

谐波齿轮传动筒形柔轮 应力的实验分析方法

张 一 科

摘要: 本文提出用电阻应变仪测试技术和应力实验的分析方法来测定筒形柔轮在载荷作用下的应力分布和数值。

文中介绍了测试原理和方法,对测得的结果作了分析对比,探讨了谐波齿轮传动筒形柔轮的强度条件和计算公式。

一、目的要求

谐波齿轮传动是一项新的传动技术。当前能直接用于设计的强度条件和可靠性计算的资料和数据较少。柔轮是谐波齿轮传动装置中的主要构件之一,其受力情况复杂,又在循环变形下工作,所以易于损坏。为满足一定的使用期限要求,提高工作可靠性,必须提高柔轮的疲劳强度。因此,对柔轮进行实验应力测定和分析是很必要的。

为了较准确地得到构件在外载荷作用下产生的变形和应力情况,并对筒形柔轮进行实验应力分析来评价有关经验公式的可靠性及其近似程度,从而为筒形柔轮的结构设计提供技术依据。

二、原理与设备

使用电测技术可以测得构件上指定点的应变,同时又能把测得的机械量转换成电量,通过仪器转换成电压的变化量并加以放大,然后按机械量——应变,给出指示值。由于构件的机械应变引起的应变片的丝栅电阻相对变化量很小,一般在 6×10^{-3} 以下,所以要用电阻应变仪。由它把电阻应变片的相对电阻的变化量 $\Delta R/R$ 准确而灵敏地转换成电压信号,经过放大后指示出来。

实验使用YJD-1型静、动态电阻应变仪。

测量使用的是纸基丝线式电阻应变片,其电阻 $R = 120\Omega$,灵敏系数 $K = 2.04$ 。

被测的谐波齿轮传动装置的减速比 $i = 120$,波数 $u = 2$ 。

测量中,为了准确地给记录标定并能随时做到观察核对记录,在测量系统中并接一台PZ8型数字电压表。

试验是在精密谐波传动试验台上进行的,该试验台装有驱动电机和加载装置。其原理及测量系统简图,见图1。

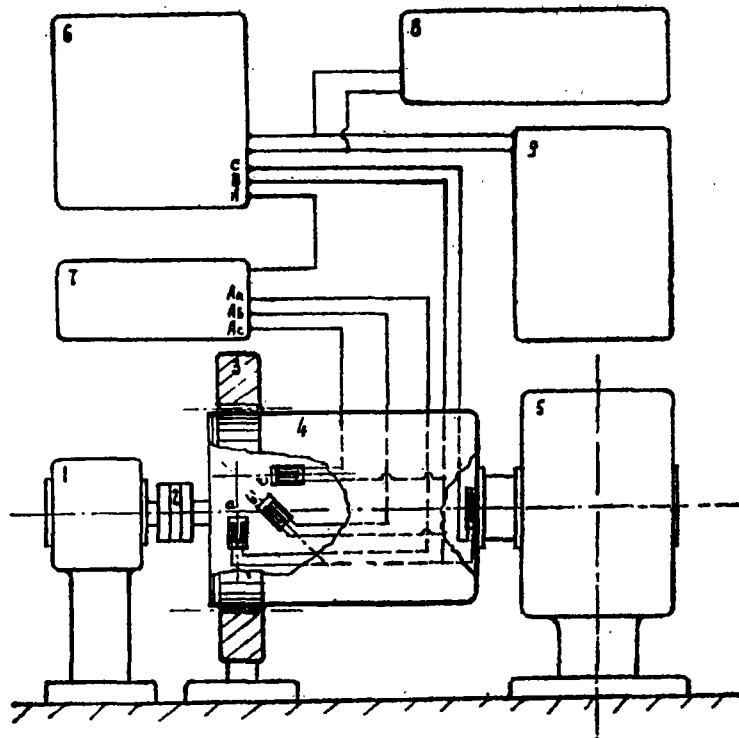


图1 应变测试原理与装置简图

- 图中：1、2—驱动电机、联轴器
 3—刚轮
 4—被测的筒形柔轮
 5—加载器
 6—YJD-1型静、动态电阻应变仪
 7—接线箱
 8—PZ8型直流数字电压表
 9—DLT-80C型记录仪

三、方法与步骤

1. 测试准备:

校核应变片的标定值和预测,使应变片的阻值和灵敏系数在仪器的允许范围内。选择适合要求的粘结剂和导线。确定被测件的力学性质,已知材料的弹性模量 $E = 2.1 \times 10^6 \text{kg/cm}^2$,泊桑系数 $\mu = 0.29$ 。

校准仪器,调整平衡点以及必要的线路检查与测量等。

机械频率估算和确定应变片基长。

由于周期性的变化应力是属于简谐变化,其表达式为:

$$\sigma = \sigma_0 \cdot \sin \frac{2\pi}{t}$$

式中: σ_0 —应力振幅 (kg/cm^2),

t —周期 (s),

σ —为受载荷作用的等速回转件上一点处的应力。

动应力的基频频率:

对回转运动构件通常与其转动的速度和振动现象有关, 其基频频率 f 可用下式计算:

$$f = \frac{n}{60} \text{ (Hz)}$$

式中: n —回转件转速 (rpm)

用于试验的谐波齿轮的转动频率为:

$$f = \frac{2n}{60} \text{ (Hz)}$$

试验时驱动电机实际转速为 2000rpm, 从而求得柔轮的变形频率为:

$$f_0 = \frac{2 \times 2000}{60} = 66.7 \text{ (Hz)}$$

应变片基长 L :

根据在测量中引起的相对误差 δ 为:

$$\delta = \frac{\pi^2 + f'^2 L^2}{6v^2} \text{ (cm)}$$

由上式得出:

$$L = \frac{v}{\pi f'} \sqrt{6\delta} = \frac{5 \times 10^5}{\pi \times 20 \times 10^3} \sqrt{6 \times 5 \times 10^{-3}} = 1.38 \text{ (cm)}$$

式中: v —应变波在被测件里的传播速度, 对钢取 $v = 5 \times 10^5$ (cm/s),

f' —被测件的应变频率, 对钢取 $f' = 20$ (kHz),

δ —测量中引起的相对误差, 推荐取 $\delta = 5 \times 10^{-3}$ (cm)。

布片方式:

对平面应力状态, 在主应力和主应力方向都不确定的情况下, 可在一点处沿几个不同方向贴几个应变片——应变花。该实验中选用了 45° 角应变花。选取了柔轮筒体内表面齿圈里侧, 其受力情况复杂又有应力集中为测试位置。应变花的实际布置见图 2。

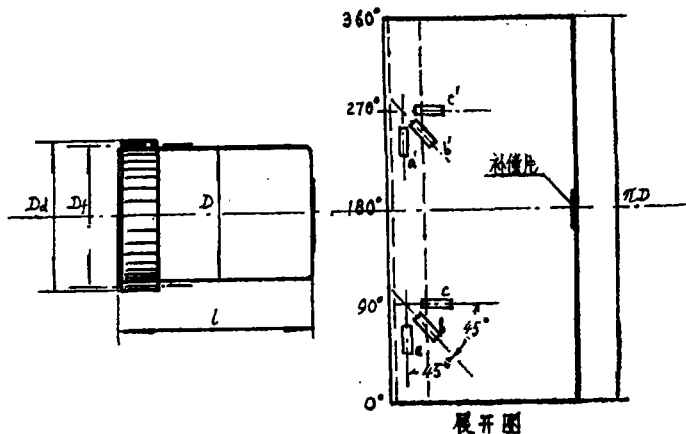


图 2 45° 应变花布置简图

由应变花测到的应变量和根据虎克定律导出应变与应力的关系式为:

$$\varepsilon_a = \frac{1}{E} \left[\frac{(1-\mu)(\sigma_x - \sigma_y)}{2} + \frac{(1+\mu)(\sigma_x - \sigma_y)}{2} \right],$$

$$\varepsilon_b = \frac{1}{E} \left[\frac{(1-\mu)(\sigma_x + \sigma_y)}{2} - (1+\mu) \cdot \tau_{xy} \right],$$

$$\varepsilon_c = \frac{1}{E} \left[\frac{(1-\mu)(\sigma_x + \sigma_y)}{2} - \frac{(1+\mu)(\sigma_x - \sigma_y)}{2} \right].$$

由上三式联立求解后得到应力表达式为:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_a + \mu\varepsilon_c) \quad (\text{kg/cm}^2),$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_c + \mu\varepsilon_a) \quad (\text{kg/cm}^2),$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{1+\mu^2} \left(\frac{\varepsilon_a + \varepsilon_c}{2} - \varepsilon_b \right) \quad (\text{kg/cm}^2),$$

其主应力和主应力方向计算式为:

$$\sigma_{1,2} = \frac{E}{2(1-\mu)} (\varepsilon_a + \varepsilon_c) \pm \frac{E}{\sqrt{2}(1+\mu)} \sqrt{(\varepsilon_a - \varepsilon_b)^2 + (\varepsilon_b - \varepsilon_c)^2} \quad (\text{kg/cm}^2),$$

$$\theta_0 = \frac{1}{2} \text{tg}^{-1} \frac{(\varepsilon_b - \varepsilon_c) - (\varepsilon_a - \varepsilon_b)}{(\varepsilon_b - \varepsilon_c) + (\varepsilon_a - \varepsilon_b)} \quad (\text{度})$$

式中 θ_0 角为主应变方向与应变花的应变片 a 方向间夹角。应变的正负号的确定是以应变片 a 、 b 、 c 为序逆时针方向为正。

其最大剪应力为:

$$\tau_{\max} = \frac{E}{\sqrt{2}(1+\mu)} \sqrt{(\varepsilon_a - \varepsilon_b)^2 + (\varepsilon_b - \varepsilon_c)^2} \quad (\text{kg/cm}^2).$$

四、测值整理综合与计算

1. 应变标定值的确定与计算:

以PZ8型直流数字电压表上的指示值和DLT-80C型记录仪的标定电压值,单位为50mV。具体计算与数值见表1。

表1 应变标定值计算表

序号	记录组号		表 值 ($\mu\varepsilon$)	格 数	初 标 定 ($\mu\varepsilon/\text{格}$)	电 压 值 (mV)	最终标定 ($\mu\varepsilon/50\text{mV}$)
	组	记录号					
1	A	1-1	18.9	8.0	2.3625	50	2.3625
2	A	2-1	34.8	15.0	2.3200	50	2.3200
3	A	1-4	11.5	4.9	2.3469	50	2.3469
4	A	2-4	12.0	5.1	2.3529	50	2.3529
5	B	1-5	142.3	31.0	4.5903	100	2.2952
6	B	2-5	182.1	39.5	4.0101	100	2.3051
7	C	1-6	172.6	37.2	4.6398	100	2.3199

续表

序号	记录组号		表 值 ($\mu\epsilon$)	格 数	初 标 定 ($\mu\epsilon/\text{格}$)	电 压 值 (mV)	最终标定 ($\mu\epsilon/50\text{mV}$)
	组	记录号					
8	B	1-2	196.5	8.5	23.1176	500	2.3118
9	B	2-2	258.0	11.0	23.4546	500	2.3455
10	C	1-3	359.1	15.2	23.6250	500	2.3625
11	C	2-3	463.0	19.6	23.6224	500	2.3622
12	C	2-6	186.1	7.9	23.5570	500	2.3557
13		Σ_i					28.0402
14		$\frac{\Sigma_i}{n}$					2.3367

2. 实测应变值:

从记录纸上所测下的曲线占的格数,按最终标定值,经换算后得到的。其数值见表2。

表2 空载应变量数值表

序号	记录位置 (度)	1 组 应 变 花			2 组 应 变 花		
		$a(\mu\epsilon)$	$b(\mu\epsilon)$	$c(\mu\epsilon)$	$a'(\mu\epsilon)$	$b'(\mu\epsilon)$	$c'(\mu\epsilon)$
1	0°	7.3	8.4	15.0	4.5	30.2	37.2
2	90°	7.4	8.1	14.7	4.7	30.8	37.6
3	180°	7.6	8.1	15.2	4.5	30.2	37.2
4	270°	7.1	8.5	15.5	—	30.9	36.5
5	360°	7.4	8.4	15.1	—	30.2	37.3
6	Σ_i	38.8	41.5	75.5	13.7	152.3	185.8
7	Σ_i/n	7.360	8.300	15.100	4.567	30.460	37.160
8	标 定 值	2.3367	23.3670	23.3670	2.3367	4.6734	4.6734
9	应 变 值	17.198	193.946	352.842	10.672	142.352	173.664

表3 加载10kg应变值

序号	记录位置 (度)	1 组 应 变 花			2 组 应 变 花		
		$a(\mu\epsilon)$	$b(\mu\epsilon)$	$c(\mu\epsilon)$	$a'(\mu\epsilon)$	$b'(\mu\epsilon)$	$c'(\mu\epsilon)$
1	0°	15.6	10.4	19.5	6.3	37.9	47.4
2	90°	15.2	10.6	20.0	6.1	38.5	47.0
3	180°	—	10.5	19.9	5.8	38.6	46.4
4	270°	14.5	10.4	19.4	5.5	38.2	46.5
5	360°	15.5	10.5	19.5	6.3	37.9	47.3
6	Σ_i	60.8	52.400	98.300	30.000	191.100	234.600
7	Σ_i/n	15.200	10.480	19.660	6.000	38.220	46.920
8	标 定 值	2.3367	23.3670	23.3670	2.3367	4.6734	4.6734
9	应 变 值	35.518	244.886	459.395	14.020	178.617	219.276

3. 由应变值计算出的应力, 见表 3。

表4 主应力与其方向计算表

序号	计 算 式	负 载 应 变 花	0		10kg·m	
			1 组	2 组	1 组	2 组
1	$(\varepsilon_a + \varepsilon_c)$		370.040	184.336	494.913	233.637
2	$(\varepsilon_b - \varepsilon_c)^2$		25247.94	980.44	46014.11	1653.15
3	$(\varepsilon_a - \varepsilon_b)^2$		31239.86	17339.62	43834.96	27092.17
4	$\sqrt{②+③}$		237.67	135.35	299.75	169.54
5	$\frac{E}{2(1+\mu)}$		1478873.24			
6	$\frac{E}{\sqrt{2}(1+\mu)}$		1151104.06			
7	$\tau_{max} = ⑥ \times ④$		273.58	155.80	345.04	195.16
8	$\tau_a = \frac{⑦}{2}$		136.79	77.90	172.52	97.58
9	$⑤ \times ①$		547.24	272.61	731.91	345.52
10	$\sigma_1 = ⑨ + ⑦$		820.82	428.41	1076.95	540.68
11	$\sigma_2 = ⑨ - ⑦$		273.66	116.81	386.87	150.16
12	$(\varepsilon_b - \varepsilon_c)$		-158.90	-31.31	-214.51	-40.66
13	$(\varepsilon_a - \varepsilon_b)$		-176.75	-131.68	-209.37	-164.60
14	$⑬ - ⑭$		17.85	100.56	-5.14	123.94
15	$⑬ + ⑭$		-335.65	-162.99	-423.88	-205.26
16	$\theta_0 = \frac{1}{2} \text{tg}^{-1} \left(\frac{⑮}{⑯} \right)$		-1.522°	-15.84°	0.35°	-15.56°

4. 测量精度与误差计算:

在对使用的仪器作过调校, 应变片的阻值、灵敏系数、基长都进行过核对和计算, 确认被测件的频率在仪器的允许范围内, 温度也作了补偿的情况下测试的。所以, 计算出的误差是使用的仪器, 在记录和量、读方面的误差。其计算结果见表 3、4。

表5 应变花测量误差计算表

序号	组号	负载状况 (kg·m)	单 位	应 变 x	标 值 x'	dx'	d^2x'
1	1	0	$\mu\varepsilon$	30.7	30.9	-0.2	0.04
2	1	0	$\mu\varepsilon$	30.2	30.9	-0.7	0.49
3	1	0	$\mu\varepsilon$	30.9	30.9	0	0
4	1	0	$\mu\varepsilon$	31.1	30.9	0.2	0.04
5	1	0	$\mu\varepsilon$	30.9	30.9	0	0
		$\Sigma 1_0$	$\mu\varepsilon$			-0.7	0.57
1	1	10	$\mu\varepsilon$	45.5	45.5	0	0
2	1	10	$\mu\varepsilon$	45.8	45.5	0.3	0.09
3	1	10	$\mu\varepsilon$	45.6	45.5	0.1	0.01
4	1	10	$\mu\varepsilon$	45.3	45.5	-1.2	1.44
5	1	10	$\mu\varepsilon$	45.5	45.5	0	0
		$\Sigma 1_{10}$				-0.8	1.54

续表

序号	组号	负载状况 (kg·m)	单位	应变 x	标 值 x'	dx'	d^2x'
1	2	0	$\mu\epsilon$	71.9	71.9	0	0
2	2	0	$\mu\epsilon$	73.1	71.9	1.2	1.44
3	2	0	$\mu\epsilon$	71.9	71.9	0	0
4	2	0	$\mu\epsilon$	72.0	71.9	0.1	0.01
5	2	0	$\mu\epsilon$	72.1	71.9	0.2	0.04
		$\Sigma 2_0$				1.5	1.49
1	2	10	$\mu\epsilon$	91.6	91.6	0	0
2	2	10	$\mu\epsilon$	91.6	91.6	0	0
3	2	10	$\mu\epsilon$	90.8	91.6	-0.8	0.64
4	2	10	$\mu\epsilon$	90.2	91.6	-1.4	1.96
5	2	10	$\mu\epsilon$	91.5	91.6	-0.1	0.01
		$\Sigma 2_{10}$	$\mu\epsilon$			-2.3	2.61

测量精度值是将表 3 中的值代入表 4 各式中得到的。其数值见表 4。

表6 测量精度值

序号	名称	计算公式	1 组花 应变		2 组花 应变	
			空 载	10 kg·m	空 载	10 kg·m
1	算术 平均值	$a = x' + \frac{\Sigma dx'}{n}$	30.76	45.34	72.20	91.40
2	标准 误差	$\sigma = \pm \sqrt{\frac{d^2x'}{n} - \frac{(\Sigma dx')^2}{n^2}}$	± 0.307	± 0.531	± 0.460	± 0.560
3	相对误差 精度	$\delta = \frac{\sigma}{a} \times 100\%$	$\pm 1\%$	$\pm 1.2\%$	$\pm 0.63\%$	$\pm 0.61\%$

五、柔轮应力计算

柔轮强度计算公式^[2]，是从很多的用于柔轮强度计算的公式同本实验值经计算对比，二者很接近所选定的。分析认为该经验公式可以作为谐波齿轮的筒形柔轮的强度设计计算时直接使用和参考。下面是用该公式计算出试验用的筒形柔轮的应力幅值。

1. 柔轮的主应力幅值：

$$\sigma_s = \frac{7\omega_0 E H_1}{d_1^2} \cdot K_s \quad (\text{kg/cm}^2) \quad (1)$$

式中： ω_0 —柔轮变形量， $\omega_0 = 0.057$ (cm)，
 H_1 —柔轮齿圈厚， $H_1 = 0.234$ (cm)，
 d_1 —分度圆直径， $d_1 = 180$ (cm)，
 K_s —应力增大系数

$$K_s = 1 + \frac{4 \cdot \sqrt{\sigma_s}}{10^5 \left(\frac{H_1}{d_1}\right)^3} \quad (2)$$

式中: σ_s —齿侧压应力

$$\sigma_s = \frac{10M_r \cdot K}{\psi_s \cdot d_1^2} \quad (\text{kg/cm}^2) \quad (3)$$

式中: M_r —输出轴上负载 (kg·m),

K —工作情况系数, 推荐值范围 (1~1.25), 计算中取 $K = 1.25$,

ψ_s —齿宽系数,

$$\psi_s = \frac{B}{d_1} \quad (4)$$

式中: B —柔轮齿宽 (cm)。 $B = 1.8$,

2. 柔轮的剪切应力幅值:

$$\tau_s = \frac{1}{2} (\tau_{s_0} + \tau_r) \quad (\text{kg/cm}^2) \quad (5)$$

式中: τ_{s_0} —由变形引起的剪切应力

$$\tau_{s_0} = \frac{\omega_0 E H_1}{d_1 \cdot L} \cdot K_s \quad (\text{kg/cm}^2) \quad (6)$$

式中: L —柔轮筒体长度, (cm)

$$L = 16.2$$

τ_r —由外负载作用引起的剪切应力。

$$\tau_r = \frac{4M_r}{\pi d_1^2 \cdot H_1} \cdot K_s \quad (\text{kg/cm}^2) \quad (7)$$

用以上公式计算的结果同实验结果对比, 见表 5。

表7 应力比较表

序号	应力	实验与计算	单 位	负载 (kg·m)	
				0	10
1	σ_s	实 验 值	kg/cm ²	821	1077
2		计 算 值	kg/cm ²	686	1068
3	τ_s	实 验 值	kg/cm ²	137	173
4		计 算 值	kg/cm ²	136	211

六、实验应力分析

该实验应力分析是通过采用可行的电阻应变仪测试技术, 并对直接测得的实际应变进行了整理和综合, 也作了误差计算, 从而较准确地得到各种不同的应力幅值以及最大主应力和主方向。这主应力和主方向见图 3。

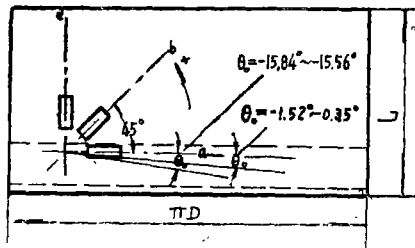


图3 主应力及其方向图

该实验是为测定谐波齿轮传动的筒形柔轮在外载荷作用下的应力值，并用其校验已有的经验公式，为以后的设计计算直接使用。资料^[2]中推荐的计算公式得到的结果很接近实验测得的值，故认为该式可做为谐波齿轮传动的筒形柔轮的强度计算式。使用该式时，其柔轮的强度条件可由下列各式确定。

$$n = \frac{n_\sigma \cdot n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}} \geq 1.5$$

其中： $n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{K_\sigma \cdot \sigma_a}$ ； $n_\tau = \frac{\tau_{-1}}{K_\tau \tau_a + 0.2\tau_m}$ 。

推荐： $K_\sigma = 1.65 + 0.1m$ ， $K_\tau = 0.8K_\sigma$ ，

式中： m —谐波齿轮轮齿模数。

分析认为该测试技术及其分析方法，测试结果是准确的，方法是可行的，被校验的公式也是可靠的。为谐波齿轮传动装置的结构设计和强度计算提供了技术依据。

该实验除对筒形柔轮的齿圈与筒体过渡处作了较多次的测试外，同时还对筒底和筒体周向也作了测试。

参 考 文 献

- [1] 天津大学材力教研室电测组编著，《电阻应变仪测试技术》，科学出版社
- [2] 光学机械，1975年，第6期，52~56页

The Experimental Stress Analysis for the Tube Flexible Spline of Harmonic Gear Drive

Zhang Yike

Abstract

The stress analysis of the tube flexible spline is presented using a strain gauge. The principle, method and the data processing are also introduced. The strength check and the formulae are discussed.