

螺旋传动精度分析

王 世 萍

(西北电讯工程学院)

摘要: 本文对传动链中经常遇到的螺旋传动的精度分析进行了研究, 着重分析传动误差(位移误差)和空程误差两项精度指标。采用数理统计原理列出了工程设计上较为实用的统计计算公式。

一、前 言

传动链的传动精度是伺服机械传动设计计算的主要内容。它对伺服控制系统的性能有着不可低估的影响。工程实践表明, 伺服性能的进一步完善, 在很大程度上取决于伺服机械结构, 因此, 必须对伺服传动装置中的传动链进行分析与计算。

螺旋传动在伺服传动装置中经常被采用, 但有关螺旋传动精度分析和计算的文章见到的不多。已有的计算方法比较复杂, 在假定各误差因素的分布曲线条件下, 推导出位移误差和空程误差的适用统计计算公式。只需要将各原始误差的公差值代入公式, 即可求出位移与空程误差的统计值来, 简化了计算工作。

二、螺旋副螺母的位移误差分析与计算

螺旋副的传动精度, 包括螺母的位移误差与空程误差。如图 1 所示的螺旋传动装置是由螺杆 1, 螺母 2, 导架 3 组成的。螺母在导架 3 上移动。下面着重研究螺纹的原始误差对螺旋副传动精度的影响。

对理想螺旋副, 当螺杆转动时, 螺母将随螺杆的转动作直线移动, 如图 2 中曲线 1 所示。

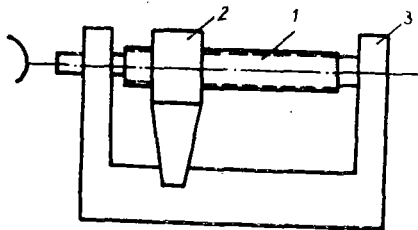


图 1

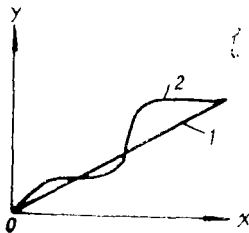


图 2

但是，由于螺杆和螺母存在各种制造误差，使螺旋副在传动中螺母不能沿着理想的曲线 1 运动，螺母的实际运动曲线如图中曲线 2 所示。螺母位移误差，就是螺母实际的运动曲线 2 与理想运动曲线 1 之差。

为了保证螺杆能旋入螺母，螺纹公差规定了螺母中径的下偏差为零，螺杆中径的上偏差为零，误差均以中径补偿值 f_a 给出。因此而产生了螺旋副的轴向间隙。而螺杆制造中的螺距误差和半角误差，对间隙将起减小的作用，即抵消了一部分由于 f_a 所造成的间隙。螺旋副在单方向传动时，间隙不会影响螺母的位移误差，但在反向运动时，间隙造成螺母位移的滞后量。

下面分别讨论各项误差对螺母位移误差的影响。对理想螺旋副，螺杆转动时，螺母的位移可由下式给出，

$$y_0 = \frac{\varphi}{2\pi} \cdot n t_0$$

式中： y_0 ——理想螺旋副中螺母的轴向位移；

t_0 ——理想螺纹的螺距；

φ ——螺杆的转动角度； $\frac{\varphi}{2\pi}$ 为螺杆的转动圈数。

n ——螺纹头数。

实际的螺旋装置，由于存在各种误差，螺母的实际位移 y 是不等于 y_0 的，有 $\Delta y = y - y_0$ 的误差，即为螺旋副的位移误差。

各项原始误差对位移误差的影响有：

1. 螺距误差 Δt

若螺母的轴向位移以螺母移过的螺距数表示时，因 $\frac{\varphi}{2\pi}$ 表示螺杆所转过的圈数，也就是螺母移过的螺距个数，若螺杆转过 k 圈，则

$$y_0 = \sum_{i=0}^k (t_0)_i$$

如果螺杆的螺距误差为 Δt ，则螺母的位移为

$$\begin{aligned} y &= \sum_{i=0}^k (t_0 + \Delta t)_i \\ \Delta y_i &= y - y_0 \\ &= \sum_{i=0}^k (t_0 + \Delta t)_i - \sum_{i=0}^k (t_0)_i \\ &= \sum_{i=0}^k (\Delta t)_i \end{aligned}$$

上式说明，在螺母的移动范围内，螺母的位移误差就是螺杆的螺距累积误差。而螺母的螺距累积误差对位移误差无影响。所以，在设计精密螺旋机构时，主要应对螺杆提出严格的精度要求，而对螺母只取适当的加工精度即可。

2. 中径锥度与椭圆度误差 $\Delta d_2'$

螺纹的中径误差一般不会引起位移误差，但要产生空程误差。在加工过程中，有时会出现中径锥度和椭圆度误差，将该误差折算成螺距的误差 $\Delta t_{d_2'}$ 。

$$\Delta t_{d_2'} = \frac{\Delta d_2'}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

所以

$$\Delta y_{d_2'} = \Delta t_{d_2'} = \frac{\Delta d_2'}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

式中： $\Delta d_2'$ —— 螺纹中径锥度及椭圆度等形状误差，

$\frac{\alpha}{2}$ —— 螺纹牙形半角

$\Delta y_{d_2'}$ —— 由 $\Delta d_2'$ 产生的螺旋副位移误差。

3. 牙形半角误差 $\Delta \frac{\alpha}{2}$

螺纹的牙形半角如果各牙一致，虽然其大小与标准值不同，这时也不引起位移误差。如果各螺纹牙之间的牙形角不一样，将引起误差，计算时也把它换算成影响位移误差的螺距误差 Δt_α 。

由图 3 可得

$$\Delta t_\alpha = f_\alpha \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

式中 f_α —— 牙形半角误差中径补偿值。

$$\text{而 } f_\alpha = \frac{h \cdot \Delta \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}}$$

$$\text{所以 } \Delta t_\alpha = \frac{h \cdot \Delta \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$\Delta y_{\frac{\alpha}{2}} = \Delta t_\alpha = \frac{h \cdot \Delta \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}$$

式中 h —— 螺牙高度 (mm)；

$\Delta \frac{\alpha}{2}$ —— 牙形半角误差，以弧度计。这里 $\Delta \frac{\alpha}{2}$ 指在螺母移动长度内任意两牙之间的牙形半角的最大偏差。

$\Delta y_{\frac{\alpha}{2}}$ —— 由牙形半角误差引起的位移误差。

这样，螺旋副中，由于螺纹的各项原始误差引起的位移误差 Δy 为

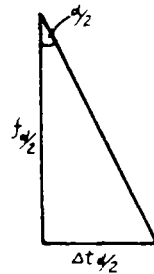


图 3

$$\begin{aligned} \Delta y &= \Delta y_1 + \Delta y_{d_2'} + \Delta y_{\frac{\alpha}{2}} \\ &= \Delta t_x + \frac{\Delta d_2'}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \frac{h \cdot \Delta \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} \end{aligned}$$

在计算位移误差时，只考虑螺杆的误差，因螺母的误差对位移误差无影响，所以不计入。

此外，对螺旋传动装置来说，还应该注意螺杆轴肩或支承架端面与螺杆轴线的不垂直，螺杆轴线与移动件轴线不重合所引起的移动误差，以及由于螺旋机构工作温度与制造温度之差和温度变化而产生的位移误差等。

4. 位移误差的统计计算式

(1) 螺距误差的均值 μ_t 和方差 D_t

设螺距误差（累积误差） Δt_x 按正态分布，如图4所示。则

$$\begin{aligned} \mu_t &= M(\Delta t_x) \\ &= -\frac{\delta t_x}{2} \end{aligned}$$

$$D_t = \sigma_t^2 = \left(\frac{\delta t_x}{6} \right)^2$$

式中， δt_x ——螺杆螺距累积误差的公差；

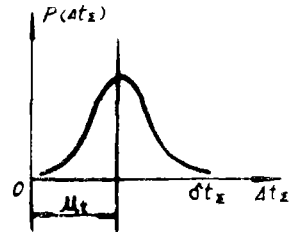


图4

(2) 中径锥度和椭圆度 $\Delta d_2'$ 的均值 $\mu_{d_2'}$ 和方差

$D_{d_2'}$

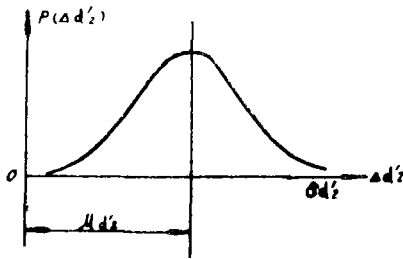


图5

设 $\Delta d_2'$ 分布如图5所示，则

$$\mu_{d_2'} = M(\Delta d_2') = \frac{\delta d_2'}{2}$$

$$D_{d_2'} = \sigma_{d_2'}^2 = \left(\frac{\delta d_2'}{6} \right)^2$$

式中 $\delta d_2'$ ——螺杆中径锥度和椭圆度的公差。

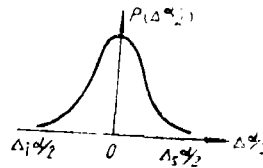


图6

(3) 牙形半角误差 $\Delta \frac{\alpha}{2}$ 的均值 $\mu_{\frac{\alpha}{2}}$ 和方差 $D_{\frac{\alpha}{2}}$ 设牙形半角误差 $\Delta \frac{\alpha}{2}$ 的分布如图6所示，

则
$$\mu_{\frac{\alpha}{2}} = M(\Delta_{\frac{\alpha}{2}}) = 0$$

$$D_{\frac{\alpha}{2}} = \sigma_{\frac{\alpha}{2}}^2 = \left(\frac{\delta_{\frac{\alpha}{2}}}{6}\right)^2 = \left(\frac{\Delta_{i_{\frac{\alpha}{2}}}}{3}\right)^2$$

式中: $\Delta_{i_{\frac{\alpha}{2}}}$ ——牙形半角误差的极限上偏差, 与其极限下偏差 $\Delta_{i_{\frac{\alpha}{2}}}$ 数值相等, 即

$$\left| \Delta_{i_{\frac{\alpha}{2}}} \right| = \left| \Delta_{i_{\frac{\alpha}{2}}} \right|$$

$\delta_{\frac{\alpha}{2}}$ ——牙形半角的公差。

所以, 位移误差的统计计算表达式如下:

$$\begin{aligned} \mu_y &= M(\Delta y) \\ &= M(\Delta y_1) + M(\Delta y_{d_2'}) + M(\Delta y_{\frac{\alpha}{2}}) \\ &= \mu_1 + \frac{1}{2} \mu_{d_2'} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \frac{h}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} \mu_{\frac{\alpha}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \delta t_y + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\delta d_2'}{2} \\ &= 0.5 (\delta t_y + 0.5 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \delta d_2') \\ D_y &= \sigma_y^2 \\ &= D\left(\Delta t_y + \frac{\Delta d_2'}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \frac{h}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} \cdot \Delta_{\frac{\alpha}{2}}\right) \\ &= \left(\frac{\delta t_y}{6}\right)^2 + \frac{1}{4} \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \left(\frac{\delta d_2'}{6}\right)^2 + \frac{h^2}{\cos^4 \frac{\alpha}{2}} \left(\frac{\delta_{\frac{\alpha}{2}}}{6}\right)^2 \end{aligned}$$

所以

$$\Delta y_{\min}^{\max} = \mu_y \pm 3\sigma_y$$

三、螺旋副空程误差的分析与计算

螺旋副的空程误差就是螺杆转动时, 螺母的滞后量。造成空程误差的原因是螺杆和螺母之间的轴向间隙。

引起轴向间隙的因素有

1. 为保证旋入, 在加工中使内螺纹中径尺寸下偏差为0, 外螺纹尺寸的上偏差为0。若以 f_n 与 f_w 分别表示内外螺纹的中径误差, 则螺旋副的径向间隙为 $f_n - f_w$, 是正值。由此引起的轴向间隙如图7所示,

$$j_t = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} (f_n - f_w)$$

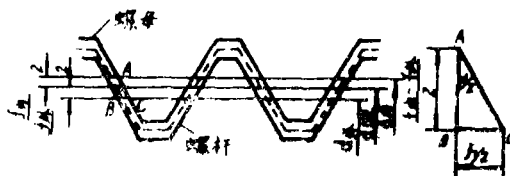


图7 脚标 内— n 外— w

2. 螺距误差

在螺母旋合长度范围内的螺距累积误差将使螺旋副的间隙减小。无论累积误差为正或负，都将使螺旋副轴向间隙减小，其关系式为

$$j_t = |\Delta t'_{\Sigma n} - \Delta t'_{\Sigma w}|$$

式中： $\Delta t'_{\Sigma n}$ ——在螺母旋合长度内螺杆螺距的累积误差；

$\Delta t'_{\Sigma w}$ ——在螺母旋合长度内，螺母螺距累积误差。

3. 半角误差 $\Delta \frac{\alpha}{2}$

无论半角误差为正或负，都将使螺旋副的轴向间隙减小，其减小量为

$$j_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{h \Delta \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}$$

当螺母和螺杆都有牙形半角误差时，并考虑到内外螺纹左右半角误差的影响，取绝对值，由此引起的轴向间隙减小值由下式给出

$$j_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{h}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} \left[\left| \Delta \frac{\alpha}{2}^n - \Delta \frac{\alpha}{2}^w \right| + \left| \Delta \frac{\alpha}{2}^{\prime n} - \Delta \frac{\alpha}{2}^{\prime w} \right| \right]$$

式中： $\Delta \frac{\alpha}{2}^n$ ， $\Delta \frac{\alpha}{2}^{\prime n}$ ——螺母左右牙形半角误差；

$\Delta \frac{\alpha}{2}^w$ ， $\Delta \frac{\alpha}{2}^{\prime w}$ ——螺杆左右牙形半角误差；

h ——牙顶高度。

因此，螺旋副的轴向间隙可近似地用下式给出：

$$\begin{aligned} j &= j_t - j_t - j_{\frac{\alpha}{2}} \\ &= \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} (f_n - f_w) - |\Delta t'_{\Sigma n} - \Delta t'_{\Sigma w}| - \frac{h}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} \left[\left| \Delta \frac{\alpha}{2}^n - \Delta \frac{\alpha}{2}^w \right| + \left| \Delta \frac{\alpha}{2}^{\prime n} - \Delta \frac{\alpha}{2}^{\prime w} \right| \right] \end{aligned}$$

4. 空程误差的统计计算式

(1) 中径误差 f ，其均值 μ_f 和方差 D_f

设中径误差按正态分布，如图8所示。左图为螺母中径误差的分布，右图为螺杆中径误差的分布，则

$$\mu_{f_n} = \frac{\delta_{f_n}}{2}$$

$$D_{f_n} = \left(\frac{\delta_{f_n}}{6}\right)^2$$

$$\mu_{f_w} = \frac{-\delta_{f_w}}{2}$$

$$D_{f_w} = \left(\frac{\delta_{f_w}}{6}\right)^2$$

式中： $\delta_{f_n}, \delta_{f_w}$ ——螺母螺杆中径误差的公差；

$$\mu_f = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} (\mu_{f_n} - \mu_{f_w})$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} (\delta_{f_n} - \delta_{f_w})$$

$$D_f = (\sigma_f)^2 = \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \left[\left(\frac{\delta_{f_n}}{6}\right)^2 + \left(\frac{\delta_{f_w}}{6}\right)^2 \right]$$

(2) 在旋合范围内螺距累积误差的均值 μ_i' 和方差 D_i' 。

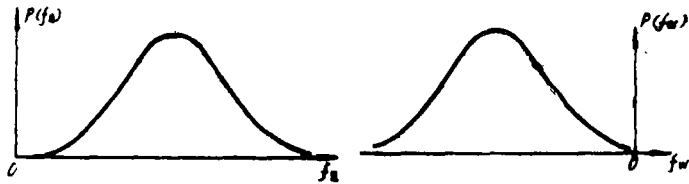


图 8

根据随机变量的绝对值 $|\xi|$ 的平均值与该量方差有下列关系

$$M|\xi| = \sqrt{\frac{2}{\pi} D(\xi)}$$

随机变量的绝对值 $|\xi|$ 的方差与该量方差有下列关系

$$D|\xi| = \frac{\pi - 2}{\pi} D(\xi)$$

所以

$$\begin{aligned} \mu_i' &= \sqrt{\frac{2}{\pi} D(\Delta f'_{z_n} - \Delta f'_{z_w})} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi} [D(\Delta f'_{z_n}) + D(\Delta f'_{z_w})]} \end{aligned}$$

若假定 $\Delta f'_{z_n}$ 与 $\Delta f'_{z_w}$ 都呈正态分布,则上式写成:

$$\begin{aligned} \mu_i' &= \sqrt{\frac{2}{\pi} \left[\left(\frac{\delta'_{f_{z_n}}}{6}\right)^2 + \left(\frac{\delta'_{f_{z_w}}}{6}\right)^2 \right]} \\ &= \frac{1}{6} \sqrt{\frac{2}{\pi} [(\delta'_{f_{z_n}})^2 + (\delta'_{f_{z_w}})^2]} \end{aligned}$$

其方差

$$\begin{aligned} D_{t'} &= \frac{\pi - 2}{\pi} D(\Delta t'_{\Sigma n} - \Delta t'_{\Sigma w}) \\ &= \frac{\pi - 2}{\pi} [D(\Delta t'_{\Sigma n}) + D(\Delta t'_{\Sigma w})] \\ &= \frac{\pi - 2}{36\pi} [(\delta t'_{\Sigma n})^2 + (\delta t'_{\Sigma w})^2] \end{aligned}$$

式中 $\delta t'_{\Sigma n}$ —— 螺母的螺距累积误差之公差，

$\delta t'_{\Sigma w}$ —— 螺杆在旋合长度范围内螺距累积误差之公差。

(3) 牙形半角误差 $\Delta \frac{\alpha}{2}$ 引起的间隙，之均值 $\mu_{\alpha/2}$ 和方差 $D_{\alpha/2}$ 与螺距误差引起的间隙分析相同，

$$\begin{aligned} \mu_{\alpha/2} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} D \left[\left(\Delta \frac{\alpha_n}{2} - \Delta \frac{\alpha_w}{2} \right) + \left(\Delta \frac{\alpha'_n}{2} - \frac{\alpha_w}{2} \right) \right] \frac{h^2}{\cos^4 \frac{\alpha}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{2h^2}{\pi} \cos^4 \frac{\alpha}{2} \left[D \left(\Delta \frac{\alpha_n}{2} \right) + D \left(\Delta \frac{\alpha_w}{2} \right) + D \left(\Delta \frac{\alpha'_n}{2} \right) + D \left(\Delta \frac{\alpha'_w}{2} \right) \right]} \end{aligned}$$

当半角误差以 0 为对称轴正态分布时，上式可写成：

$$\mu_{\alpha/2} = \sqrt{\frac{2h^2}{\pi} \cos^4 \frac{\alpha}{2} \left[\left(\frac{\Delta \frac{\alpha_n}{2}}{3} \right)^2 + \left(\frac{\Delta \frac{\alpha_w}{2}}{3} \right)^2 + \left(\frac{\Delta \frac{\alpha'_n}{2}}{3} \right)^2 + \left(\frac{\Delta \frac{\alpha'_w}{2}}{3} \right)^2 \right]}$$

一般情况下，左右半角公差相等，这时

$$\mu_{\alpha/2} = \frac{2h}{3 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} \sqrt{\left(\Delta \frac{\alpha_n}{2} \right)^2 + \left(\Delta \frac{\alpha_w}{2} \right)^2}$$

其方差为

$$\begin{aligned} D_{\alpha/2} &= \frac{\pi - 2}{\pi} \left[2 \left(\frac{\Delta \frac{\alpha_n}{2}}{3} \right)^2 + 2 \left(\frac{\Delta \frac{\alpha_w}{2}}{3} \right)^2 \right] \frac{h^2}{\cos^4 \frac{\alpha}{2}} \\ &= \frac{2(\pi - 2)}{9\pi} \left[\left(\Delta \frac{\alpha_n}{2} \right)^2 + \left(\Delta \frac{\alpha_w}{2} \right)^2 \right] \frac{h^2}{\cos^4 \frac{\alpha}{2}} \end{aligned}$$

(4) 空程误差的统计计算

$$\begin{aligned} \mu_j &= M(j) = \mu_f - \mu_v - \mu_{\alpha/2} \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} (\delta f_n - \delta f_w) - \frac{1}{6} \sqrt{\frac{2}{\pi} [(\delta t'_{\Sigma n})^2 + (\delta t'_{\Sigma w})^2]} \\ &\quad - \frac{2h}{3 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} \sqrt{\left(\Delta \frac{\alpha_n}{2} \right)^2 + \left(\Delta \frac{\alpha_w}{2} \right)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_j &= D_f + D_v + D_{\alpha/2} \\
 &= \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \left[\left(\frac{\delta_{f_n}}{6} \right)^2 + \left(\frac{\delta_{f_w}}{6} \right)^2 \right] + \frac{\pi-2}{36\pi} [(\delta t'_{z_n})^2 + (\delta t'_{z_w})^2] + \frac{2(\pi-2)}{9\pi} \left[\left(\Delta_{\frac{\alpha_n}{2}} \right)^2 \right. \\
 &\quad \left. + \left(\Delta_{\frac{\alpha_w}{2}} \right)^2 \right] \frac{h^2}{\cos^4 \frac{\alpha}{2}}
 \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
 \sigma_j &= \sqrt{D_j} \\
 &= \frac{1}{6} \sqrt{\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} [(\delta_{f_n})^2 + (\delta_{f_w})^2] + \frac{\pi-2}{\pi} [(\delta t'_{z_n})^2 + (\delta t'_{z_w})^2] + 8 \frac{\pi-2}{\pi} \left[\left(\Delta_{\frac{\alpha_n}{2}} \right)^2 \right.} \\
 &\quad \left. + \left(\Delta_{\frac{\alpha_w}{2}} \right)^2 \right] \frac{h^2}{\cos^4 \frac{\alpha}{2}}} \\
 &= \frac{1}{6} \sqrt{0.0718 [(\delta_{f_n})^2 + (\delta_{f_w})^2] + 0.363 [(\delta t'_{z_n})^2 + (\delta t'_{z_w})^2] + 3.33 \left[\left(\Delta_{\frac{\alpha_n}{2}} \right)^2 \right.} \\
 &\quad \left. + \left(\Delta_{\frac{\alpha_w}{2}} \right)^2 \right] h^2}
 \end{aligned}$$

所以 $j_{\text{min}}^{\text{min}} = \mu_j \pm \sigma_j$

这是实用的计算式。

四、结束语

本文是在对各误差来源及其概率分布作了一定假设的情况下，推导出计算式的，所有这些还有待于通过实际测量和工程实践来验证。

参 考 文 献

- [1] 毛英泰,《误差理论与精度分析》,国防工业出版社,1982。
- [2] G.W.Michalec (楠波、成电合译),《精密齿轮传动装置——理论与实践》,国防工业出版社,1978。
- [3] 龚振邦、陈守春,《伺服机械传动装置》,国防工业出版社,1980。

Accuracy Analysis of Screw Transmission

Wang Shiping

Abstract

This paper describes the transmission error and backlash of screw train. It deals with the errors contributed to transmission by using mathematical statistics. And formulae of mathematical statistics have been given.