

光学玻璃退火应力生成的 计算机辅助分析

李 放

摘要：本文提出了一个以有限元法为基础的光学玻璃退火应力计算模型。可以在微机上预测一定退火规程和工艺条件所确定的暂时应力和退火后的永久应力。最后按三维应力状态计算第二类光学均匀性和应力双折射。

一、引 言

经过精密退火的光学玻璃的残余应力对光学均匀性产生的影响，比玻璃的结构转化效应大几倍，此外，边缘部分的应力双折射值也是评价退火质量的主要技术指标。为此，至今人们仍在通过退火实验寻求消除内应力的各种途径。但是，由于实验周期太长；并且影响退火质量的因素难于从工程上的许多不确定因素中识别出来，因此，理论计算是十分有效的分析和预测手段，其中Е.Э. Данюшевский 1959年的专著^[1]是目前退火理论计算方法的主要依据。事实上，由于当时求解温度场和应力场微分方程的困难，以致把圆盘玻璃分成无限薄板和无限长圆柱两个一维问题分别求解，显然这种对空间问题的处理过于粗糙，同时参数繁多，需专门的实验来确定，而使其实用性成为问题。

随着对光学仪器性能的要求的提高，对制造光学元件的玻璃的技术指标也相应提高了要求。为了准确分析一定退火规程和工艺条件，对光学均匀性（第二类）及应力双折射的影响，从而为工程决策提供各种方案，本文提出了其中包括有限元法求解温度场和位移场在内的一个退火时应力生成过程的数学模型，通过它在微计算机上计算出退火中的暂时应力及退火后的永久应力。为了与工程结果校核，文中按三维应力状态下的Maxwell方程计算光学均匀性（第二类）及应力双折射。

二、建立数学模型

玻璃在退火温度范围的粘弹性决定了它在室温下的残余内应力，除加压退火表面力可起显著作用外，玻璃中的应力主要是退火降温中的热弹性应力松弛的结果。即持续不断产生的热弹性应力，一部分在粘性流动中发热耗损，另一部分是尚未耗损的平衡应力系即通称暂时应力。显然，理想弹性体的热弹性位移势保证了一旦温度均匀热应力随即消失。由于玻璃内的热弹性位移势的热损失，导致温度均一再不能建立起原来的平衡，在建立新平衡中的补

充应力系即残余应力或称永久应力。因此积累全部粘性耗损的应力就等于退火后的残余应力，只是符号相反。

为了在计算机上模拟上述的应力形成过程，把实际退火的连续降温过程用多阶段的温度跌落逼近，每一次温度跌落的初始应力响应按热弹性的计算，随后为等温应力松弛过程并持续到下次的温度跌落开始。只要这样的阶段分得足够多，其间的误差会充分小。其计算模型的框图如图1所示。

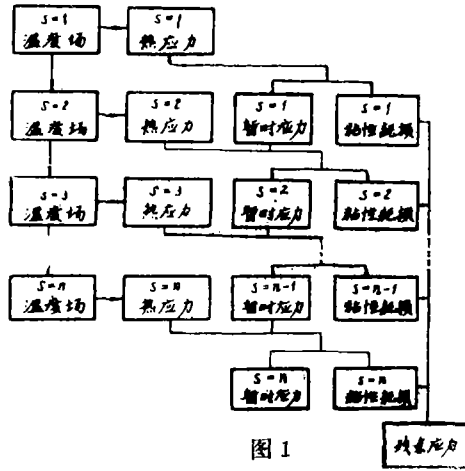


图 1

三、计算方法

1. 温度场有限元分析

参阅文献^[2]。

2. 初始响应：热弹性应力的有限元分析

用有限元法得到退火降温中各时段温度分布后，可以继续用有限元法求解瞬时响应的热弹性应力。为此，需要求解有限元法给出的线性代数方程组(1)，而得到作为基本未知量的结点位移 $\{q\}$ ^[3]。

$$[K]_{2n \times 2n} \{q\}_{2n} = \{P_e\} + \{P_i\} + \{P_s\} + \{P_b\} \quad (1)$$

其中： $[K]$ — $2n \times 2n$ 阶的总刚度矩阵， n 为结点总数；

$\{q\}$ — $2n$ 分量的结点位移向量；

$\{P_e\}$ 、 $\{P_i\}$ 、 $\{P_s\}$ 、 $\{P_b\}$ 依次为集中力、初应变、表面力、体积力引起的等效结点力向量。

然后逐单元进行如下计算，通过几何方程 $\{\epsilon\}^e = [B]\{q\}^e$ 得到单元 e ($e = 1, 2, \dots, n$)形心处的应变；接着通过方程 $\{\sigma\}^e = [D]\{\epsilon\}^e$ 得到单元 e 形心处的应力状态。在圆柱坐标(大尺寸玻璃一般为圆盘形状)下，一点的热弹性应力状态表示成

$$\begin{pmatrix} \sigma_{rr} & 0 & \sigma_{rz} \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ \sigma_{rz} & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad \text{或} \quad \begin{pmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{rz} \end{pmatrix}$$

3. 应力松弛：暂时应力和永久应力

在退火降温过程不断产生的热弹性应力，由于玻璃体内的粘性流动而发生松弛。按图1所示计算模型，逐时段*i* (*i* = 1, 2, …, *s*, *s*为时段总数) 计算玻璃内的平衡应力(暂时应力)；而且，在每一时段*i*要逐单元计算其在形心处的值

$$\begin{pmatrix} s_{rr} \\ s_{\theta\theta} \\ s_{zz} \\ s_{rz} \end{pmatrix}_i = \begin{pmatrix} s_{rr} \\ s_{\theta\theta} \\ s_{zz} \\ s_{rz} \end{pmatrix}_{i-1} + \begin{pmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{rz} \end{pmatrix}_i e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^b} \quad (2)$$

在同一时段，同一单元应力的粘性耗损

$$\begin{pmatrix} \tau_{rr} \\ \tau_{\theta\theta} \\ \tau_{zz} \\ \tau_{rz} \end{pmatrix}_i = \begin{pmatrix} s_{rr} \\ s_{\theta\theta} \\ s_{zz} \\ s_{rz} \end{pmatrix}_i - \begin{pmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{rz} \end{pmatrix}_i \left(1 - e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^b}\right) \quad (3)$$

其中 $\exp\left(-\left(\frac{t}{\tau}\right)^b\right)$ 为松弛因子， $b = 0.5 \sim 1.0$ 可由实验确定。 t 为*i*时段步长， τ 为松弛时间，可由式(4)和(5)求出

$$\tau = \tau_0 \exp \frac{H}{R} \left(\frac{Y}{T} + \frac{1-Y}{T_f} \right) \quad (4)$$

$$\frac{T_f - T}{T_0 - T} = \exp \left[-\left(\frac{t}{\tau}\right)^b \right] \quad (5)$$

式中： H 为活化能，气体常数 $R = 8.312 \text{ J/(mol} \cdot \text{K)}$ ， $Y = H_g/H$ ， H_g 为结构冻结时的活化能， T_f 为虚设温度， T 取绝对温标； τ_0 由实验确定。例如测得 T_g 温度下的松弛时间 τ_g ，则 $\tau_0 = \tau_g \exp\left(-\frac{H}{R} - \frac{1}{T_g}\right)$ 。在微机上用迭代法求解(4)和(5)的联立方程，收敛特性良好。

如图1的计算模型所示，只要把各时段的粘性应力耗损积累起来，取反号后，即为退火后的残余应力。

四、光学均匀性及应力双折射的预测

在得到退火玻璃的残余应力分布的计算结果后，只要借助Maxwell方程(6)，便可获得折射率的分布

$$\begin{aligned} n_1 - n_0 &= A\tau_1 + B(\tau_2 + \tau_3) \\ n_2 - n_0 &= A\tau_2 + B(\tau_3 + \tau_1) \\ n_3 - n_0 &= A\tau_3 + B(\tau_1 + \tau_2) \end{aligned} \quad (6)$$

其中： n_0 为无应力时的折射率； τ_1, τ_2, τ_3 是考查方向的次主应力^[4]， n_1, n_2, n_3 表示偏振方向分别平行于 τ_1, τ_2, τ_3 方向的透射光的折射率。在通常沿轴向入射的径向振动的平面偏振光，检测圆盘形状玻璃时，取 $\tau_1 = \tau_r, \tau_2 = \tau_\theta, \tau_3 = \tau_z$ (当按平面应力问题处理时，便忽略了 τ_3)。

把式(6)中的每二式相减，可得计算双折射值的表达式

$$\begin{aligned} n_1 - n_2 &= (A - B)(\tau_1 - \tau_2) \\ n_2 - n_3 &= (A - B)(\tau_2 - \tau_3) \\ n_3 - n_1 &= (A - B)(\tau_3 - \tau_1) \end{aligned} \quad (7)$$

设 $C = A - B$ 称为相对应力光学系数， A 和 B 定义为绝对应力光学系数。由于残余应力在各单元形心处的值，可以按前面陈述的有限元法求得，双折射在各单元形心处的值就可以通过式 (7) 算出。

五、计算实例

尺寸及有限元剖分如图 2 的圆盘形 K_9 玻璃。以 $0.20^\circ\text{C}/\text{h}$ 的制度退火，规程如图 3 所示，

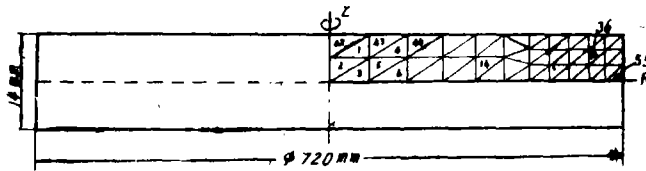


图 2

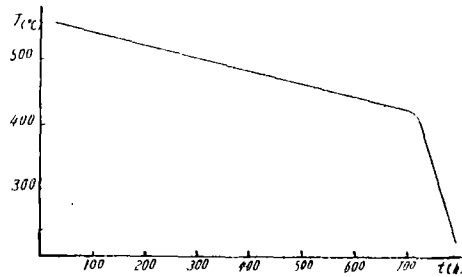


图 3

示，工艺条件同^[2]。选择单元 14 和单元 36 形心处的暂时应力 $s_{rr}, s_{\theta\theta}$ 的发展示于图 4，以及永久应力 $\tau_{rr}, \tau_{\theta\theta}$ 的积累过程示于图 5。

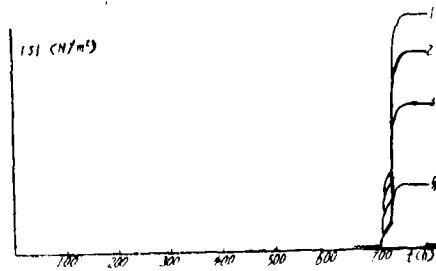


图 4

$$\begin{aligned} 1 - s_{\theta\theta} (E = 36) &= 1058735 & 2 - s_{rr} (E = 14) &= -880243 \\ 3 - s_{\theta\theta} (E = 14) &= -640283 & 4 - s_{rr} (E = 36) &= -282152 \end{aligned}$$

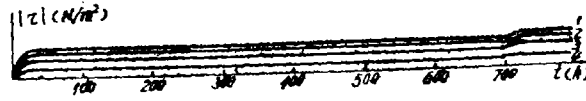


图 5

- 1-- $\tau_{\theta\theta}(E=36) = -115962$ 2-- $\tau_{rr}(E=14) = 99482$
 3-- $\tau_{\theta\theta}(E=14) = 73529$ 4-- $\tau_{rr}(E=36) = 31703$

各单元形心处的残余应力 $\tau_{rr}, \tau_{\theta\theta}, \tau_{zz}, \tau_{rz}$ 示于表1的第6、7、8、9列，单位为 N/m^2 。

表 1

E	N1	N2	01	02	τ_{rr}	$\tau_{\theta\theta}$	τ_{zz}	τ_{rz}
1	-2.072E-07	-2.219E-07	0.147	2.837	-14362	-19168	73545	-8765
2	-4.806E-07	-4.806E-07	0.000	3.911	109168	109168	-18655	-766
3	-1.119E-06	-1.130E-06	0.106	4.092	184496	181002	47249	-4367
4	-2.184E-07	-2.373E-07	0.189	2.567	-7991	-14179	69718	-4885
5	-4.096E-07	-4.194E-07	0.097	4.067	106544	103355	-29577	-442
6	-1.018E-06	-1.023E-06	0.042	3.877	168528	167134	40433	-4534
7	-1.801E-07	-2.068E-07	0.267	2.492	-8825	-17551	63901	-4588
8	-3.777E-07	-3.996E-07	0.218	3.862	103612	96463	-29768	560
9	-9.521E-07	-9.695E-07	0.174	3.582	160809	155109	38047	-4758
10	-1.313E-07	-1.755E-07	0.441	2.570	-10202	-24637	59380	-3463
11	-3.246E-07	-3.664E-07	0.417	3.597	99741	86095	-31459	2201
12	-8.762E-07	-9.175E-07	0.413	3.243	154569	141055	35066	-5669
13	4.432E-08	-3.696E-08	0.812	2.145	-12372	-38940	31168	-4599
14	-2.634E-07	-3.428E-07	0.794	3.284	99481	73528	-33823	6010
15	-7.948E-07	-8.650E-07	0.701	2.734	146692	123760	34389	-5267
16	4.647E-07	3.539E-07	1.108	2.058	-48331	-84551	-17276	-807
17	-2.060E-07	-3.060E-07	1.000	0.322	46821	14125	24669	8724
18	-3.673E-07	-4.904E-07	1.230	2.805	116509	76296	-15383	2136
19	-7.975E-07	-9.024E-07	1.049	2.424	152582	118280	39039	-3340
20	3.449E-07	1.946E-07	1.502	5.149	-68714	-117820	50456	1262
21	2.253E-07	7.711E-08	1.482	0.243	14977	-33475	-25509	20118
22	-3.141E-07	-4.503E-07	1.362	1.066	58313	13776	48631	9571
23	-3.276E-07	-4.659E-07	1.383	2.497	112140	66943	-14663	20915
24	-7.198E-07	-8.400E-07	1.202	1.309	132355	93066	50275	-1505
25	4.313E-07	2.056E-07	2.257	5.584	-62534	-136298	46207	9814
26	2.780E-07	5.055E-08	2.275	0.971	21682	-52667	-20905	26397
27	-1.941E-07	-3.772E-07	1.830	1.963	45800	-14023	50158	20098
28	-2.506E-07	-4.588E-07	1.881	1.395	102229	40742	-4858	25649
29	-5.792E-07	-7.251E-07	1.459	0.057	106324	58639	56751	3617
30	5.662E-07	2.412E-07	3.249	6.081	-55602	-161807	36930	22874
31	3.789E-07	4.605E-08	3.328	1.818	29001	-79775	-20346	35341
32	2.070E-08	-2.275E-07	2.482	2.940	27151	-53976	42114	35497
33	-7.940E-08	-3.377E-07	2.583	0.178	86278	1857	-3965	30355
34	-2.861E-07	-4.826E-07	1.965	1.139	71709	7484	44719	11369
35	7.165E-07	2.781E-07	4.384	6.665	-47503	-190776	27033	32396
36	5.465E-07	9.465E-08	4.518	2.755	31703	-115961	-25912	39173
37	3.712E-07	4.056E-08	3.307	3.553	4020	-104059	12052	44208
38	2.128E-07	-1.319E-07	3.447	0.990	62576	-50089	-17721	27836
39	2.905E-07	-8.581E-08	2.863	1.626	37716	-55874	-2715	17238
40	8.293E-07	2.325E-07	5.967	3.319	34789	-160216	-51743	22957
41	6.915E-07	2.258E-07	4.657	1.441	39027	-113184	-66081	7212
42	7.528E-07	7.528E-07	0.000	4.117	-141814	-141814	-7254	-12090
43	8.502E-07	8.226E-07	0.276	2.781	-125005	-134033	-43119	-5363
44	8.732E-07	8.417E-07	0.314	2.524	-122651	-132937	-50434	-3309
45	9.112E-07	8.630E-07	0.482	2.441	-120713	-136474	-56696	-393
46	9.590E-07	9.002E-07	0.587	2.516	-123955	-143151	-60910	-3021
47	8.912E-07	8.468E-07	0.443	5.399	-162620	-177120	-661	18785
48	9.464E-07	7.931E-07	1.532	5.322	-135884	-185959	-12031	1446
49	1.090E-06	8.378E-07	2.530	5.047	-118636	-201339	-36394	14771
50	1.112E-06	7.187E-07	3.939	5.419	-85479	-214236	-37130	21358
51	1.130E-06	5.524E-07	5.783	5.864	-40360	-229369	-37709	25827
52	1.217E-06	4.857E-07	7.320	6.393	-12863	-252100	-43161	6911
53	1.014E-06	4.389E-07	5.753	6.862	-43036	-231052	-6791	21673
54	9.192E-07	4.734E-07	4.458	3.586	-22726	-168413	-51201	41524
55	9.622E-07	5.041E-07	4.580	0.977	14060	-135644	-103709	17268

沿轴向入射偏振光检测圆盘玻璃, 相对无应力时的折射率改变值用 N_1 和 N_2 表示, 其中 N_1 为沿径向振动的偏振光的理论检测值; N_2 为沿环向振动的偏振光的理论检测值。可以用它们中间的最大差值表示第二类光学不均匀性。

双折射值的分布用 D_1 和 D_2 表示, 其中 D_1 表示沿轴向检测的理论值; D_2 表示沿径向检测的理论值。常用边缘处的 D_1 值作为应力指标。 D_1 和 D_2 的单位为 $\mu\text{m}/\text{cm}$ 。

六、结 论

通过本文提出的退火应力计算模型以及相应的计算方法, 可以实现光学玻璃退火过程第二类光学均匀性和应力双折射的预测, 以及对工程退火实验结果进行校核。

参 考 文 献

- [1] Е.Э. Даниюшевский; «光学玻璃线性退火原理», 国防工业出版社, 1965.
- [2] 李放; 光学玻璃精密退火的温度场问题有限元法分析, 光学机械, 1986, 5, 12
- [3] S. S. Rao; «The Finit Element Method in Engineering» Pergamon Press, Oxford, 1982, 269
- [4] 张如一、陆耀楨; «实验应力分析», 机械工业出版社, 1981, 255

A Computer Aided Analysis of the Stresses Formation During Annealing of Optical Glass

Li Fang

Abstract

In this paper a mathematical model based on finite element method for calculating stresses in optical glass during its annealing under various technical conditions with microcomputer is introduced. Finally, the inhomogeneity of refractive index and birefringence caused by the stress are calculated according to stress states of optical glass in three dimensions.