形的特殊情况,解析法是无能为力的。

1965年 O.C. Zienkiewicz 等首次论证了有限元法在非结构力学领域的场问题中应用的可能性,迄今利用有限元法求解温度场问题已经崭露头角,有限元法不论问题是简单或复杂都同等对待。因此,随着问题在几何上和物理上的复杂性增高而优点越显著。现在通过微机把有限元法用于计算一定退火规程和工艺条件所确定的光学玻璃的温度场,对揭示影响退火质量的诸因素的细节将起重要作用。

对于光学玻璃退火过程的温度场分析,理论计算比相应的实验研究具有十分明显的优越性:(1)成本低;(2)速度快,这两点得益于计算机的使用;(3)计算机求解可以得到详尽完备的数据资料;(4)具有模拟真实条件的能力;(5)具有模拟理想条件的能力。因此,理论计算历来受到重视,而它是由数学模型建立和计算方法二方面构成的。

二、定解问题、边值处理及其泛函

1. 定解问题

大尺寸光学玻璃在光学工程上的应用一般以圆盘形状为主, 其退火过程的轴对称不稳定温度场的初边值问题可用方程组(1)表示

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{k}{\rho C_p} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] - k \frac{\partial T}{\partial n} = \alpha_i (T - T_f) + \epsilon_i \sigma (T^4 - T_f^4)$$

在外表面第 i 区域 $i = 1, 2, 3, \dots$ (1)

$$T_{i=0} = T_s$$

$$T_f = T_s + \int_0^t \frac{\partial T_f}{\partial \tau} d\tau$$

对于线性退火最后一式简化为

$$T_f = T_s - v_1 t \quad (\text{当 } T_s \geq T_f > T_s)$$

$$T_f = T_s - v_2 t \quad (\text{当 } T_s \leq T_f)$$

其中 T_s 为退火上限温度、 T_s 为退火下限温度、 T_f 为装置退火玻璃的铸铁套(包括托盘和盖板)内壁的温度^[2]。精确地表示 T_f 则第 i 区域应为 T_{fi} , 由于铸铁套的导热系数约为玻璃的50倍, 又可加工成足够的厚度。此外, 它的温度一致性测定和控制技术上可达到一定的精度。因此, 可用 T_f 作为 T_{fi} 的简化。 k 为平均的综合导热系数^[3], $\sigma = 5.668 \times 10^{-8} W / (m^2 \cdot k^4)$, 为SI单位制的Stefan-Boltzman常数。 $\epsilon_i = 1 / (1/\epsilon_s + 1/\epsilon_{fi} - 1)$, 其中 ϵ_s 和 ϵ_{fi} 分别是玻璃和包围它的第 i 区域材料的黑度。

2. 边界条件第3类化处理

退火中的玻璃对铸铁套的放热具备了全部的传热形式。本文一律按自由边值(第三类边界)处理。并给出500℃时的数值。

(1) 侧表面: 通过石英砂(设 $k = 0.3 W / (m \cdot k)$, 厚度 $d = 0.1 m$) 等填充材料玻璃对铸铁套传热, 可根据热阻相等的关系换算出当量放热系数 α_s , 即 $\frac{1}{\alpha_s} = \frac{d}{k}$ 。 $\alpha_s = \frac{0.3}{0.1} = 3 W / (m^2 \cdot k)$

(2) 上表面: 通过空气夹层(设厚度 $L_s = 0.02 m$, 夹层两侧温度分别为 500℃ 和 506℃, 在 500° 空气的 $k = 0.055 W / (m \cdot k)$) 玻璃对铸铁盖板的传热形式, 需要由 Grashoff 数确定^[4], 因为 $Gr < 1700$ 时空气夹层为纯导热。计算结果表明该夹层的 Gr 约为 1700 的 $\frac{1}{10}$, 于是 $\alpha_s = \frac{0.055}{0.02} = 2.8 W / (m^2 \cdot k)$

(3) 热辐射: 根据 Stefan Boltzman 定律, 两灰体封闭空间的表面辐射热流强度 $\sigma(T^4 - T_f^4) / (1/\epsilon_s + 1/\epsilon_f - 1)$ 。可改写成对流传热形式

$$\frac{\sigma(T^4 - T_f^4)}{\frac{1}{\epsilon_s} + \frac{1}{\epsilon_f} - 1} = \frac{\sigma(T^2 + T_f^2)(T + T_f)}{\frac{1}{\epsilon_s} + \frac{1}{\epsilon_f} - 1} (T - T_f) = \alpha_r (T - T_f)$$

计算上表面与铸铁盖板间的辐射传热的形式放热系数 $\alpha_r = \sigma(T^2 + T_f^2)(T + T_f) / (1/\epsilon_s + 1/\epsilon_f - 1) = 16 W / (m^2 \cdot k)$ 。式中 ϵ_s 和 ϵ_f 分别是玻璃和铸铁的表面辐射系数, 取值 $\epsilon_s = 0.85$, $\epsilon_f = 0.25$ 。

3. 泛函

通过边界条件第三类化处理, 式(1)成为

$$-k \frac{\partial T}{\partial n} = \alpha_i (T - T_f) \text{ 在外表面第 } i \text{ 区域, } i=1, 2, \dots \text{ 其中 } \alpha_i = \alpha_k + \alpha_r, \text{ 于是方程组(1)}$$

变成第3类边值定解问题, 与该问题的求解等价是对泛函 J 作极值计算^[5],

$$J = \iiint_V \left\{ \frac{kr}{2} \left[\left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 \right] + r\rho C, \frac{\partial T}{\partial t} T \right\} drdz + \oint_{\Gamma} \alpha \left(\frac{1}{2} T^2 - TT_f \right) rds \quad (2)$$

这里 V 为整个求解域, Γ 为 V 的外表面。原则上可以选择级数形式的试探解代入泛函, 再经过变分计算, 就能得到原来微分方程定解问题的近似解析解。但是由于全区域满足玻璃退火这类复杂条件的要求过于苛刻, 而求之不得。若对区域 V 作离散处理, 且把泛函定义在子域 e 上, 即得子域泛函

$$J^e = \iiint_e \left\{ \frac{kr}{2} \left[\left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 \right] + r\rho C, \frac{\partial T}{\partial t} T \right\} drdz + \int_{\Gamma_e} \alpha \left(\frac{1}{2} T^2 - TT_f \right) rds \quad (3)$$

式中 Γ_e 为区域 V 外表面 Γ 上的单元 e 的边界, 然后在子域 e 内选择试探函数代入 J^e , 即可克服上述困难。

三、圆盘玻璃不稳定温度场有限元分析法

1. 连续体的离散及单元分析

本文以 $\phi 720 \times 140\text{mm}$ 的 K 。圆盘形玻璃退火为例, 用线性位移模式的三角形环单元作轴对称离散。如图1所示。

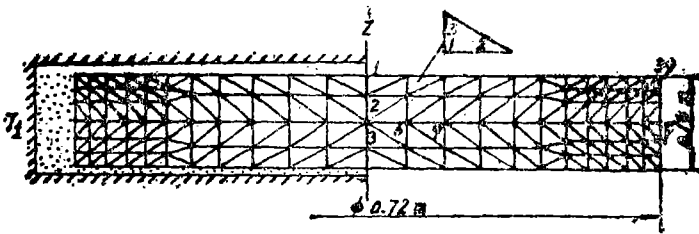


图 1

每个三角形都是一个环单元的截面, 其内一点的温度 T 用单元结点温度 T_1, T_2, T_3 表示即为

$$T = \{N_1, N_2, N_3\} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = [N]\{T\} \quad (4)$$

其中 $N_i = \frac{1}{2A} (a_i + b_i r + c_i z), i=1, 2, 3$ $a_i = r_j z_m - r_m z_j; b_i = z_j - z_m; c_i = r_m - r_j$

i, j, m 依次取 (1, 2, 3) 的轮换得9个等式 $A = \frac{1}{2} (b_1 c_2 - b_2 c_1)$, 把式(4)代入式(3)计算 $\partial J^e / \partial T_1, \partial J^e / \partial T_2, \partial J^e / \partial T_3$ 可得

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial J^e}{\partial T_1} \\ \frac{\partial J^e}{\partial T_2} \\ \frac{\partial J^e}{\partial T_3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} V_{11} & V_{12} & V_{13} \\ V_{21} & V_{22} & V_{23} \\ V_{31} & V_{32} & V_{33} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial t} \\ \frac{\partial T_2}{\partial t} \\ \frac{\partial T_3}{\partial t} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix} \quad (5)$$

设 $\phi = \frac{k}{12\Delta}(r_1 + r_2 + r_3)$, k 为导热系数, $S_1 = \sqrt{b_1^2 + c_1^2}$ 则式(5)中矩阵的元素^{[5][6]}.

$$k_{11} = \phi(b_1^2 + c_1^2),$$

$$k_{22} = \phi(b_2^2 + c_2^2) + \frac{\alpha S_1}{4}(r_2 + \frac{r_3}{3})$$

$$k_{33} = \phi(b_3^2 + c_3^2) + \frac{\alpha S_1}{4}(r_3 + \frac{r_2}{3})$$

$$k_{ij} = k_{ji} = \phi(b_i b_j + c_i c_j), (i, j) \text{ 取 } (1, 2), (2, 3), (3, 1)$$

$$V_{ii} = \rho \frac{C_p \Delta}{30} (3^{i-1} r_1 + 3^{i-2} r_2 + 3^{i-3} r_3), i = 1, 2, 3$$

$$V_{12} = V_{21} = \rho C_p \iint_{\Delta} N_1 \dot{N}_2 r dr dz = \frac{\rho C_p \Delta}{60} (2r_1 + 2r_2 + r_3)$$

$$V_{23} = V_{32} = \rho C_p \iint_{\Delta} N_2 N_3 r dr dz = \frac{\rho C_p \Delta}{60} (r_1 + 2r_2 + 2r_3)$$

$$V_{31} = V_{13} = \rho C_p \iint_{\Delta} N_3 N_1 r dr dz = \frac{\rho C_p \Delta}{60} (2r_1 + r_2 + 2r_3)$$

$$p_1 = 0, \quad p_2 = \frac{\alpha S_1 T_f}{3} (r_2 + \frac{r_3}{2}), \quad p_3 = \frac{\alpha S_1 T_f}{3} (\frac{r_2}{2} + r_3)$$

其中规定边界单元的结点 1 之对边在边界上。

2. 总体合成

温度场离散到全部结点的结果, 泛函 J 可表示成未知结点温度 T_i 的多元函数, $J = J(T_1, T_2, T_3, \dots, T_n)$, n 为未知温度的结点总数, 于是变分问题转化为多元函数求极值, 极值条件

$$\frac{\partial J}{\partial T_i} = \frac{\partial \sum J^e}{\partial T_i} = \sum_e \frac{\partial J^e}{\partial T_i} = 0 \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (6)$$

Σ 内的 $\frac{\partial J^e}{\partial T_i}$ 项只有在结点 i 包含于单元 e 时才不为 0, 而不为 0 的项在式(5)中给出, 因此, 式(7)中的矩阵是高度稀疏的对称矩阵。

关于全部结点 i , $i = 1, 2, \dots, n$, 作式(6)的计算得方程组

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial J}{\partial T_1} \\ \frac{\partial J}{\partial T_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial J}{\partial T_n} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_e \frac{\partial J^e}{\partial T_1} \\ \sum_e \frac{\partial J^e}{\partial T_2} \\ \vdots \\ \sum_e \frac{\partial J^e}{\partial T_n} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_n \end{Bmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} & \cdots & V_{1n} \\ V_{21} & V_{22} & \cdots & V_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ V_{n1} & V_{n2} & \cdots & V_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial t} \\ \frac{\partial T_2}{\partial t} \\ \vdots \\ \frac{\partial T_n}{\partial t} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} = 0$$

或表示作 $[k]\{T\} + [V]\left\{\frac{\partial T}{\partial t}\right\} = \{p\}$ (7)

采用最简单的两点向后差分代替微分, 即 $\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T_i - T_{i-\Delta t}}{\Delta t}$, 则式(7)成为

$$[[k] + \frac{1}{\Delta t}[V]]\{T\}_i = \frac{1}{\Delta t}[V]\{T\}_{i-\Delta t} + \{p\}$$
 (8)

于是已知时刻 $t - \Delta t$ 的结点温度 $\{T\}_{i-\Delta t}$ 后, 解方程组(8)可得时刻 t 的结点温度 $\{T\}_i$, 从而得到计算程序依据的递推公式。

3. 计算实例

为了提供计算永久应力 (产生双折射和第二类光学不均匀性) 和第一类光学不均匀性所

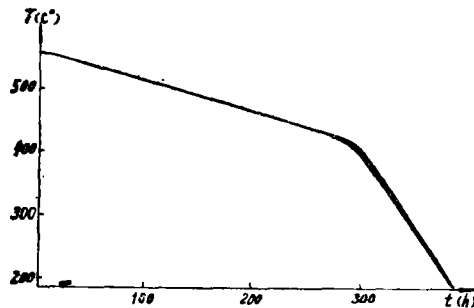


图 2

需要的温度场信息, 应选择适当的时间步长 Δt 。我们自编的BASIC 微机源程序把 $> \frac{4}{5}$ 的时段

(从而机时) 用于计算 $\frac{d}{dt}(\text{grad}T) \gg 0$ 的时间间隔的温度场, 它们相当于图2的0~20h和

280~310h两段。图2为图1的K₂玻璃以0.5℃/h的制度退火, 毛坯内结点3、6、39的温度变化。步长函数 $L = 480 * 1.2 \wedge (n - 1) * (n \leq 26) + 144000 * (26 < n < 32) + 14400 * (32 \leq n \leq 50) + 108000 * (n > 50)$, 时段总数51。为了缩小近一倍的计算工作量, 考虑到轴对称玻璃在应用上可以忽视沿 z 轴方向上的光学不对称, 而把几何反映对称面作为物理的反映面。只计算 $z \geq 0$ 的部分而得反映对称的轴对称温度场, 图3为4个时刻 LT 的等温线, 6条线的温度分别用图上的6个数字表示。

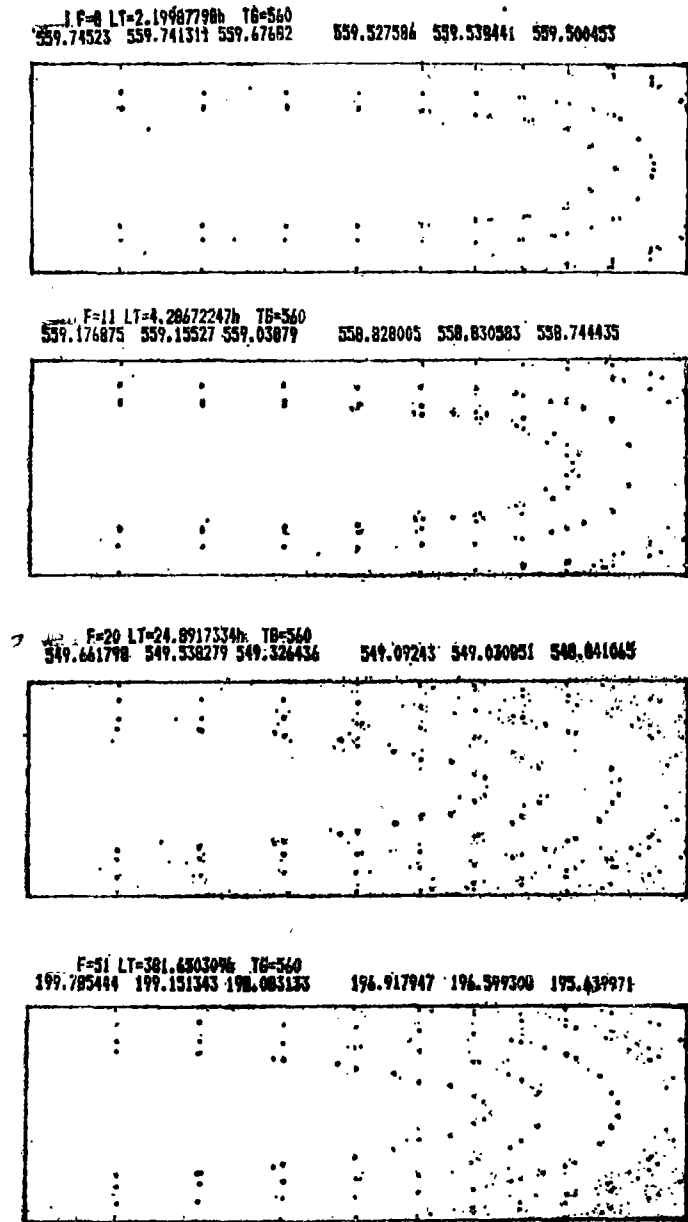


图 3

四、用微机预测玻璃在退火温度 T_g 的保持时间

待退火的玻璃自室温升温到退火温度 T ,恒温保持,虽然折射率在结构松弛中趋近平衡值比应力消失所需时间大数倍,但是依然不足1小时。与此相比,大尺寸玻璃内温度充分均衡所需时间却可以把1小时忽略。如果不把讨论扩大到装置玻璃的铸铁套之外的退火炉内部位(在此直接温度检测可以发挥作用),前面陈述的温度场计算的有限元法程序可为预测保持时间提供详细的参考数据。

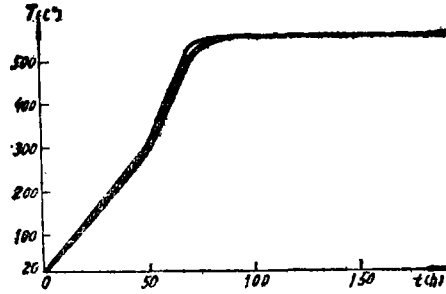


图4 结点3和39的温度与时间关系

70h: 503.053275	537.175555	80h: 543.089493	554.478959	90h: 555.112792	558.57072
100h: 558.609003	559.620921	110h: 559.608434	559.898153	120h: 559.890633	559.97242
130h: 559.969616	559.992494	140h: 559.991589	559.99795	150h: 559.997678	559.999438
160h: 559.999359	559.999846	170h: 559.999823	559.999957	180h: 559.999951	559.999988
190h: 559.999986	559.999996				

图4为图1所示玻璃升温至560℃保持时结点3、6、29、39的温度随时间的变化。图4下数字中每组三个分别是自升温开始计算的时间和此时玻璃中温差最大两点(3、39)的温度。于是可以按我们对均衡的要求(如0.01℃)选择保持时间(如140h,从升温算起)。建议所选温差等于退火稳定阶段 $-\frac{d}{dt}(\text{grad } T) = 0$ 的最大温差。

五、结 论

在微计算机上用有限元法计算光学玻璃精密退火中缓慢变化的不稳定温度场,可以为玻璃“热历史”的定量研究提供最基本的温度历程信息,同时在工程退火的计算中具有实用价值。

参 考 文 献

- [1] E.Э. Данюшевский, 光学玻璃线性退火原理, 国防工业出版社, 1959.
- [2] 干福熹等, 光学玻璃, 下册, 科学出版社, 1985, 756—814页.
- [3] Robert Gardon, A Review of Radiant Heat Transfer in Glass, *Jou. Ame. Cer. Soc.*, 1961, 44, No. 7, 305—312.
- [4] J.R. Welty, 工程传热学, 人民教育出版社, 1982.
- [5] 孔祥谦, 数值传热学, 哈船工学院讲义, 1981.

The Finite Element Analysis of Temperature Distribution Within a Large Size Optical Glass During the Annealing

Li Fang

Abstract

Up to now quantitative description of the temperature distribution within glass being annealed is very rough and superficial, so that many significant phenomena can't be forecasted by it. The application of the finite element solution of heat transfer problems to the determination of the temperature distribution within axisymmetric glass being annealed where the temperature change is slowly has been suggested for the first time in this paper, and corresponding microcomputer programs is designed to put into effect. In addition, this paper also describes how to determine the necessary time to make the glass maintained at the annealing temperature T_g with a microcomputer.