周期膜系通带极值点位置的确定及其波纹的修正—（膜系通带极值点位置的确定）

郑琪　齐钰

摘要：根据等效原理，论述了对称周期膜系通带极值点位置的确定及其波纹修正的几种方法，提出一种较适用的微分计算方法，给出修正后短波通膜系的计算结果和实验结果。

关键词：多层膜，周期膜系，极值点位置，波纹修正。

一、引　言

对于一个周期性膜系 $(PQP)^m$，膜层厚度 $2nd_P = nd_Q = \frac{1}{4}\lambda_0$，当$P$和$Q$分别为高、低折射率膜层时，其膜系 $(PQP)^m$的光谱特性为一长波通；当P和Q分别为低、高折射率时，其光谱特性为一短波通。

长波通膜系结构为 $(\frac{H}{2}L\frac{H}{2})^m$，短波通膜系结构为 $(\frac{L}{2}H\frac{L}{2})^m$。这里$H$和$L$分别代表高、低折射率膜层，其厚度为$\frac{\lambda_0}{4}$，$\lambda_0$为膜系设计的中心波长，$m$为膜系基本结构的重复周期数。

由等效原理可知，周期膜系 $(PQP)^m$具有如下特点：

1. 基本周期结构 (PQP) 可与一单层膜等效；
2. 整个周期膜系的等效折射率 E'和基本周期 (PQP) 三层膜的等效折射率E相等，即$E' = E$；
3. 总膜系的等效相位厚度 δ' 为基本周期 (PQP) 三层膜等效相位厚度 δ 的m倍，即$\delta' = m\delta$。

众所周知，对于一个长波通或者短波通膜系，总是希望膜系具有如下良好的光谱特性：

（1）通带部分具有高的透过率；

（2）通带部分具有较小的波纹；

（3）具有良好的截止特性。

然而计算结果表明，这种周期性膜系的光谱曲线，在通带部分有较大的波纹，存在一些反射率极值点，而且短波通膜系通带波纹起伏比长波通要大得多。因此为了改善其光谱特性，必须对周期膜系进行修正。这种修正通常是在保证通带具有高透过率的前提下，使得通带波纹最小。

本文就是基于这个目的，以常用的短波通周期膜系为例，讨论膜系通带极值点位置的确定和波纹修正的思想及方法，并提出一种实用的微分计算法。

二、通带极值点位置的确定

周期膜系可以等效为折射率为E'，相位厚度为 δ' 的单层膜。为了以后叙述方便作如下变换：

$$\delta' = \delta、\quad E' = E$$

即用E和 δ 分别代表膜系的等效折射率E'和等效相位厚度 δ'。

对于一个单层膜，其光谱反射率R和透过率T由下式给出[1]：

$$R = \frac{(HE^2)(E^2+ng^2)-4E^2ng+(1-E^2)(E^2-ng^2)\cos 2\delta}{(HE^2)(E^2+ng^2)+4E^2ng+(1-E^2)(E^2-ng^2)\cos 2\delta}$$

$$T = 1-R$$

$$= \frac{8E^2ng}{(1+E^2)(E^2+ng^2)+4E^2ng+(1-E^2)(E^2-ng^2)\cos 2\delta}$$

在周期膜系初步设计之后，我们首先要了解其通带波纹的大小和通带光谱透过率的大小，并且确定出通带反射率峰值的位置，然后，就是如何修正膜系使之通带透过率最高，波纹系数最小的问题。

对于短波通膜系 $(\frac{L}{2}H\frac{L}{2})^m$，其通带反射极值点的确定方法，已有详细的报导[2]。推导方法的思想是在一假定的基础上进行的：膜系的等效折射率和等效相位厚度相互独立，只针对膜系的等效相位厚度，讨论其对膜系反射率的影响而进行推导。

设E和δ分别为波长 λ 的函数，即$E=E(\lambda)$，$\delta=\delta(\lambda)$。

在不考虑等效折射率E的情况下，讨论位相 δ 对膜系反射率的影响。也就是说膜系反射率R是位相厚度 δ 的函数，而膜系折射率为一常数，其变化量为零，即$\varDelta E=0$。

当膜系的光谱反射率R取极大值或极小值时，有

$$\frac{dR}{d\delta} = 0$$

反之，如果有$\frac{dR}{d\delta}=0$，则由此确定的波长位置就是反射率极值点对应波长。

基本周期结构（PQP）可等效为一单层膜，并且其特征矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} \\ \mu_{21} & \mu_{22} \end{pmatrix}$$

这里 $\mu_{11}=\mu_{22}=\cos\delta$，$\mu=\frac{i}{E}\sin\delta$，$\mu_{21}=iE\ \sin\delta$，且 $\delta=\frac{2\pi nd'}{\lambda}$，$nd'$为膜系等效光学厚度，$E$为等效折射率。

若设相对波数 $g=\lambda_0/\lambda$，则由周期膜系的性质可导出一组公式：

$$E^2 = n_p^2\left[\cos(\frac{\pi}{2}g)-\frac{(n_p-n_Q)}{(n_p+n_Q)}\Big/\cos(\frac{\pi}{2}g)+\frac{(n_p-n_Q)}{(n_p+n_Q)}\right] \tag{1}$$

$$E = n_p\left[\cos(\frac{\pi}{2}g)-\left(\frac{n_p-n_Q}{n_p+n_Q}\right)\Big/\cos(\frac{\pi}{2}g)+\left(\frac{n_p-n_Q}{n_p+n_Q}\right)\right]^{1/2}$$

$$\mu_{11}=\mu_{22}=\cos\left(\frac{\delta}{m}\right)$$

$$=\cos^2(\delta_Q)-\frac{1}{2}\left(\frac{n_p}{n_Q}+\frac{n_Q}{n_p}\right)\sin^2(\delta_Q)$$

则 $\delta=m\times\delta_{单周期}=m\cos^{-1}(\mu_{11})$

$$=m\cos^{-1}\left[\cos^2(\delta Q)-\frac{1}{2}\left(\frac{n_p}{n_Q}+\frac{n_Q}{n_p}\right)\sin^2(\delta Q)\right] \qquad (2)$$

那么等效单层膜的极值点位置由下述方法导出：

若 $\frac{dR}{d\delta}=0$ 时，由单层膜反射率公式可得到：

$\cos(2\delta)=\pm1$

即有 $2\delta=k\pi,(k=0,1,2,3,\cdots\cdots)$

如果 k 取偶数，即 $k=0,2,4\cdots\cdots$

由反射率公式可得：

$$R=\frac{1-ng}{1+ng}$$

也就是这时膜层为一虚设层，反射率为一定值。

如果 k 取奇数，即 $k=1,3,5,7\cdots\cdots$，膜系极值点处的相对波数 g_k 由下述公式给出：
对于短波通膜系有：

$$g_k=2-\frac{2}{\pi}\sin^{-1}\left\{\left[2\sqrt{n_pn_Q}/(n_p+n_Q)\right]\cdot\sin\left(\frac{k\pi}{4m}\right)\right\} \qquad (3)$$

对于长波通膜系有：

$$g_k=\frac{2}{\pi}\sin^{-1}\left\{\left[2\sqrt{n_pn_Q}/(n_p+n_Q)\right]\cdot\sin\left(\frac{k\pi}{4m}\right)\right\} \qquad (4)$$

反射率 R 随波长 λ 而变化，由单层膜反射率公式可得

$$R=\frac{(E^2-ng)}{(E^2+ng)} \qquad (5)$$

上述公式是由等效单层膜的反射率公式对等效相位厚度 δ 求导的关系而导出的。

由上述公式（1）—（5）即可求得膜系 $G\ \left(\frac{L}{2}H\frac{L}{2}\right)^7 A$ 的通带极值点位置及各种参量，其结果列入（表 1）。

这里 g_k 为极值点的相对波数，E 为膜系的等效折射率，R 为膜系极值点处的反射率。

以上方法由于假定周期膜系反射率 R 只是相位厚度 δ 的函数，而忽略周期膜系等效折射率对其膜系反射率的影响，因此其所得的结果受到局限，那么正确确定反射率极值点应由如下方程组求解

表1 膜系 G $(\frac{L}{2}H\frac{L}{2})^7A$ 通带极值点及其参数

Wave Length(nm)	G_K	E	R %
415.47	1.651	1.115	0.54
433.67	1.581	1.12	4.2
453.39	1.513	1.09	1.39
474.8	1.444	1.05	4.2
497.98	1.377	0.99	4.12
522.9	1.311	0.92	4.2
549.17	1.249	0.81	15.65
575.42	1.192	0.63	4.2
597.69	1.147	0.38	70

($n_H=2.2$, $n_L=1.46$, $n_g=1.52$, $n_o=1$, $\lambda_o=686$nm)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial R}{\partial \delta} = 0 \\ \dfrac{\partial R}{\partial E} = 0 \end{cases} \tag{6}$$

但考虑到膜系的等效相位厚度和等效折射率E均为波长λ的复杂函数，直接求解上述方程组存在困难。因而为了较准确地确定周期膜系$G\ (\frac{L}{2}H\frac{L}{2})^7A$的极值点位置，我们提出通过求解膜系反射率$R$对波长$\lambda$的导数的方法确定，即在膜系的反射极值点处应有$\frac{dR}{d\lambda}=0$。反之，如果有$\frac{dR}{d\lambda}=0$，那么由此确定的波长也就是膜系反射率极值点对应的波长λ。称此方法为微分法。

利用单层膜透过率公式及其周期膜系的特性，经过推导和变换可得到如下结果：

$$\frac{dT}{d\lambda}=\frac{T^2\sin\delta}{2Eng}\left[\frac{a\delta\cos\delta}{\lambda}+\left(\frac{a\delta\cos\delta}{E}+b\sin\delta\right)\frac{dE}{d\lambda}\right] \tag{7}$$

$$\frac{dE}{d\lambda}=-n_p{}^2\lambda_0\,\pi\sin\left(\frac{\pi}{2}g\right)\left[\frac{n_p^2+n_Q^2}{2n_p n_Q}\right]\Big/\left[2E\lambda^2\cos\left(\frac{\pi}{2}g\right)+\frac{n_p^2+n_Q^2}{2n_p\ n_Q}\right] \tag{8}$$

这里 $a=\dfrac{(1-E^2)(E^2-n_g g^2)}{E}$

$$b=-\frac{(ng^2-E^4)}{E^2}$$

如果周期膜系通带存在极值点，那么公式（7）为零，由此可得：

$$\frac{T^2\sin\delta}{2Eng}=0 \tag{9}$$

或者 $$\frac{a\delta\cos\delta}{\lambda}+\left(\frac{a\sin\delta}{E}+b\sin\delta\right)\frac{dE}{d\lambda}=0 \tag{10}$$

显然由（9）式可得：

$$\sin\delta=0$$

则有 $\delta=k\pi$，（k取整数1,2,3…），进而同样由此可得到极值点位置公式（3）和（4）两式。

对于方程（10），由于是一个超越方程，用代数解析方法解此方程比较复杂，这里我们

采取数值运算的方法来求解。

基于上述原理，我们编制了一个计算机程序来确定膜系的光谱反射率极值点位置及其参量，同时利用膜系计算程序计算短波通膜系$G\ (\frac{L}{2}H\frac{L}{2})^7A$的光谱透过率曲线，其结果如（表 2）和（图 1）所示。

表 2　短波通膜系 $G\ (\frac{L}{2}H\frac{L}{2})^7A$ 的部分极值点位置及其参量。

Wave Length(nm)	G_k	E	D(nm)	R %
522.98	1.31	0.92	0	4.12
545.23	1.25	0.82	156.5	14.40
545.93	1.248	0.817	153.11	14.10
547.18	1.246	0.813	147.0	15.30
547.81	1.246	0.812	143.92	15.00
548.46	1.243	0.81	140.75	15.90
549.23	1.24	0.8	136.99	15.67
554.31	1.23	0.78	111.82	17.90
554.93	1.23	0.77	108.7	17.25
555.73	1.226	0.76	104.7	17.90
560.67	1.22	0.74	79.55	15.65
561.4	1.218	0.73	75.75	15.75
575.62	1.19	0.63	0	4.14

由于通带极值点很多，这里只给出主要的与（表 1）相对应的极值点参数。（表 2）中，E为等效折射率，D为等效光学厚度，G_K为相对波数，R为极值点反射率。D为零时代表此时膜层虚设。

曲线（$n_H=2.2$，$n_L=1.46$，$n_g=1.52$，$n_o=1$，$\lambda_o=686$nm）

比较表 1 和表 2 中的计算结果可以看出，用传统方法导出的公式（3）所得到的结果和采用微分方法$\frac{dR}{d\lambda}=0$所确定出的结果存在差异。表现：

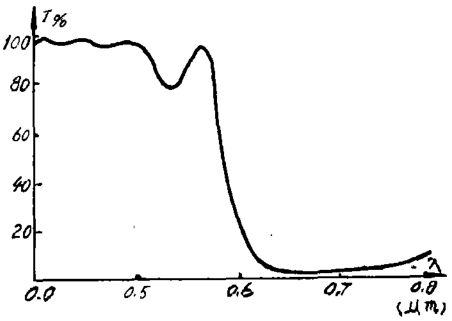

图 1　膜系 $G\ (\frac{L}{2}H\frac{L}{2})^7\ A$的计算光谱特性

（1）用传统方法导出的极值点位置不全，遗失了部分极值点。

（2）传统方法确定的主要结果为次极值点位置，而没有准确地确定出主要极值点波长位置。

（3）由微分方法确定的极值点处的等效光学厚度并不一定为$\lambda'/4$的整数倍。

由此表明由$\frac{dR}{d\lambda}=0$的方法确定通带极值点位置比传统方法具有更好的准确性和全面性。

参 考 文 献

[1] H.A.麦克劳德，光学薄膜技术，国防工业出版社，1974

[2] 刘化文，激光与红外，1987 年第 5 期

A Precise Method for Determination of Entreme Value Position of Pass-band Period Multilayer— The Determination of Pass-band Entreme Value Position and Optimization for Waviness

Zheng Qi Qi Yu

Abstract

According to equivalent theory.It reports several methods for determination of pass-band entreme value position and optimization of waviness for period multilayers. It gives a kind of calculation methods aswellas the enperiment and calculation results for optimized short-wave-passed mutilayer.

Key word, Multilayer, Period multilayer, Entreme value position, Optimization.