

# 等高线图绘制和在工程分析后处理中应用

周 玉 斌

**摘要:** 本文介绍了用计算机绘制等高线图的原理及在工程分析后处理中应用。

## 一、引 言

工程分析是 CAD 的重要环节, 通过工程分析寻求最佳的参数组合以实现优化设计的目的。目前通常采用的分析手段是有限元方法。工程技术人员面临的问题, 除了模型的建立外, 对计算出来的大量的数据, 如何能使工程技术人员很直观方便地对其结果作出迅速评价, 显得十分必要。

等高线图, 以及在此基础上发展的着色表示法, 正是为解决对某些计算结果作出直观迅速评价的一种有力工具。尤其是对采用有限元方法计算应力分布、温度、压力、电磁场等分布问题来说, 是非常有效的。如图(1)所示, 为某结构零件应力集中分布情况, 从图中非常直观的表现出物体在阴影部分处应力集中情况。根据等值线的分布不同进行着色, 可显示出不同的应力区域。

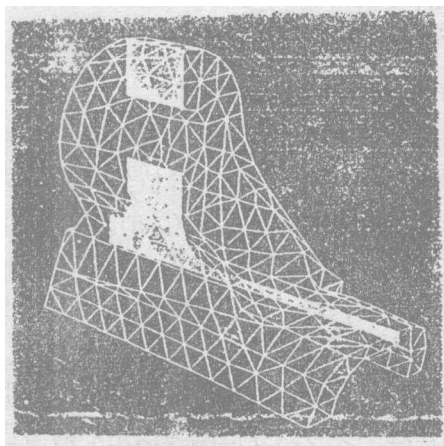


图1 某结构零件应力分布等值线图

## 二、等高线的画法原理

显示一张空间曲面最常用的手段有两种, 一种是透视投影, 它是考察物体形态最形象最直观的图形。另一种就是等高线图, 它虽然不那么直观, 但却可定量的表示出曲面的形状, 它是一种数、形兼备的用途很广的图形。

下面给出绘制等高线的一种方法。

### 1. 函数值的计算

假定  $z = f(x, y)$  是单值函数。所谓等高线乃是曲面的高度为常数的曲线

$$f(x, y) = c \quad (1)$$

在  $xy$  平面上的投影。对于任意给定的一个常数值  $c$ ，要绘制  $f = c$  的等值线。

首先必须认定，我们是在一个矩形区域  $[a, b, c, d]$  中绘制这些曲线的。

其次将此矩形划分为小矩形网络，例如将  $[a, b]$  分为  $n_1$  等分，共分为  $n_1 + 1$  个点，步长为  $h = (b - a)/n_1$ ，将  $[c, d]$  分为  $n_2$  等分，共分为  $n_2 + 1$  个点，步长  $k = (d - c)/n_2$ ，则整个矩形共有  $(n_1 + 1)(n_2 + 1)$  个点，用曲面公式计算出所有点上的  $f$  值。

## 2. 方法的描述

### (1) 等值线与网格棱边相交的条件

设  $A, B$  是棱边的两个端点，那么  $\overline{AB}$  是否与等值线  $z = f(x, y)$  相交，应检验下式

$$(f(A) - z)(f(B) - z) < 0 \quad (2)$$

是否满足。

(2) 式中等于零的情况我们将作为退化处理。如果满足 (2) 式，可以用下式求出交点。

$$\begin{cases} x = x_A + \frac{z - f(A)}{f(B) - f(A)}(x_B - x_A) \\ y = y_A - y_B \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} x = x_A - x_B \\ y = y_A + \frac{z - f(A)}{f(B) - f(A)}(y_B - y_A) \end{cases} \quad (4)$$

### (2) 等值线在网格内的游动

找到等值线的一个起点之后，就可以顺着曲线往前游动，求得等值线与网格各个棱边的交点。现在假设等值线的游动已到达棱边  $\overline{P_1P_2}$ 。等值线与棱边  $\overline{P_1P_2}$  的交点为  $(x_0, y_0)$ ，而曲线与  $\overline{P_1P_2}$  相交前与网格的另一棱边的交点为  $(\zeta, \eta)$ 。称  $\overline{P_1P_2}$  为进入边，其意思是等值线到达某个小矩形时是先到达  $\overline{P_1P_2}$  这个棱边，而后，它将从这矩形的另一棱边离开。显然，对于一个矩形来说，进入边有东、南、西、北四种情况（图 2、3、4、5）。而对于每一种进入边的情况，曲线又都有两种走向，如图 3，进入边是南边，但有  $x_0 - \zeta \geq 0$  和  $x_0 - \zeta < 0$  两种情况。一般地说对于前一种情况，等值线继续前进时，从矩形东边出去的可能性比从西边出去的可能性大。因此我们在进一步考察等值线与该矩形的另三个边有无交点时，其次序应为东—北—西。而第二种情况，进一步考察的次序为西—北—东。但曲线在拐弯时就不按次序，其它情况从图 2、3、4、5 不难推出。

为了确定  $\overline{P_1P_2}$  是所考虑的矩形的哪一棱边，现在引入几个符号，

令  $P_1$  的坐标为  $(x_1, y_1)$ ， $P_2$  的坐标为  $(x_2, y_2)$ 。

$$q = \begin{cases} 1 & \text{当 } x_2 = x_1 \\ 0 & \text{当 } y_2 = y_1 \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} ex_1 = \text{sign}(x_0 - \zeta) \\ ex_2 = \text{sign}(y_0 - \eta) \end{cases} \quad (6)$$

这里规定, 对任意  $x$ ,

$$\text{sign} = \begin{cases} 1 & \text{当 } x \geq 0 \\ -1 & \text{当 } x < 0 \end{cases}$$

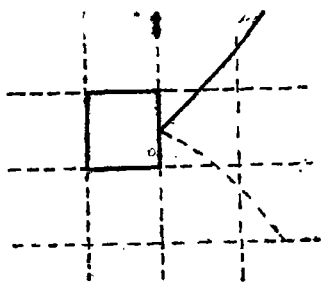


图2 进入边为东

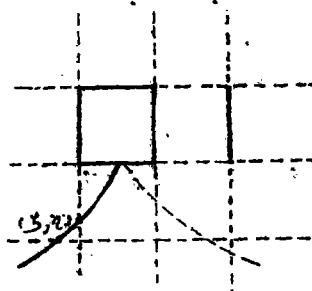


图3 进入边为南

那么

- $q = 1 \quad ex_1 > 0$  时  $\overline{P_1 P_2}$  是矩形的西棱边。
- $q = 1 \quad ex_1 < 0$  时  $\overline{P_1 P_2}$  是矩形的东棱边
- $q = 0 \quad ex_2 > 0$  时  $\overline{P_1 P_2}$  是矩形的南棱边
- $q = 0 \quad ex_2 < 0$  时  $\overline{P_1 P_2}$  是矩形的北棱边。

我们进一步约定:

$$x_1 \leq x_2, \quad y_1 \leq y_2$$

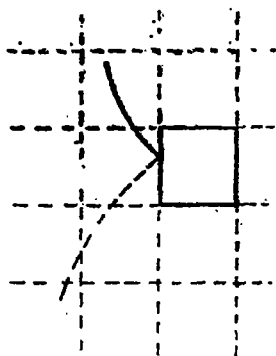


图4 进入边为西

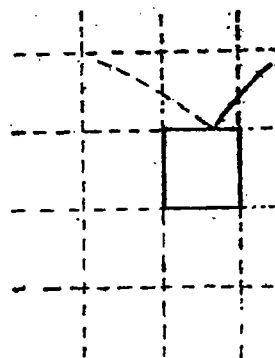


图5 进入边为北

否则的话将  $P_1, P_2$  的符号交换一下即可, 原先的  $P_1$  称为  $P_2$ , 原先的  $P_2$  称为  $P_1$ 。

既然等值线已到达矩形的棱边  $\overline{P_1 P_2}$ , 那么就可以运用图 2、3、4、5 考察棱边的另外三个棱边是否与等值线相交。根据上面讨论的思想, 考察的顺序应该是

当  $q = 1, ex_2 > 0$  时, 为

- ①  $(x_1, y_1) (x_1 + ex_1 \cdot h, y_1)$
- ②  $(x_1 + ex_1 \cdot h, y_1) (x_1 + ex_1 \cdot h, y_2)$
- ③  $(x_1 + ex_1 \cdot h, y_2) (x_1, y_2)$

当  $q = 1, ex_2 < 0$  时, 考察的顺序应为 ③ - ② - ①

当  $q=0, ex_1 > 0$  时, 为

④  $(x_2, y_1) (x_2, y_1 + ex_2 \cdot k)$

⑤  $(x_2, y_1 + ex_2 \cdot k) (x_1, y_1 + ex_2 \cdot k)$

⑥  $(x_1, y_1 + ex_2 \cdot k) (x_1, y_1)$

当  $q=0, ex_1 < 0$  时, 考察的顺序为⑥ - ⑤ - ④。

一旦发现某个棱边的两端点满足 (3) 式, 则用线性插值的办法求出其交点, 将等值线从  $(x_0, y_0)$  连到此交点, 离开所考察的矩形, 这个棱边则作为下一个矩形的进入边, 交点作为新的  $(x_0, y_0)$ , 原先的  $(x_0, y_0)$  成为  $\zeta, \eta$ , 然后使等值线继续游动。一条等值线在游动过程中有两种可能使游动终结, 一种是等值线在矩形  $R[a, b, c, d]$  内是封闭的, 则无论从哪一点出发, 必然返回到出发点。所以一条等值线起点必须给予保留, 以便判断此等值线的游动是否终结。另一种情况是曲线游动至矩形域  $R[a, b, c, d]$  的边界, 则不能继续游动。此时该等值线的另一端通常也在矩形  $R[a, b, c, d]$  的边界上, 因此一般都在矩形的边界上求起始点。

等值线起始点的寻求、分析的识别及等值线在游动中恰好到达网格节点时的处理, 这几种情况的讨论详见<sup>[1]</sup>。

利用此方法在 HP-85 微机 上绘制的等高线图 的例子如图 6 所示。由于 HP-85 微机 内存太小, 绘图时取的网格点较少, 所以图形不太光滑。

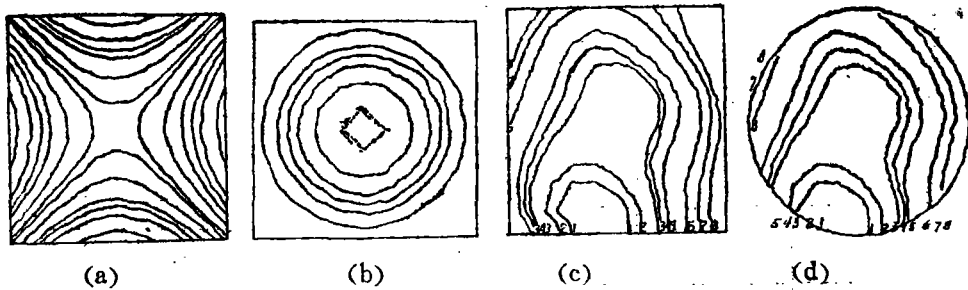


图 6 等高线图

### 三、等高线图的应用

等高线图不仅可以作为工程分析后处理, 而且还可以广泛地用于图像处理, 统计处理等等。例如, 等高线图在数字干涉仪中可以用来评价干涉图的波面面形, 从图中可分析出干涉图波面面形, 哪里像差大, 哪里像差小, 于是可对干涉图做出正确评价。

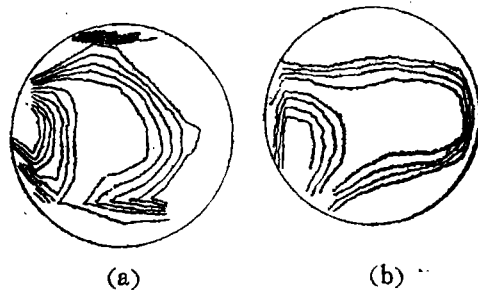


图 7 干涉图的波面等值线图

综上所述, 等高线图在很多领域中都有广泛的应用。

参 考 文 献

[1] 杨学平, 计算机绘图, 电力工业出版社, 1980.2

**Contour Drawing and Its Applications in the Post-processing of  
the Engineering Analysis**

Zhou Yubin

**Abstract**

This paper describes the principle of the contour drawing by a computer and its application in the post-processing of the engineering analysis.