# 机器人手臂误差分析及误差补偿

黄　真

（燕山大学）

**摘要**：本文对机器人手臂的误差和影响误差的因素作了分析，建立起机器人夹持器（手）的运动误差与各种原始误差的函数式，文章着重于推导作为误差传递函数的各种偏导数矩阵，得到了统一的表达式。这种形式特别适合电子计算机计算。文章最后讨论了误差补偿方法和导出了补偿计算的公式。

## 一、概　　述

机器人在当前和今后的工业生产和人类生活领域的各个方面有着重大作用和广阔的前景。机器人灵活的手臂在智能电脑控制下，将以前所未有的规模和范围代替人完成各种劳动工作。机器人手臂工作的精度问题直接关系到机器人的工作质量，特别是对那些精度较高的工作，如弧焊、装配等。所以需要分析手臂的运动误差和分析原始结构参数误差对运动误差的影响。当各个结构参数，如杆长$a_{l\,(l+1)}$、偏置$S_l$以及偏角$\alpha_{l\,(l+1)}$，图 1，均符合名义值没有误差，运动付中也都不存在任何间隙，这是理想的。但实际加工和装配都有不可避免的误差；工作中受静、动负荷引起变形；为转动灵活，运动付中必须存在间隙，长期工作下的磨损又会使间隙不断增加……。凡此种种都使机构得不到正确的位置，发生误差。与此相关的位移、速度、加速度也将发生误差[1][2][3]。

本文首先建立起串联机器人手臂[4]的运动误差与结构误差关系的解析表达式。然后着重于导出误差传递函数的计算公式。由于空间机构的复杂性，是不容易建立起统一的关系式[5]。本文利用了向量导数的性质得出了机器人手臂误差分析偏导函数的解析式，包括了手掌位置误差及姿态误差两个方面。文章还分析了补偿误差的方法并导出计算公式。最后还将手臂误差解析式推广到任意自由度手臂的更一般情况。总之本文最主要工作在建立了误差传递函数的统一公式。

## 二、机器人机构的误差分析

一个六自由度的机器人手臂绘于图1中。[4]它的运动付可以是一个自由度的转动付、移动副，或是两个自由度的圆柱副。圆柱副从理论上看是一个转动副和一个移动副的共轴线迭加。图中转动副的轴线及移动副的滑道中心线表示以单位向量$\overline{S_l}$。两相邻运动副轴线之间的最短距离，即公垂线，为$a_{l\,(l+1)}$，称杆长。沿$a_{l\,(l+1)}$的单位向量为$\overline{al}\,(l+1)$。相邻三垂线$\overline{S}_{l-1}$、

$\overline{S_l}$、$\overline{S_{l+1}}$之间有两条公垂线，在$\overline{S_l}$上的两垂足之间的距离$S_l$称为杆$l$之偏置。相邻两轴线间之转角为$\theta_l$，相邻两杆之间的偏角为$\alpha_{l(l+1)}$。在机器人手臂上杆长$a_{l(l+1)}$及偏角$\alpha_{l(l+1)}$是不变的结构参数。对回转付，偏置长度$S_l$是不变的也是结构参数，$\theta_l$转角是由驱动器带动是输入运动参数。移动副则相反，$\theta_l$角是固定不变的结构参数，而偏置$S_l$是由驱动器为液压缸推动的输入运动参数。圆柱副相当重合的转动副$l$及移动副$l+1$，即$\overline{S_l}$与$\overline{S_{l+1}}$重合，$a_{l(l+1)}$等于零，$\alpha_{l(l+1)}$也等于零，偏置$S_l$可以选为任何长度，是一固定值。而$\theta_{l+1}$是固定不变的任选值。这里有两个输入运动参数，它们是$\theta_l$及$S_{l+1}$，一个转动量一个移动量。从上述分析一般六自由度手臂均可表为图示结构，六个付，每个付为一个自由度。而且第一个副$S_1$固定在地面上。

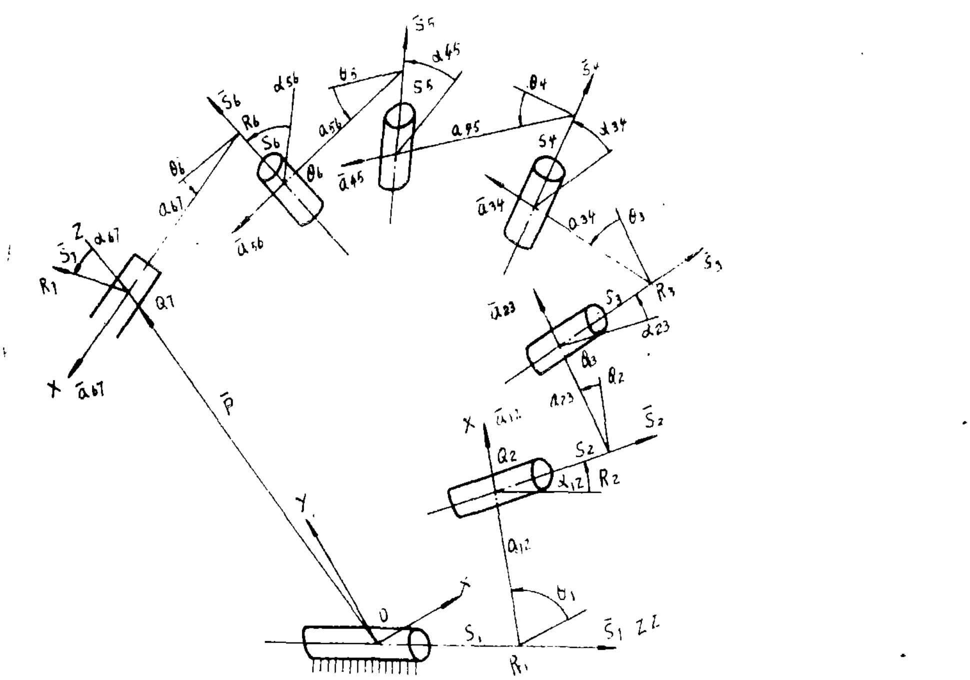


图 1

当我们将坐标系$XYZ$之原点$O$置于固定运动副$S_1$上，使2轴沿$\overline{S_1}$方向。手的位置是以指向手心某点$Q_7$之向量$\overline{P}$表示；手的姿态是以向量$\overline{a_{67}}$及$\overline{S_7}$表示。单位向量$\overline{S_7}$垂直$\overline{a_{67}}$是沿夹钳开口的中心线方向。这三个向量是此开环机构的输出参数。手的位置偏差为$\Delta\overline{P}$，姿态偏差为$\Delta\overline{a_{67}}$及$\Delta\overline{S_7}$，这三个量是输出构件的运动参数误差。当按一定要求给出许用值或偏差范围，即表示一定的精度要求。

使手的位置和姿态发生误差的原始误差分为结构误差及输入参量误差，结构参数的原始误差有杆长偏差$\Delta a_{l(l+1)}$，杆件偏角的偏差$\Delta\alpha_{l(l+1)}$。运动副偏置长度偏差$\Delta S_l$及转角偏差$\Delta\theta_l$是结构偏差还是输入参数的偏差则要看具体运动副的种类才能确定。

当同时存在多种原始误差下，众所周知，按误差的线性迭加原理，输出某参数$\overline{u}$之误差与原始误差$\Delta\overline{a}$、$\Delta\overline{\alpha}$、$\Delta\overline{\theta}$、$\Delta\overline{s}$之关系为

$$\Delta \overline{u} = \left[\frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{a}}\right]\{\Delta \overline{a}\} + \left[\frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{\alpha}}\right]\{\Delta \overline{\alpha}\} + \left[\frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{\theta}}\right]\{\Delta \overline{\theta}\} + \left[\frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{S}}\right]\{\Delta \overline{S}\} \tag{1}$$

式中$a$、$\alpha$、$\theta$、$S$记以向量符号是因为每一个都是有六个分量的向量。式（1）中每一个向量偏导矩阵对六自由度机构则是$3\times6$矩阵，记以$[G^{*}]$

$$\left[G\frac{\overline{u}}{\overline{a}}\right] = \frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{a}} = \begin{pmatrix} \partial u_x/\partial a_{12} & \partial u_x/\partial a_{23} & \cdots\cdots & \partial u_x/\partial a_{67} \\ \partial u_y/\partial a_{12} & \partial u_y/\partial a_{23} & \cdots\cdots & \partial u_y/\partial a_{67} \\ \partial u_z/\partial a_{12} & \partial u_z/\partial a_{23} & \cdots\cdots & \partial u_z/\partial a_{67} \end{pmatrix} \tag{2}$$

计算机器人手的速度和加速度误差只需将位置误差对时间取一阶及二阶导数。有

$$\frac{d}{dt}(\Delta \overline{P}) = \left(\frac{\partial}{\partial \overline{q}}\left[\frac{\partial \overline{P}}{\partial \overline{a}}\right]\Delta \overline{a}\right)\cdot\overline{\dot{q}} + $$

$$+\left(\frac{\partial}{\partial \overline{q}}\left[\frac{\partial \overline{P}}{\partial \overline{\alpha}}\right]\Delta \overline{\alpha}\right)\overline{\dot{q}} + \left(\frac{\partial}{\partial \overline{q}}\left[\frac{\partial \overline{P}}{\partial \overline{\theta}}\right]\Delta \overline{\theta}\right)\overline{\dot{q}} + \left(\frac{\partial}{\partial \overline{q}}\left[\frac{\partial \overline{P}}{\partial \overline{S}}\right]\Delta \overline{S}\right)\overline{\dot{q}} \tag{3}$$

其中向量$\overline{q}$及$\overline{\dot{q}}$是广义输入参数，在这是六维向量。这里输入位置参数本身的误差已包括在公式的原始误差中，如不计该项误差仅考虑结构误差，只须令该分量为零即可。在建立上式时还注意到各结构参数误差对时间的导数是零，不随时间改变。手的加速度误差为

$$\frac{d^2(\Delta \overline{P})}{dt^2} = \overline{\dot{q}}^{T}\left[\frac{d^2(\Delta \overline{P})}{d\overline{q}\,d\overline{q}}\right]\overline{\dot{q}} + \left(\frac{d(\Delta \overline{P})}{d\overline{q}}\right)\overline{\ddot{q}}$$

$$= \sum_{r=1}^{6}\sum_{t=1}^{6}\sum_{j=1}^{6}\left\{\frac{\partial^2}{\partial q_t\,\partial q_r}\left[\frac{\partial \overline{P}}{\partial \theta_j}\Delta\theta_j + \frac{\partial \overline{P}}{\partial \alpha_j}\Delta\alpha_j\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\partial \overline{P}}{\partial \theta_j}\Delta\theta_j + \frac{\partial \overline{P}}{\partial S_j}\Delta S_j\right]\dot{q}_t\dot{q}_r\right\}$$

$$+\sum_{r=1}^{6}\sum_{j=1}^{6}\left\{\frac{\partial}{\partial q_r}\left[\frac{\partial \overline{P}}{\partial \theta_j}\Delta\theta_j + \frac{\partial \overline{P}}{\partial \alpha_j}\Delta\alpha_j + \frac{\partial \overline{P}}{\partial \theta_j}\Delta\theta_j\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\partial \overline{P}}{\partial S_j}\Delta S_j\right]\dot{q}_r\right\}\overline{\ddot{q}} \tag{4}$$

式中$r$、$t$、$j$的六个分量是分别对应六个运动付。当我们对一个具体机构作误差分析时，各个原始误差量已知的，当然原始误差在公差范围内是随机变量，若用概率论的观点来计算，所得结果将更符合实际。在这里对这方面将不予讨论。应用上述公式计算关键的问题是如何计算公式中的各项误差传递偏导数。以下文章将着重讨论这个问题。

## 三、误差传递偏导数及手的位置误差分析

从上述分析可知误差计算的关键是确定如何计算公式（1）—（4）中的各个偏导数。我们先分析手的位置误差，由式（1）手的误差表达式为

$$\Delta\overline{P}=\left[\frac{\partial\overline{P}}{\partial\overline{S}}\right]\{\Delta\overline{S}\}+\left[\frac{\partial\overline{P}}{\partial\overline{a}}\right]\{\Delta\overline{a}\}+\left[\frac{\partial\overline{P}}{\partial\overline{\theta}}\right]\{\Delta\overline{\theta}\}+\left[\frac{\partial\overline{P}}{\partial\overline{\alpha}}\right]\{\Delta\overline{\alpha}\} \tag{5}$$

式中各矩阵都可表示为类似如

$$\left[\frac{\partial\overline{P}}{\partial\overline{S}}\right]=\left[\frac{\partial\overline{P}}{\partial S_1}\ \ \frac{\partial\overline{P}}{\partial S_2}\ \ \cdots\ \ \frac{\partial\overline{P}}{\partial S_6}\right] \tag{6}$$

这里分向量是向量$P$对某元$S_l$之偏导数。这样的偏导数都可以用向量$P$的时间导数对该元的时间导数的偏导来求，即

$$\frac{\partial\overline{P}}{\partial S_l}=\frac{\partial(\dot{\overline{P}})}{\partial(\dot{S}_l)}\qquad\text{或}\qquad\frac{\partial\overline{u}}{\partial v}=\frac{\partial(\dot{\overline{u}})}{\partial(\dot{v})} \tag{7}$$

由图1，手的位置向量可以表示为诸向量$\overline{S}_l$和向量$\overline{a}_{l(l+1)}$之和

$$\overline{P}=\sum_{l=1}^{6}(S_l\overline{S}_l+a_{l(l+1)}\overline{a}_{l(l+1)}) \tag{8}$$

其时间导数为

$$\dot{\overline{P}}=\frac{d\overline{P}}{dt}=\sum_{l=1}^{6}\left(\dot{S}_l\overline{S}_l+S_l\dot{\overline{S}}_l+\dot{a}_{l(l+1)}\overline{a}_{l(l+1)}+a_{l(l+1)}\dot{\overline{a}}_{l(l+1)}\right) \tag{9}$$

对右边括号中的第一项第三项求偏导有

$$\frac{\partial\dot{\overline{P}}}{\partial\dot{S}_l}=\overline{S}_l,\qquad l=1,2,\cdots,6 \tag{10}$$

$$\frac{\partial\dot{\overline{P}}}{\partial\dot{a}_{l(l+1)}}=\overline{a}_{l(l+1)},\qquad l=1,2,\cdots,6 \tag{11}$$

括号中第二项及第四项为向量的时间导数，因为向量的导数可以表示为角速度与该向量的叉积，

$$\dot{\overline{u}}=\overline{\omega}\times\overline{u} \tag{12}$$

所以诸项可以展开并表示为

$$\dot{S}_1\overline{S}_1 = 0$$

$$\dot{S}_2\overline{S}_2 = (\dot{\theta}_1\overline{S}_1 + \dot{a}_{12}\overline{a}_{12}) \times S_2\overline{S}_2$$

$$\dot{S}_3\overline{S}_3 = (\dot{\theta}_1\overline{S}_1 + \dot{a}_{12}\overline{a}_{12} + \dot{\theta}_2\overline{S}_2 + \dot{a}_{23}a_{23}) \times S_3\overline{S}_3$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\dot{S}_6\overline{S}_6 = (\dot{\theta}_1\overline{S}_1 + \dot{a}_{12}\overline{a}_{12} + \cdots + \dot{\theta}_5\overline{S}_5 + \dot{a}_{56}\overline{a}_{56}) \times S_6\overline{S}_6 \tag{13}$$

$$\dot{a}_{12}\overline{a}_{12} = \dot{\theta}_1\overline{S}_1 \times a_{12}\overline{a}_{12}$$

$$\dot{a}_{23}\overline{a}_{23} = (\dot{\theta}_1\overline{S}_1 + \dot{a}_{12}\overline{a}_{12} + \dot{\theta}_2\overline{S}_2)a_{23}\overline{a}_{23}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\dot{a}_{67}\overline{a}_{67} = (\dot{\theta}_1\overline{S}_1 + \dot{a}_{12}a_{12} + \cdots + \dot{a}_{56}\overline{a}_{56}\ \dot{\theta}_6\overline{S}_6) \times a_{67}\overline{a}_{67} \tag{14}$$

从式（13）及（14）中集项

$$\dot{\theta}_1\overline{S}_1 \times [S_2\overline{S}_2 + S_3\overline{S}_3 + \cdots + S_6\overline{S}_6 + a_{12}\overline{a}_{12} + \cdots + a_{67}\overline{a}_{67}] = \dot{\theta}_1\overline{S}_1 \times (\overline{P} - \overline{R}_1)$$

$$\dot{\theta}_2\overline{S}_2 \times [S_3\overline{S}_2 + \cdots + S_6\overline{S}_6 + a_{23}\overline{a}_{23} + \cdots + a_{67}\overline{a}_{67}] = \dot{\theta}_2\overline{S}_2 \times (\overline{P} - \overline{R}_2)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\dot{\theta}_6\overline{S}_6 \times a_{67} \times \overline{a}_{67} = \dot{\theta}_6\overline{S}_6 \times (\overline{P} - \overline{R}_6) \tag{15}$$

式（15）中 $\overline{R}_1, \cdots, \overline{R}_6$ 分别表示公法线 $a_{l\,(l+1)}$ 之起点$R_l$之向径例如 $\overline{R}_2 = \overline{OR}_2$，这些向量可由相应的若干$\overline{S}$及$\overline{a}$之和求得，同样还有

$$\dot{a}_{12}\overline{a}_{12} \times (S_2\overline{S}_2 + S_3\overline{S}_3 + \cdots + S_6\overline{S}_6 + a_{23}\overline{a}_{23} + \cdots + a_{67}\overline{a}_{67}) = \dot{a}_{12}\overline{a}_{12} \times (\overline{P} - \overline{Q}_2)$$

$$\dot{a}_{23}\overline{a}_{23} \times (S_3\overline{S}_3 + \cdots + S_6\overline{S}_6 + a_{34}\overline{a}_{34} + \cdots + a_{67}\overline{a}_{67}) = \dot{a}_{23}\overline{a}_{23} \times (\overline{P} - \overline{Q}_3)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\dot{a}_{67}\overline{a}_{67} \times 0 = \dot{a}_{23}\overline{a}_{67} \times (\overline{P} - \overline{Q}_7) \tag{16}$$

这里式(16)中$\overline{Q}_2$、$\overline{Q}_3 \cdots \overline{Q}_7$分别表示各公法线$a_{l\,(l+1)}$之终点$Q_{l+1}$处之向径，例如 $\overline{Q}_2 = \overline{OQ}_2$，它们也可由若干$\overline{S}$及$\overline{a}$作和求到，$a_{67}\overline{a}_{67}$之终点$Q_7$向径即等于$\overline{P}$。顺便提到，因为机构的位置已知，$\overline{S}$及$\overline{a}$是当作已知参量。归纳(15)，(16)两式，式(9)可以表示为

$$\dot{\overline{P}} = \sum_{l=1}^{6} (\dot{S}_l\overline{S}_l + \dot{a}_{l\,(l+1)}\overline{a}_{l\,(l+1)} + \dot{\theta}_l\overline{S}_l \times (\overline{P} - \overline{R}_l) + \dot{a}_{l\,(l+1)}\overline{a}_{l\,(l+1)} \times (\overline{P} - \overline{Q}_{l+1})) \tag{17}$$

因此还有

$$\frac{\partial \dot{\overline{P}}}{\partial \dot{\theta}_l} = \overline{S}_l \times (\overline{P} - \overline{R}_l),$$

$$l = 1, 2, \cdots\cdots, 6 \tag{18}$$

$$\frac{\partial \dot{\overline{P}}}{\partial \overset{\circ}{a}_{l\,(l+1)}} = \overline{a}_{l\,(l+1)} \times (\overline{P} - \overline{Q}_{l+1}),$$

$$l = 1, 2, \cdots\cdots 6 \qquad (19)$$

这样导出了计算机器人手的误差表达式中所有需要的误差传递偏导函数，同时我们指出，这里所有偏导即为此开式练机构的一阶运动影响系数记以〔$G^{\cdot}_{\cdot}$〕,这样式（5）也可写为

$$\Delta \overline{P} = [G^{P}_{S}]\{\Delta \overline{S}\} + [G^{P}_{a}]\{\Delta \overline{a}\} + [G^{P}_{\theta}]\{\Delta \overline{\theta}\} + [G^{P}_{\alpha}]\{\Delta \overline{\alpha}\} \qquad (20)$$

式（20）中各矩阵皆为$3 \times 6$纯量阵，

## 四、手的姿态误差

夹持器（手）在空间的姿态可以用固定其上的坐标系之方向余弦表示。此局部坐标系之$Z$轴与$\overline{S}_7$重合，$X$轴与$\overline{a}_{67}$重合，$Y$轴则由$Z$与$X$之叉乘积决定$\overline{y} = \overline{z} \times \overline{x}$，所以决定手的姿态仅须向量$\overline{a}_{67}$及$\overline{S}_7$之方向。因为已经求得空间点的向径式及其误差表达式，因此向量$\overline{a}_{67}$及$\overline{S}_7$都用两个点的向径差来表示是很方便的，

$$\begin{aligned} \overline{a}_{67} &= (\overline{P} - \overline{R}_6)/a_{67} \\ \overline{S}_7 &= \overline{R}_7 - \overline{P} \end{aligned} \qquad (21)$$

姿态的误差也可用$\overline{a}_{67}$及$\overline{S}_7$的误差来表示，图2

$$\begin{aligned} \Delta \overline{a}_{67} &= (\Delta \overline{P} - \Delta \overline{R}_6)/a_{67} \\ \Delta \overline{S}_7 &= \Delta \overline{R}_7 - \Delta \overline{P} \end{aligned} \qquad (22)$$

图2中表示了$\overline{a}_{67}$的误差$\Delta \overline{a}_{67}$与$\Delta \overline{P}$及$\Delta \overline{R}_6$的关系。手的新姿态可由向量$\overline{a}_{67}'$及$\overline{S}_7'$决定，$\overline{S}_7$图中未画出。

$$\begin{aligned} \overline{a}_{67}' &= \overline{a}_{67} + \Delta \overline{a}_{67} \\ \overline{S}_7' &= \overline{S}_7 + \Delta \overline{S}_7 \end{aligned} \qquad (23)$$

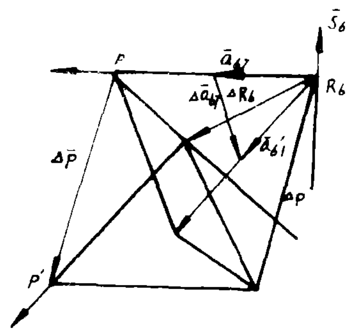


图 2

决定手姿态的新坐标系就可这样确定，下面就是要导出$\Delta \overline{R}_6$，$\Delta \overline{R}_7$以求$\Delta \overline{a}_{67}$、$\Delta \overline{S}_7$。这里我们直接给出通式，按式（1）对$\overline{R}_n$有

$$\Delta \overline{R}_n = \left[\frac{\partial \overline{R}_n}{\partial \overline{S}}\right]\{\Delta \overline{S}\} + \left[\frac{\partial \overline{R}_n}{\partial \overline{a}}\right]\{\Delta \overline{a}\} + \left[\frac{\partial \overline{R}_n}{\partial \overline{\theta}}\right]\{\Delta \overline{\theta}\} + \left[\frac{\partial \overline{R}_n}{\partial \overline{\alpha}}\right]\{\Delta \overline{\alpha}\} \qquad (24)$$

其中偏导数仿式(8)至（19)可表示为

$$\frac{\partial \overline{R}_n}{\partial S_l} = \overline{S}_l \quad , \quad 当 l = 1, 2, \cdots n$$

$$\frac{\partial \overline{R}_n}{\partial a_{l\,(l+1)}} = \begin{cases} \overline{a}_{l\,(l+1)}\,, & 当\ l = 1, 2, \cdots, (n-1) \\ 0\,, & 当\ l = n \end{cases}$$

$$\frac{\partial \overline{R}_n}{\partial \theta_l} = \overline{S}_l \times (\overline{R}_n - \overline{R}_l), \qquad 当\ l = 1, 2, \cdots, n$$

$$\frac{\partial \overline{R}_n}{\partial \alpha_{l\,(l+1)}} = \begin{cases} \overline{a}_{l\,(l+1)} \times (R_n - Q_{l+1}), & 当\ l = 1, 2, \cdots, (n-1) \\ 0\,, & 当\ l = n。 \end{cases} \tag{25}$$

只需将$n = 6$或$n = 7$代入式(24)即得$\varDelta\overline{R}_6$和$\varDelta\overline{R}_7$，这样$\overline{a}_{67}$之偏差可求

$$\begin{aligned} \varDelta\,\overline{a}_{67} &= \varDelta\,\overline{P} - \varDelta\overline{R}_6/a_{67} \\ &= \left[G_{\overline{S}}^{\overline{P}-\overline{R}_6}\right]\{\varDelta\overline{S}\} + \left[G_{\overline{a}}^{\overline{P}-\overline{R}_6}\right]\{\varDelta\,\overline{a}\} + \left[G_{\overline{\theta}}^{\overline{P}-\overline{R}_6}\right]\{\varDelta\overline{\theta}\} \\ &\quad + \left[G_{\overline{\alpha}}^{\overline{P}-\overline{R}_6}\right]\{\varDelta\,\overline{\alpha}\} \end{aligned} \tag{26}$$

其中矩阵$\left[G^{\overline{P}-\overline{R}_6}\right]$是相应两分矩阵之差为

$$\left[G_{\overline{S}}^{\overline{P}-\overline{R}_6}\right] = \left[G_{\overline{S}}^{\overline{P}}\right] - \left[G_{\overline{S}}^{\overline{R}_6}\right] \tag{27}$$

同样$\overline{S}_7$之偏差为

$$\begin{aligned} \varDelta\overline{S}_7 = &\left[G_{\overline{S}}^{\overline{R}_7-\overline{P}}\right]\{\varDelta\overline{S}\} + \left[G_{\overline{a}}^{\overline{R}_7-\overline{P}}\right]\{\varDelta\,\overline{a}\} + \left[G_{\overline{\theta}}^{\overline{R}_7-\overline{P}}\right]\{\varDelta\theta\} \\ &+ \left[{}_{\overline{\alpha}}^{\overline{R}_7-\overline{P}}\right]\{\varDelta\,\overline{\alpha}\} \end{aligned} \tag{28}$$

在上述误差分析中包括了原始结构误差及原始输入参数误差两部分。如仅要求计及原始结构误差，则只须要使相应的输入运动参数之偏差为零，例如，当六个运动付皆为转动副时，就可以让$\varDelta\,\overline{\theta} = \overline{0}$，即$\varDelta\,\overline{\theta} = \{000000\}^T$，代入。上述公式形式不必改动。如机构又有转动副又有移动副，只要令$\varDelta\,\overline{\theta}$及$\varDelta\overline{S}$中相应顺序位置上之分量为零代入即是。从上述分析可以看到，所有误差传递函数矩阵是机构的位置函数，当手臂位置改变时，偏导矩阵也将改变。

若机器人手臂之自由度不为6时，则上述公式可推广到一般形式。手的位置偏差之表达式仍为式（20），姿态偏差也仍为式（26）和（28），只需以$\overline{R}_n$代$\overline{R}_6$和$\overline{R}_{n+1}$代$\overline{R}_7$即可。式中的偏导数矩阵为

$$\frac{\partial \overline{P}}{\partial S_l} = \overline{S_l}, \qquad l = 1, 2, \cdots n$$

$$\frac{\partial \overline{P}}{\partial a_{l\ (l+1)}} = \overline{a_{l\ (l+1)}}, \qquad l = 1, 2, \cdots n$$

$$\frac{\partial \overline{P}}{\partial \theta_l} = \overline{S_l} \times (\overline{P} - \overline{R_l}) \qquad l = 1, 2, \cdots n$$

$$\frac{\partial \overline{P}}{\partial \alpha_{l\ (l+1)}} = \overline{a_{l\ (l+1)}} \times (\overline{P} - \overline{Q_{l+1}}) \qquad l = 1, 2, \cdots n \tag{29}$$

其余的偏导数见式（25）

## 五、补偿误差的计算

如通过理论计算或实际测试，得到机器人运动过程中某时刻手的位置误差$\Delta \overline{P}$及姿态误差$\Delta \overline{a_{67}}$及$\Delta \overline{S_7}$的数据。为使机器人工作精确，可以对反馈回来的这个误差量设法予以补偿。可以采用的补偿方法有多种，可以在手臂系统中间某个环节中插入一个6自由度的微型补偿器，这可以是一个平行6回路6自由度机构；也可以在原手臂中选定另外6个结构参数，如$\alpha_{l\ (l+1)}$，$l = 1 \cdots 6$，设计为可驱动的；当然也可以直接让原来的6个原动件$\theta_l$，$l = 1, 2 \cdots 6$，以6个附加微量转动$\Delta \theta_l$来补偿。这里我们以第二种办法，即使诸$\alpha_{l\ (l+1)}$角被驱动以补偿手的误差。这样就应计算一下各个角$\alpha_{l\ (l+1)}$的增量应等于多少。决定手的空间位置和姿态理论上只需6个条件，因为三维空间的物体有6个自由度。而这里有三个误差向量$\Delta \overline{P}$、$\Delta \overline{a_{67}}$及$\Delta \overline{S_7}$，所以这九个纯量分量中仅6个是独立的。这样手的位置、姿态与6个$\alpha_{l\ (l+1)}$角的调整补偿增量的关系有

$$\Delta \overline{\overline{P}} = [E_r]\{\Delta \overline{\alpha}\} \tag{30}$$

其中$\Delta \overline{\overline{P}}$表示手的位置及姿态的六维向量的增量，此六维分量可在上述九个分量中适当选取，比如，可以有

$$\Delta \overline{\overline{p}} = \begin{Bmatrix} -\Delta \overline{P} \\ -\Delta a_{67x} \\ -\Delta a_{67y} \\ -\Delta S_{7x} \end{Bmatrix} \tag{31}$$

当$\Delta \overline{\overline{P}}$向量选定，矩阵就$[E_r]$就应该是由相应$\Delta \overline{\overline{P}}$各分量的对应于$\Delta \alpha$的偏导矩阵的相应行构成的$6 \times 6$矩阵，对应$\Delta \overline{\overline{P}}$有如（31）式有

$$[E_r]=\left[\begin{array}{c}\left[G_{\overline{\alpha}}^{\overline{P}}\right] \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \left[G_{\overline{\alpha}}^{\overline{P}-\overline{R}_6}\right]1; \\ \left[G_{\overline{\alpha}}^{\overline{P}-\overline{R}_6}\right]2; \\ \left[G_{\overline{\alpha}}^{\overline{R}_7-\overline{P}}\right]3;\end{array}\right]_{6\times 6} \tag{32}$$

其中符号$[G]_{i;}$表示相应矩阵的第$i$行的行向量，下标中分号“；”前的数目表示行号。因此在手误差给定求补偿值时，只须求方程（31）之逆解。

$$\{\varDelta\overline{\alpha}\}=[E_r]^{-1}\{\varDelta\overline{\overline{P}}\} \tag{33}$$

这里$[E_r]$矩阵不为奇异阵。当然此补偿并不一定都选$\alpha$角，也可以选不同种类的六个结构参数作为补偿的输入量，此时只须以相应输入补偿量在偏导数矩阵中对应的行向量拿出来去组成$E_r$矩阵，同样求解。

当然做为补偿微调不希望过于敏感，所以前述的第一种调节方案较为理想，将6自由度微调器尽量靠近手臂的自由端。同样理由，从式（25）及（29）看到，同样大小的原始角度误差，越靠近固定端影响越大，这在设计时应予以考虑。

## 六、结　　论

本文导出了机器人手臂的运动误差对于原始误差的表达式。着重推导得出的关于各个不同的原始误差的偏导数计算的公式，有统一的形式。且公式简明，特别易于应用电子计算机计算。该统一公式形式同时适用具有不同自由度的机器人手臂的误差分析。补偿误差时将补偿输入参量选的靠近末端较好，补偿量由所给公式可以计算。

附录：方向余弦$\overline{S}_l$及$\overline{a}_{l(l+1)}$的计算

当机器人手臂，图1，的诸结构参数及运动参数$S_l$、$a_{l(l+1)}$、$\theta_l$、$\alpha_{l(l+1)}$已知时，固定坐标系如图1选取。在每个构件上置动坐标系，$z$轴与$\overline{S}_l(X_l、Y_l、Z_l)$重合，$x$轴与$\overline{a}_{l(l+1)}(X_{l(l+1)}、Y_{l(l+1)}、Z_{l(l+1)})$重合，则有共原点之旋转矩阵

$$T_l=[\overline{a}_{l(l+1)}\quad \overline{S}_l\times\overline{a}_{l(l+1)}\quad \overline{S}_l]$$

$$=\begin{bmatrix} X_{l(l+1)} & |Y_lZ_{l(l+1)}| & X_l \\ Y_{l(l+1)} & |Z_lX_{l(l+1)}| & Y_l \\ Z_{l(l+1)} & |X_lY_{l(l+1)}| & Z_l \end{bmatrix}$$

式中 $|Y_lZ_{l(l+1)}|=\begin{vmatrix} Y_l & Z_l \\ Y_{l(l+1)} & Z_{l(l+1)} \end{vmatrix}=Y_lZ_{l(l+1)}-Z_lY_{l(l+1)}$

这样，$\overline{S}_1$为(001)，$\overline{a}_{12}$为$(\cos\theta_1\ \sin\theta_1\ 0)$，$\overline{S}_2$及$\overline{a}_{23}$之方向余弦可以计算

$$\overline{S}_2 = [T_1]\begin{Bmatrix} 0 \\ -\sin\alpha_{12} \\ \cos\alpha_{12} \end{Bmatrix}$$

$$\overline{a}_{23} = [T_1]\begin{Bmatrix} \cos\theta_2 \\ \sin\theta_2\ \cos\alpha_{12} \\ \sin\theta_2\ \sin\alpha_{12} \end{Bmatrix}$$

如此推而广之，当已知$\overline{S}_{i-1}$ 及$\overline{a}_{(i-1)\,i}$时可建立旋转矩阵$T_{i-1}$，下一对向量$\overline{S}_i$ 及 $\overline{a}_{i\,(i+1)}$可求

$$\overline{S}_i = [T_{i-1}]\begin{Bmatrix} 0 \\ -\sin\alpha_{(i-1)\,i} \\ \cos\alpha_{(i-1)\,i} \end{Bmatrix}$$

$$\overline{a}_{i\,(i-1)} = [T_{i-1}]\begin{Bmatrix} \cos\theta_i \\ \sin\theta_i\cos\alpha_{(i-1)\,i} \\ \sin\theta_i\sin\alpha_{(i-1)\,i} \end{Bmatrix}$$

## 参 考 文 献


[1] Н.Г.Бруевич; Точность Механизмов, 1946.

[2] 张启先；空间机构分析与综合，华南工学院 1980年

[3] 杨基厚；机构运动学及动力学，东北重机学院 1983年

[4] J.Duffy; Analysis of Mechanisms and Robot Manipulators, 1980

[5] A.Kumar, S.Prakash; "Analysis of Mechanical Errors in Manipulators," Proceeding of Sixth World Congress on Theory of Machines and Mechanisms. 1983.


# The Error Analysis and Error Compensation of Robot Manipulator

Huang Zhen

## Abstraet


An analysis on error and related factors of robot manipulators is presented in this paper. The relations between errors of the end effect of the robot and all original errors are set up. A variety of partial derivative matrix as error transfer functions has been derived, and they can be expressed is a unifying form. The method fo error compensation is then discussed as well in this paper.