

# 表面节流静压气体止推轴承 的有限元计算方法

张凤仪 史小文 刘育华 刘 瞰

(哈尔滨工业大学自动飞行动力学研究室)

**摘要:** 本文利用精确的数值计算方法—有限元法, 对表面节流静压气体止推轴承进行计算。得出不同间隙下气膜的压力分布曲线、承载能力和刚度。

## 一、前 言

表面节流是间隙节流的一种。表面节流轴承有以下特征:

(1) 它是把以往供气孔内设置的节流机构嵌入轴承表面, 去除了加工微小供气孔这一工艺难点。

(2) 为了发挥表面节流机构的特征, 必须选取小的轴承间隙, 且控制在数  $10\mu\text{m}$  内, 这与通常供气孔形式的轴承相比其间隙要小。

(3) 就轴承流量讲, 由于减小了轴承间隙, 而使流量减少。

(4) 与浅槽轴承相比, 间隙内容量小。可以确保气流冲击的稳定余量。

图1所示模型是表面节流静压气体止推轴承(另一轴承副未示出)。轴承表面设计成许多放射状细沟槽, 由中间孔进气, 在进气孔出口设置特别的流体阻力, 设计成一组浅沟槽, 利用沟槽及其外侧凸缘的不同间隙, 伴随轴承间隙的变化而产生流体阻力的变化, 得出不同间隙下气膜的压力分布曲线、承载能力和刚度。

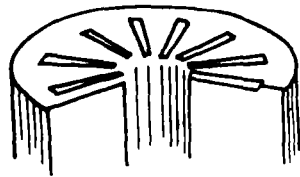


图1 表面节流静压气体止推轴承

## 二、主要符号

$A$ : 表面节流颈部面积

$H$ : 无因次间隙 ( $h/h_0 = H$ )

$h$ : 气膜厚度

$h_{00}$ : 沟槽深

$h_0$ : 平均工作间隙

$m$ : 质量流量

$P$ : 无因次压力 ( $p/p_0 = P$ )

$p_0$ : 环境压力

$p$ : 气膜任意点压力

- $p_0$ : 给气压力
- $r_s, r_0$ : 表面节流静压气体止推轴承的内圆及外圆半径
- $r_1$ : 沟槽端部半径
- $R$ : 无因次半径坐标 ( $r/r_0 = R$ )
- $\gamma$ : 圆周方向沟槽的占有率
- $\theta_0$ : 一对沟槽及凸缘中心角的1/2
- $\theta$ : 角度坐标
- $k$ : 绝热指数
- $\mu$ : 粘性系数
- $\rho$ : 密度
- $\psi$ : 流量函数
- $\phi$ : 流量修正系数
- $f = P^2$ : 无因次压力函数
- $f_0 = p^2$ : 压力函数
- $W$ : 无因次承载能力
- $w$ : 承载能力
- $K$ : 刚度
- $n_1$ : 所设沟槽总数

### 三、表面节流静压气体止推轴承的有限元法

#### (一) 基本方程式

图 2 所示为一圆盘止推轴承坐标系，气膜垂直方向为  $y$ ，其它二轴为极坐标  $r$  和  $\theta$ ，可以得到如下方程式<sup>(1)</sup>

运动方程式

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \eta \frac{\partial^2 v_r}{\partial y^2} \quad (1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} = r\eta \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial y^2} \quad (2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

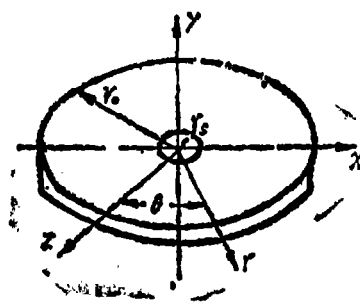


图 2

其中： $v_r$ 和 $v_\theta$ 为 $r$ 向和 $\theta$ 向的速度。

连续方程式

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \int_0^h r \rho v_r dy \right) + \frac{1}{r \partial \theta} \left( \int_0^h \rho v_\theta dy \right) = \rho \tilde{v} \delta_i \quad (4)$$

等式右端是经由节流边单位面积流出的质量流量， $\tilde{v}$ 是节流边出口的平均气流速度， $\delta_i$ 是考虑流场各点有无节流边的因子，因此其值为：

$$\delta_i = \begin{cases} 0 & (\text{在无节流边处}) \\ 1 & (\text{在有节流边处}) \end{cases}$$

状态方程式

$$\frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0} \quad (5)$$

流过节流面积  $A$  的质量流量

$$m = \phi A p_0 \sqrt{\frac{2\rho_0}{p_0}} \psi \quad (6)$$

其中:

$$\psi = \begin{cases} \left[ \frac{k}{2} \left( \frac{2}{k+1} \right)^{(k+1)/(k-2)} \right]^{1/2} & \text{当 } \frac{p_a}{p_0} \leq \beta_k \\ \left\{ \frac{k}{k-1} \left[ \left( \frac{p_a}{p_0} \right)^{1/k} - \left( \frac{p_a}{p_0} \right)^{(k+1)/k} \right] \right\}^{1/2} & \text{当 } \frac{p_a}{p_0} > \beta_k \end{cases} \quad (7)$$

而 
$$\beta_k = \left( \frac{2}{k+1} \right)^{k/(k-1)} \quad (8)$$

(1) 至 (6) 各式, 即为我们所需要的全部方程, 根据如上方程, 分别解出  $v_\theta$  和  $v_r$ , 将  $v_r$ 、 $v_\theta$  及状态方程代入连续方程式积分, 其边界条件为  $y=0$  和  $y=h$  处,  $v_r = v_\theta = 0$ , 这样可得如下雷诺方程

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( h^3 r \frac{\partial f_0}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{r^2 \partial \theta} \left( h^3 \frac{\partial f_0}{\partial \theta} \right) + q \delta_i = 0 \quad (9)$$

其中:  $f_0 = p^2$ , 且设气体轴承转数很慢或静止不动。为了计算方便将上式无因次化, 令

$$r = r_0 R, \quad p = p_0 P, \quad h = h_0 H, \quad f = P^2$$

则上述雷诺方程的无因次式为:

$$\frac{\partial}{R \partial R} \left( H^3 R \frac{\partial f}{\partial R} \right) + \frac{\partial}{R^2 \partial \theta} \left( H^3 \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + Q \delta_i = 0 \quad (10)$$

将 (10) 式变换成与笛卡儿坐标系中的雷诺方程式相似, 令

$$\xi = \ln R \quad \text{则} \quad d\xi = \frac{dR}{R}$$

代入 (10) 式得:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( H^3 \frac{\partial f}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( H^3 \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + R^2 Q \delta_i = 0 \quad (11)$$

其中:

$$Q = \frac{r_0 24 \eta r_0^2 p_0}{h_0^3 p_0^2 \rho_0} \rho_0 \tilde{v} \quad \text{此项表示流量源}$$

(11) 式是气体压力分布的表达式, 是本文处理的对象。

至此, 整个问题转化为求解 (11) 式, 并应满足 (6) 式所限定的节流边质量流量条件和满足三类边界条件, 如图 3 所示。

(1) 在气体排入周围环境的边界  $S_1$  上

$$p = p_0 \quad (12)$$

(2) 在对称界面 $S_s$ 上, 压力沿法向的梯度为零。

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0, \text{ 或 } \frac{\partial p^2}{\partial n} = 0 \quad (13)$$

(3) 在节流边边缘 $S_a$ 上

$$p = p_a \quad (14)$$

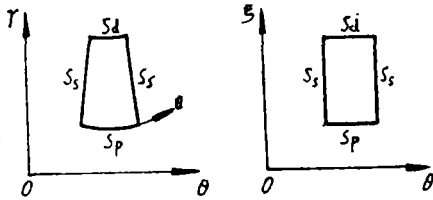


图 3

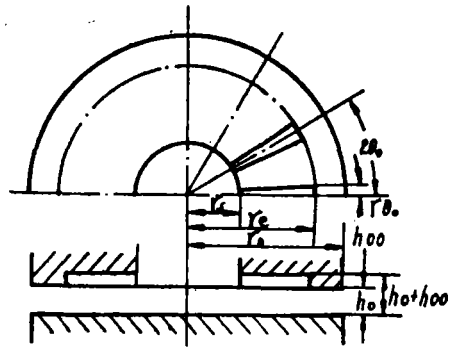


图 4

为便于应用有限元法做精确的数值计算, 先用变分法进行变换, 对 (11) 式取泛函

$$\Phi = \int_{\Omega} \left\{ \frac{H^3}{2} \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial \zeta} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial \theta} \right)^2 \right] - Qf\delta_i \right\} d\zeta d\theta \quad (15)$$

$\Omega$ 为所研究的气膜面积。

已证得, 满足边界条件 (12) 和 (14) 的压力分布函数 $f = f(\zeta, \theta)$ , 如能使泛函 (15) 取极值, 就是 (9) 式的解, 此时对称边界条件 (14) 将自动满足。

### (二) 有限单元解法

本文分析的轴承如图 4。计算域如图 6。将所研究的  $\Omega$  域 (气膜) 划分为一定数量的有限单元体。本文采用相等的三角形单元体, 三角形三个顶点为该单元体节点, 节点共有三类: 在大气边界  $S_a$  上的节点称边界节点, 处于节流边边界  $S_s$  上的节点称节流边节点, 其余节点包括对称边界  $S_s$  上的节点称内部节点。有限单元体也分为相同的三类: 边界单元体、节流边单元体和内部单元体。

对全部节点和单元体进行编号, 见图 7。编号时要有一定规律, 自左向右, 自上而下统一编号。有限单元体的编号顺序, 最好与节点的编号顺序相同, 也是自左向右, 自上而下统一编号。由于所研究的表面节流静压气体止推轴承上的沟槽是均匀分布的, 沿轴向具有对称性, 因此, 计算时可取整个圆盘的  $1/2n1$  作为计算的对象, 见图 6。

内部和节流边节点的压力函数  $f$  为未知量, 设单元体上的压力函数  $f$  为线性分布, 即:

$$f = A_0 + B_0\theta + C_0\zeta \quad (17)$$

图 5, 第 (e) 个有限单元体, 节点编号按逆时针方向排列为  $i, j, m$ , 则对各节点应用 (17) 式, 有

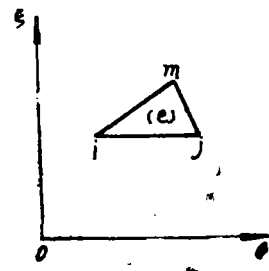


图 5

$$\begin{cases} f_i = A_0 + B_0\theta_i + C_0\xi_i \\ f_j = A_0 + B_0\theta_j + C_0\xi_j \\ f_m = A_0 + B_0\theta_m + C_0\xi_m \end{cases} \quad (18)$$

其中:  $\theta_i, \xi_i$  是  $i$  点的坐标值。解 (18) 式便求得系数  $A_0, B_0, C_0$  的表达式

$$\begin{cases} A_0 = \frac{1}{2\Delta e} (a_i f_i + a_j f_j + a_m f_m) \\ B_0 = \frac{1}{2\Delta e} (b_i f_i + b_j f_j + b_m f_m) \\ C_0 = \frac{1}{2\Delta e} (c_i f_i + c_j f_j + c_m f_m) \end{cases} \quad (19)$$

其中:

$$\begin{cases} a_i = \theta_j \xi_m - \theta_m \xi_j \\ b_i = \xi_j - \xi_m \\ c_i = \theta_m - \theta_j \end{cases} \quad (20)$$

按  $j \xrightarrow{m}$  循环来变化下标  $i, j, m$ , 便可求得  $a_j, b_j, c_j, a_m, b_m, c_m$  系数。

(19) 式中的

$$\Delta e = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & \theta_i & \xi_i \\ 1 & \theta_j & \xi_j \\ 1 & \theta_m & \xi_m \end{vmatrix} \quad (21)$$

$\Delta e$  是三角形单元体的面积。如果令

$$N_i = \frac{1}{2\Delta e} (a_i + b_i\theta + c_i\xi)$$

并组成矩阵

$$N^e = (N_i \ N_j \ N_m) \quad (22)$$

及单元体节点压力函数的列矩阵

$$f^e = \begin{Bmatrix} f_i \\ f_j \\ f_m \end{Bmatrix} \quad (23)$$

则 (17) 式, 即任意单元体  $e$  内的压力分布可写为

$$f = N^e f^e \quad (24)$$

各单元体之间的压力分布将是连续的, 尽管两单元体的交界线上其压力梯度可能互不相等, 但压力梯度不为无穷大值, 因而不影响对其取积分。故可将 (15) 式改写成

$$\begin{aligned} \Phi(f) = \sum_{e=1}^m \frac{1}{2} \int_{A^e} H_3 \left\{ \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (N^e f^e) \right]^2 + \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (N^e f^e) \right]^2 \right. \\ \left. - Qf\delta_i \right\} d\xi d\theta \end{aligned} \quad (25)$$

$Q$  只在节流边处为非零值, 如以  $A$  表示单元体  $e$  中节流边所占的面积, 上式最后一项可写成

$$\sum_{A \in \Omega} \int_A f Q d\xi d\theta \delta_i \quad (26)$$

其中  $A$  表示遍及  $\Omega$  内带有节流边的单元体。由于在节流边处  $p_a$  在  $A$  中为常值。故 (26) 式中  $f = f_a$ ，则 (26) 式可写成

$$\sum_{A \in \Omega} \frac{24\eta p_a R^2 r_0^2}{h^3 p_0^2 \rho_a} f_a \int_A \rho \tilde{v} d\xi d\theta \delta_i = \sum_{A \in \Omega} f_a K_1 m \delta_i$$

其中：

$$K_1 = \frac{24\eta p_a R^2 r_0^2}{h^3 p_0^2 \rho_a}$$

上述积分式的物理意义：它是自  $A$  面积中流出的气体质量流量  $m$ 。 $\mu$  为 0 至 1 的实数，本文中  $\mu = 1$ 。所以 (25) 式可写成

$$\begin{aligned} \Phi(f) = & \sum_{i=1}^m \frac{1}{2} \int_{A_i} H^3 \left\{ \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (N \cdot f^i) \right]^2 + \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (N \cdot f^i) \right]^2 \right\} d\xi d\theta \\ & - K_1 \sum_{A \in \Omega} f_a m \delta_i \end{aligned} \quad (27)$$

(27) 式便是将  $\Omega$  划分为众多个有限单元体之后的泛函表达式。为求它的极值，求  $\Phi(f)$  对  $f_i (i = 1, 2, \dots, n)$  的偏导数

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial f_i} = & \sum_{i=1}^m \int_{A_i} H^3 \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (N \cdot f^i) \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial}{\partial f_i} N \cdot f^i \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} (N \cdot f^i) \right. \\ & \left. \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial}{\partial f_i} N \cdot f^i \right) \right] d\xi d\theta - K_1 \sum_{A \in \Omega} \frac{\partial f_a}{\partial f_i} m \delta_i \end{aligned} \quad (28)$$

其中最后一项的偏导数  $\frac{\partial f_a}{\partial f_i}$ ，只当  $i$  为节流边节点时才因  $f_a = f_i$  而有值（等于 1），对于其它的情况其值为零。

内部和节流边节点的压力函数  $f$  为待求量，认为单元体内压力函数  $f$  为线性分布。而边界上的节点压力函数  $f = P_a$  是给定的已知数<sup>[1]</sup>。最后将三类线性代数方程式（ $n$  个）综合起来，写成矩阵方程式

$$KF = T \quad (29)$$

其中： $K$  为  $n \times n$  阶方阵，称刚度矩阵。 $F$  和  $T$  是  $n \times 1$  阶列阵。

$$F = [f_1, f_2, \dots, f_n]^T \quad (30)$$

$$K = K_{ij} = \sum_{e \in \Delta_e} (c_i c_j + b_i b_j) \left( \int_{\Delta_e} H^3 d\xi d\theta / (2\Delta_e)^2 \right) \quad (31)$$

而  $T$  是由零、 $K_1 \mu m$  或  $-(c_i^{(k)} c_j^{(k)} + b_i^{(k)} b_j^{(k)}) f^{(k)} \int_{\Delta_e} H^3 d\xi d\theta / (2\Delta_e)^2$  所组成。 $\Delta K$  表示  $K$  单元体的面积<sup>[1]</sup>。(29) 式即为用有限元法分析节流静压气体轴承的最终结果。

对 (29) 式采用超松弛迭代与比例分割法联合解出压力分布  $P = P(\xi \cdot \theta)$ ，进而解出承载能力及刚度。其中：节流面积  $A$  的计算，因为表面节流沟槽和凸缘处气膜厚度不同，必须按节点计算出等效面积，两节点之间弧长  $\Delta x = r_c \times \Delta \theta$ ，等效面积  $A_i = \Delta x \times h$ ，凸缘处

$h = h_0$ , 而沟槽处  $h = h_0 + h_{00}$ 。无因次承载能力  $W = \frac{w}{\pi r_0^2 p_a}$ , 其中:  $w$  为承载能力详见<sup>[1]</sup>。

(三) 计算实例

对图 4 所示表面节流静压气体止推轴承, 取整个圆的  $1/2n_1 = 1/30$  做为计算域进行分析, 如图 6。  $r_0 = 2\text{cm}$ ,  $r_s = 0.2\text{cm}$ ,  $r_1 = 0.8\text{cm}$ ,  $\gamma = 0.2$ ,  $p_0 = 2.0\text{kg/cm}^2$ ,  $p_a = 1.0\text{kg/cm}^2$ ,  $\theta_0 = 12^\circ$ ,  $h_{00} = 11\mu\text{m}, 55\mu\text{m}$ , 求出压力分布曲线、承载能力及刚度。

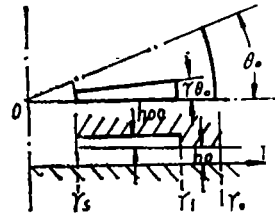


图 6

我们将  $\Omega$  域均匀等分, 构成 160 个三角形有限单元体, 99 个节点, 节点和单元体的编号均为自左向右, 自上而下的原则, 见图 7。

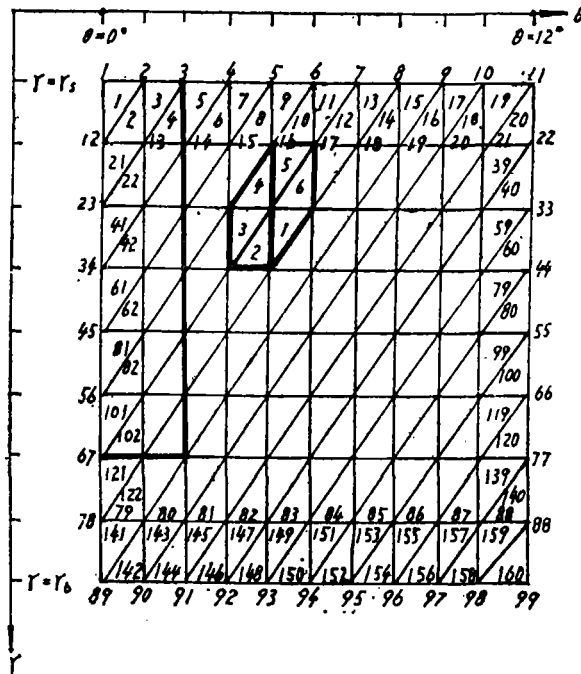


图 7

(四) 计算结果

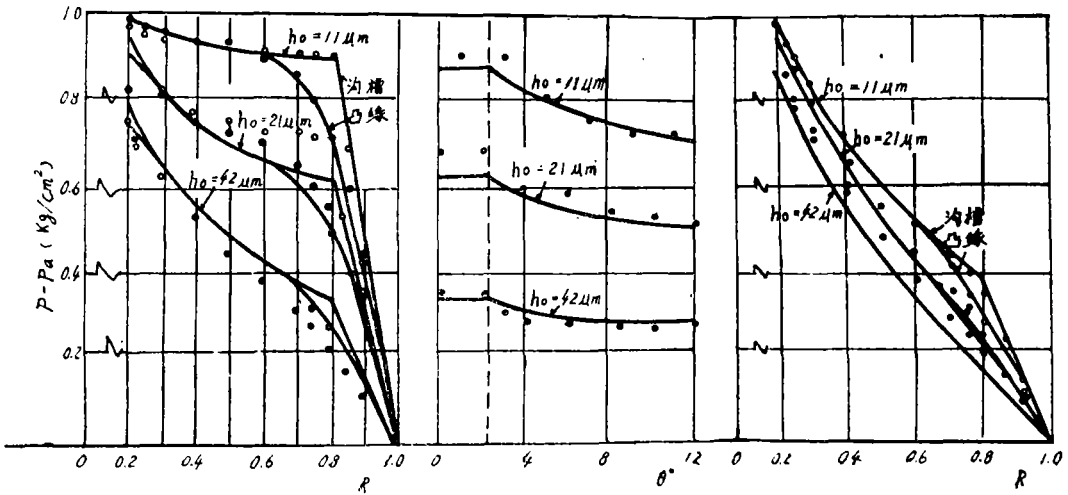
根据上面给出的结构参数, 分别计算出压力分布见图 8 (a)、(b)、(c) 及不同气膜间隙下承载能力曲线图 9, 并与文献<sup>[2]</sup>的实验结果进行比较。表 1 为不同气膜间隙下的刚度。

表 1  $h_{00} = 55\mu\text{m}$

$h_0(\mu\text{m})$	11	21	30	42	50	60
$w(\text{kg})$	8.795	6.547	5.174	4.256	3.408	2.692
$K(\text{kg}/\mu)$	0.2248	0.1525	0.1147	0.106	0.0716	0.0467

$h_{00} = 11 \mu\text{m}$

$h_0 (\mu\text{m})$	11	15	21	30	42	50
$w (\text{kg})$	5.165	1.555	1.211	3.975	3.414	3.341
$K (\text{kg}/\mu)$	0.1525	0.052	0.0295	0.046	0.009	



(a) 径向压力分布

$h_{00} = 55 \mu\text{m}$

有限元法结果: —  
实验结果<sup>[2]</sup>: ◯沟槽 ◻凸缘

(b) 圆周方向压力分布

$h_{00} = 55 \mu\text{m}$

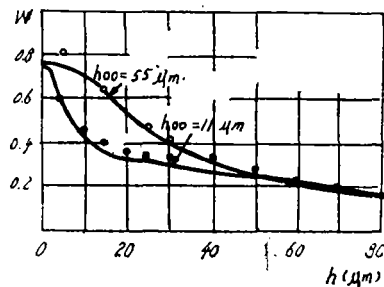
有限元法结果: —  
实验结果<sup>[2]</sup>: ◯

(c) 径向压力分布

$h_{00} = 11 \mu\text{m}$

有限元法结果: —  
实验结果<sup>[2]</sup>: ◯沟槽 ◻凸缘

图 8 表面节流静压气体止推轴承压力分布曲线



有限元法结果: — 实验结果<sup>[2]</sup>: ◯

图 9 承载能力曲线

### 四、结 束 语

采用有限元方法, 可适用于不同结构形式的表面节流型轴承。通过我们的计算与实验<sup>[2]</sup>比较, 得到的结果是满意的。有限元方法是对这类轴承的一种可行的设计计算方法。

### 参 考 文 献

- [1] 刘噉、刘育华, 全国第一届气体润滑学习班讲义, 哈尔滨工业大学
- [2] 矢部宽、森美郎、浅川秀泰、木原政信; 表面紋リ形静圧気体スラスト轴承の特性
- [3] 刘噉、刘育华、史小文; 光学机械(1984年, 3期)

## Finite Element Method for Externally Pressurized Surface Restricted Thrust Bearing

Zhang Fengyi Shi Xiaowen Liu Yuhua Liu Tun

### Abstract

This paper presents the calculation of an externally pressurized surface restricted thrust bearing, using finite element technology. In this paper, the pressure distribution, load capacity and stiffness for different thickness of gas film are given.

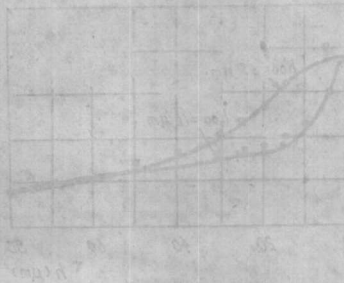


图 4 示 四