

多体双挠臂空间滑道连接系统的几个动力学问题及其激光机器人应用

江颖祥

(吉林工学院)

摘要: 由本文获得之动力学, 控制方程物理意义明显直观, 并使程序也规范方便, 使多体力学三种典型运动之错综耦合, 一目了然。文中约束关系复杂, 对之作了重点的妥善处理。对于困难的Stiff方程, 建议了有效的 Gear 解法。对结果除四点分析外, 并对挠臂非自然坐标向自然坐标参数方程转换之可能性作了估计分析。此外对未实践可能出现的中曲率挠臂中之非线性因素及其麻烦作了分析。

一、前言

多体力学是近年发展起来的一种新的力学层次, 现代工业中各种机械, 如汽车、飞机、机器人以至精密机床等。只要对精密度的要求提高到一定程度, 其规律无一不受到多体力学的支配。

图1所示, 现代航天器中, 机械手的轨迹问题。原设计为直线轨迹, 不料因挠性及多体两种因素所致, 结果面目全非, 因而失败, 可见多体力学之重要性。

约束问题是多体力学领域中相当困难的问题之一, 而空间曲线滑道连接尤有复杂之点。李德昌曾对此作了详尽研究, 其论述见^[1]。他研究的是单挠臂情况。

本文引用了该文之运动学关系及其函数 ψ , 在理论上着重于解决更为复杂的双挠臂情况。所用动力学方法, 与该文之Kane方法完全不同, 此外还着重讨论了几个问题。

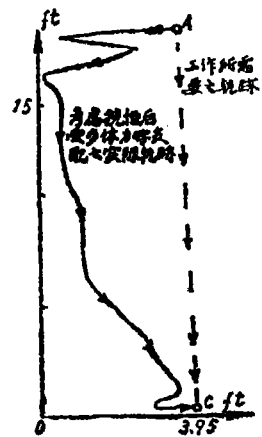


图1 受挠性影响之轨迹偏移

二、系统运动学概貌及主要公式简介

1. 该系统运动学关系异常复杂, 主要可阅^[1], 其次可参阅^[3]。

图1中 $y(s)$ 为描绘曲臂之向量函数, s 为弧长。向量基: $g_1 = y'(s)$, $g_2 = y''/k$, $g_3 = g_1 \times g_2$ 小曲率下, 曲率 $k = |y''|$, $(\quad)' \frac{\Delta}{ds} \frac{d(\quad)}{ds}$ 向量基 g_i ($i=1, 2, 3$) 对于刚架 $bc(k)$ 之相对角速度为 ω , 可求得 $\omega_1 = \tau \dot{s}$, $\omega_2 = 0$, $\omega_3 = k \dot{s}$ (1)

τ 为挠率, 它对于本问题关系密切。

2. 关于轨道挠性之影响

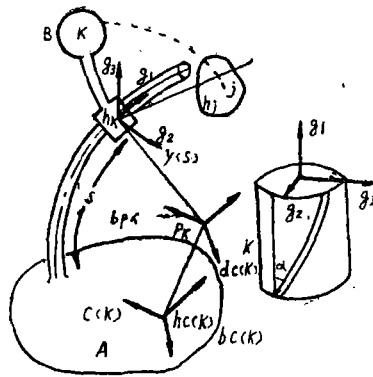


图2 多体双挠臂内滑轨系统分析图

变形中断面被视为刚性平面，且视为始终垂直于中心曲线之切线。 $u(s, t)$ 代表中心线上点之变形位移， $u(s, \zeta, t)$ 代表中心线以外任意点 A 之变形位移。 A 之位置由 ζ 来表示。凡变形后之量用 (\sim) 表示之。考虑到相当复杂的位移关系后得到：

$$u(s, \zeta, t) = u(s, t) + (g_1 \times \tilde{g}_1) \times \zeta + \theta g_1 \times \zeta \quad (2)$$

$$u(s, \zeta, t) = \sum_{n=1}^{NM_K} [\psi_n - \zeta \cdot \psi_n' y' + \theta_n y' \times \zeta] \eta_n \quad (3)$$

其中 η 为模态坐标。 ψ 及 θ 各自代表弯曲及扭转两个方面。

$$\text{定义 } \tilde{\Psi}_n \triangleq \psi_n - \zeta \cdot \psi_n' y' + \theta_n y' \times \zeta \quad (4)$$

$(n = 1, \dots, \dots, NM_K)$

$$u(s, \zeta, t) = \sum \tilde{\Psi}_n \eta_n = \tilde{\Psi} \eta \quad (5)$$

在以上公式中，采用了线性化原则。(4) 以及 (5) 关系式将直接影响到多体力学中的复杂运动耦合公式从而给其动力控制方程施加相当深刻的影响。

而本文则为讨论更加复杂的双挠臂多体系，故需要照顾的方面更多。

3. 变形后的角速度关系式

$\tilde{\omega}$ 在变形后变为 \tilde{g} ， $\tilde{g} = Bg B$ 与 u_2' 、 u_3' 及 θ 等有关。

$$\begin{cases} \tilde{\omega}_1 = (\tau + \gamma + k u_3' + \theta') \dot{s} + \sum \theta_n \dot{\eta}_n \\ \tilde{\omega}_2 = (k \theta - u_3'') \dot{s} - \sum \psi_n' \dot{\eta}_n \\ \tilde{\omega}_3 = [k(1 - u_1') + u_2''] \dot{s} + \sum \psi_n' \dot{\eta}_n \end{cases} \quad (6)$$

此外，尚有套筒刚架 b_s 在变形前后对于刚架 $c(k)$ 的角速度：

$$\omega^{k(c(k))} = [(\tau + \gamma) g_1 + k g_2] \dot{s} \quad (7)$$

$$\tilde{\omega}^{k(c(k))} = \tilde{\omega}_1 g_1 + \tilde{\omega}_2 g_2 + \tilde{\omega}_3 g_3 \quad (8)$$

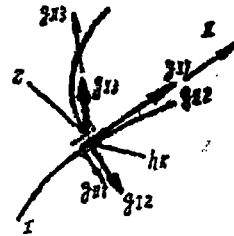


图3 双挠臂套筒约束关系分析图

三、动力学分析之准备工作

1. 位移矢量、速度矢量

结合图 2 看图 4

在 O^i 及 O^k 放置各自的连体坐标系. 若以 A 代表旋转变换矩阵

$$A = [I + \tilde{V} \sin \theta + 2\tilde{V} \sin^2 \frac{\theta}{2}] \quad (9)$$

i 物上之点记为 $P^{(*)}$, 它可以是躯体 (另记为 b) 上之点, 也可能是曲臂 (另记为 c , 曲线之意) 上之点, 即 h_s .

k 物上之点记为 $P^{(**)}$, 今暂时舍去 $(*)$ 及 $(**)$

$$i \text{ 物上: } r_P = R_o i + A^i u_o^{ij} + A_i u_j^{ij} \quad (10)$$

$$r_P = R_o i + A^i u^{ij} \quad (11)$$

如为一般躯体上点:

$$\dot{r}_P = \dot{R}_o i + \dot{A}^i u^{ij} + A u_j^{ij} \quad (12)$$

$$\text{令 } B_i \triangleq B_i(\underline{\theta}^i, u^{ij}) \quad (13), \quad \text{其中欧拉四元素 } \underline{\theta} \triangleq [\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3] \quad (14)$$

则 $\dot{A} u^{ij} = B^i \dot{\underline{\theta}}^i$ (15), 具体说来:

$$B^i(\underline{\theta}^i, u^{ij}) \triangleq [(A^i u^{ij})_{\theta_0}, (A^i u^{ij})_{\theta_1}, (A^i u^{ij})_{\theta_2}, (A^i u^{ij})_{\theta_3}] \quad (16)$$

$$\text{于是, } \dot{r}_P = \dot{R}_o i + B^i \dot{\underline{\theta}}^i + A u_j^{ij} \quad (17)$$

P 代表 i 物上单元 j 中之点, 采用四元素后应把 A 亦化为四元素式. 如果 (1) P 乃 i 物上躯体部份 b 上之点, 则

$$u_j^{ij} = N^{ij} U^{ij} \quad (18) \quad N^{ij} \text{ 代表有限元中形函数.}$$

$$\text{故 } \dot{r}_{Pb} = \dot{R}_o i + B^i \dot{\underline{\theta}}^i + A^i N^{ij} \dot{U}^{ij} \quad (19)$$

$$\text{也即 } \dot{r}_{Pb} = [I B^i A^i N^{ij}] [\dot{R}_o^i \dot{\underline{\theta}}^i \dot{U}^{ij}]^T \quad (20)$$

(2) 如 P 为 i 物上挠臂部份 c 上之点 h_s ,

$$\text{则 } u_j^{ij} = u(s, \xi, t) = \sum_{n=1}^{NM_s} [\psi_n - \xi \cdot \psi'_n \cdot y' + \theta_n \cdot y' \times \xi] \eta_n$$

$$= \sum_{n=1}^{NM_s} \psi_n^{ij} \eta_n^{ij} = \psi^{ij} \eta^{ij} \quad (21) \quad \psi \text{ 为模态函数}$$

$$\text{故 } \dot{r}_{Pc} = \dot{R}_o i + B^i \dot{\underline{\theta}}^i + A^i \psi^{ij} \dot{\eta}^{ij} \quad (22)$$

$$\text{也即 } \dot{r}_{Pc} = [I B^i A^i \psi^{ij}] [\dot{R}_o^i \dot{\underline{\theta}}^i \dot{\eta}^{ij}]^T \quad (23)$$

如 P 为 k 物上之点, 只需把 i 换成 k 即可.

2. 单元动能势能及质量阵、刚度阵

今求 i 物上 j 单元之动能 (分 $T_{b,j}$ 及 $T_{c,j}$ 两种)

$$T_{b,j} = \frac{1}{2} \int_{V_b^j} \rho_b^{ij} (r_{Pb})^T \dot{r}_{Pb} dV_b^j = \frac{1}{2} \dot{q}_b^{ijT} M_b^{ij} \dot{q}_b^{ij} \quad (24)$$

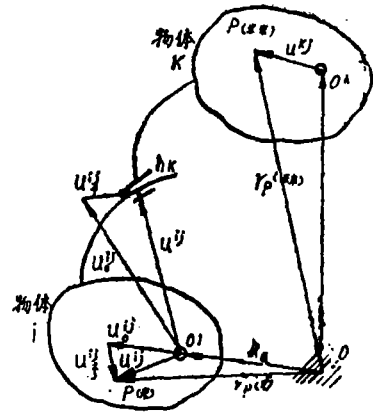


图 4 多体系统位移分析图

其中 $q_0^{ij} = [R_0^{i\tau} \theta^{i\tau} U^{ij\tau}]^T$ (25)

$$T_0^{ij} = \frac{1}{2} \int_{V_0^j} \rho_0^j (\dot{r}_{P_0^j})^T \dot{r}_{P_0^j} dV_0^j = \frac{1}{2} \dot{q}_0^{ij} M_0^{ij} \dot{q}_0^{ij} \quad (26)$$

由此可求得 M_0^{ij} 及 M_0^{ij}

$$M_0^{ij} = \int_{V_0^j} \rho_0^j \left[\begin{array}{cc|cc} I^{(RR)} & B^{(R\theta)} & A^i N^{ij} & (RU) \\ B^{i\tau(BR)} B^{i\tau} B^{(R\theta)} & & B^{i\tau} A^i N^{ij} & (\theta U) \\ \hline N^{ij\tau} A^{i\tau(U R)} N^{ij\tau} A^{i\tau} B^{(U\theta)} & & N^{ij\tau} A^{i\tau} A^i N^{ij\tau(UU)} & \end{array} \right] dV_0^j \quad (27)$$

$$M_0^{ij} = \int_{V_0^j} \rho_0^j \left[\begin{array}{cc|cc} I^{(RR)} & B^{(R\theta)} & A^i \Psi^{ij} & (RU) \\ B^{i\tau(BR)} B^{i\tau} B^{(R\theta)} & & B^{i\tau} A^i \Psi^{ij} & (\theta U) \\ \hline \Psi^{ij\tau} A^{i\tau(U R)} \Psi^{ij\tau} A^{i\tau} B^{(U\theta)} & & \Psi^{ij\tau} A^{i\tau} A^i \Psi^{ij\tau(UU)} & \end{array} \right] dV_0^j \quad (28)$$

($A^{i\tau} A^i = I$)

四点分析

(1) 由此可见使用本文方法之第一个明显优点即为说明大范围内之刚体平动 (R)、刚体转动 (θ) 及物体变形运动 (U 或 η) 三者存在着明显的耦合效应, 在一般的 O^i (O^a) 取法及一般取轴方向下 M 一般是满阵。

(2) 注意 M_{RR} 及 M_{UU} 、 $M_{\eta\eta}$ 均为与时间无关之常数阵 (因 $A^T A = I$) 其余子块均与时间有关, 因 A 、 B 中均有随时间而变之 θ 。(或由变化着之欧拉参数来看)

(3) M 之实际计算是复杂的即以 A 而言, 乃一个由欧拉参数表示的 3×3 的矩阵。今仅描述其对角元素 A_{ii} 有计算式如下:

$$A_{ii} = 2(\theta_0^2 + \theta_i^2) - 1 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (29)$$

(4) 关于计算躯体部份质量阵 (j 单元的) 有关形函数 N 问题:

一般可灵活地采用各种等参元, 如今估从二十结点之等参元而言

$$\begin{aligned} N_i = & (1 + \xi_0)(1 + \eta_0)(1 + \zeta_0)(\xi_0 + \eta_0 + \zeta_0 - 2)\xi_i^2\eta_i^2\zeta_i^2/8 + (1 - \xi^2)(1 + \eta_0)(1 + \zeta_0) \\ & \cdot (1 - \xi_i^2)\eta_i^2\zeta_i^2/4 + (1 - \eta^2)(1 + \zeta_0)(1 + \xi_0)(1 - \eta_i^2)(1 - \eta_i^2)\xi_i^2\zeta_i^2/4 \\ & + (1 - \zeta^2)(1 + \xi^2)(1 + \eta_0)(1 - \zeta_i^2)\xi_i^2\eta_i^2/4 \quad (i = 1-20) \end{aligned} \quad (30)$$

势能分析:

$$\Pi_0^{ij} = \frac{1}{2} U^{ij\tau} k_{uv}^{ij} U^{ij} = \frac{1}{2} q^{ij\tau} k^{ij} q^{ij} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} 2\Pi_0^{ij} = & \int \int \int E \left\{ \left[\sum (\psi_{i2}' - \xi\psi_{i2}'' + \theta_i k \xi \sin\beta) \eta_i \right]^2 + 1/2 (\xi \sum \theta_i' \eta_i)^2 \right\} / (1 \\ & - k \xi \cos\beta) \xi d\beta d\xi ds^{(1)} \end{aligned} \quad (32)$$

四、其他动力学步骤

1. 单个物体带乘子拉氏方程

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T^i}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial T^i}{\partial q^i} + \frac{\partial \Pi^i}{\partial q^i} + c_{\lambda^i} \lambda^i = Q^i \quad (33)$$

$$T^i = \sum_j T^{ij}, \quad \Pi^i = \sum_j \Pi^{ij}, \quad \Pi^i = \Pi_b^i + \Pi_c^i$$

Π_b^i 属躯体部份, 只要按有限元选定具体等参元就可查出各自 Π_b^{ij} 结果由拉氏方程得出 i 物之下列微分方程组及代数方程组之联立组

$$\begin{cases} M^i \ddot{q}^i + k^i q^i + c_{e_i}^T \lambda = Q^i + F^i \\ c(q^i, t) = 0 \end{cases} \quad (34)$$

所以由本方法得出之微分方程有明确规范且属众所熟悉之形式, 此亦为一个优点。

$$c_i \frac{\Delta}{\Delta} \left[\frac{\partial c}{\partial q_1} \frac{\partial c}{\partial q_2} \dots \frac{\partial c}{\partial q_n} \right] \quad (35)$$

$$\text{而 } c(q, t) = [c_1(q, t), c_2(q, t) \dots c_m(q, t)]^T = 0 \quad (35)$$

$$(34) \text{ 中 } F^i: F^i \frac{\Delta}{\Delta} \frac{\partial T^i}{\partial q^i} - \dot{M}^i \dot{q}^i \quad (37) \quad \text{此 } F^i \text{ 比较特殊且相当重要。}$$

2. 多体系统动力学控制方程

上面写出了 i 物的方程组, 同理可写出其它各物之方程组再将其对应矩阵组合起来, 并加入对应约束方程, 可得:

$$\begin{cases} M \ddot{q} + kq + c_e^T \lambda = Q + F \\ c(q, t) = 0 \end{cases} \quad (37)$$

$$\text{另外, 对于每个物体如 } i, \text{ 其欧参都有限止 } \sum_0^3 \theta_i^i = 1 \quad (38)$$

这是一组高度非线性常微分方程和非线性代数方程组之组合。在多体运动中我们看到互相作用的复杂子过程, 其变化速度是不同的, 且变化速度相差很大。描述这种现象的常微分方程被称为 Stiff 方程, 即具有刚性之意。在多体动力学中通常刚体运动是慢变的, 而挠性体振动通常是快变的。

联系到数值解的问题, 当快变分量已趋稳定时, 应该且似可以用较大的步长积分。但是经过深入的理论研究以及具体实践发现很多方法出现数值不稳定现象。结果误差急剧增加, 真解反而被掩盖了, 以致无法继续求解, 对于 Gear 方程, Dahlquist, Butcher 及 Gear。都做了许多重要工作。作者建议使用 Gear 解法, 因为直到目前还是它的效果最好。但是 Stiff 方程还有不少问题亟需深入研究。

五、双挠臂多体系统动力学的复杂性、约束问题之重点处理以及其它问题

多体系统动力学是现代的力学产物, 挠性臂滑道连接又在相当程度上加重了其运动学、动力学的难度。就上面 (3) 式而言, 对于臂 I 而言:

$$u^I(s, \zeta, t) = \sum_{n=1}^{N \times I} [\psi_n^I - \zeta_I \psi^{I'} y^{I'} + \theta_n^I y^{I'} \times \zeta_I] \eta_n^I \quad (39) \quad \text{已很复杂, 再加上 } u^I(s, \zeta, t)$$

$$= \sum_{n=1}^{NM} [\psi_n^{\text{II}} - \xi_{\text{II}} \psi_n^{\text{II}'} y^{\text{II}'} + \theta_n^{\text{II}} y^{\text{II}'} \times \xi_{\text{II}}] \eta_n^{\text{II}} \quad (40)$$

其综合的复杂度可想而知, 除此之外, 还有一个关键性的约束问题更加重了以上问题。其正确处理如下:

$$\tilde{\omega}_{gI} = \tilde{\omega}_{gII} \quad (41)$$

$$\sum_{k=0}^3 \theta_k^i = 1 \quad (38)$$

$$R_0^i + A^i u_0^{ij} + A^i u_k^{ij}(s, t) - (R_0^k + A^k u_0^{kj} + A^k u_k^{kj}(s, t)) = 0 \quad (42)$$

Z 为II之端、对于正交型套筒: $g_{I1} \times g_{II2} = 0 \quad (43)$

必须注意在(41)中左右两边角速度必须对于同一基准, 但作者强调前面所求出之 gI 及 gII 的角速度因 $y(s)$ 定义之故均为对应于各自刚架自身的。参见图 3。

六、关于双挠臂激光机器人曲臂参数方程转换及中曲率挠臂非线性困难3个问题之分析

1. 双挠臂激光机器人。

见图 5, A 处为套筒 C 处为激光头。

此小节仅为说明双挠臂式机构之可能应用情况。对于整个机构之构造并未着意加以设计, 主要偏重于力学计算大意。在计算上要注意 $\tilde{\omega}gI$ 、 $\tilde{\omega}gII$ 、 $uI(s, \xi, t)$ 、 $uII(s, \xi, t)$ 等六个关系式。可利用前面全部原理及有关各式。但臂 II 端点 z 现不在套筒中心而在 II 之端、对此, 在计算时要适当注意, 正确处理。

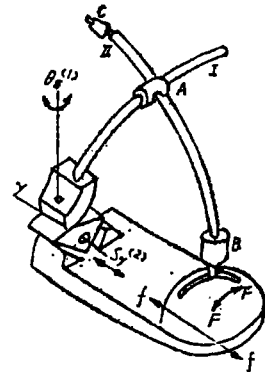


图 5 双挠臂激光机器人

2. 曲臂参数方程转换问题

本文开始之挠臂曲线向量函数 $y(s)$ 是以自然坐标 s 为基础的, 此点非常明智。因模态函数 $\psi(s)$ 、伸长率 e 及挠臂中心线向量基 g_i 之角速度 $\omega_1 = rs$ 及 $\omega_3 = ks$ 均决定于 s 它适合于 II 型之曲线参数方程组。但不少情况曲线方程常以型 (I) 出现, (t 非 s),

$$\text{如 } x = a \cos \theta, \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \text{ (I)} \\ z = z(t) \end{cases}, \begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s) \text{ (II)} \\ z = z(s) \end{cases} \quad y = a \sin \theta, z = \pm \frac{h}{2\pi} \theta$$

就存在一个 I 型向 II 型转换的需要及可能性问题, 经我们研究只要曲线为光滑曲线则必存在下列转换积分关系:

$$t = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} \cdot d\omega \quad (44)$$

ω 为积分变量, 虽然此积分未必定可用初等函数

(数量亦未必一定有限) 加以表示, 因此这个转换在理论上虽确实解决了, 但实际上有时可能很麻烦, 特另写一文以阐述有关一切。

3. 中曲率挠臂非线性困难

此困难发生于挠臂曲线有待于设计者, 如有优化要求者。

分析: (1) 原来小曲率情况下, [1] 及本文都略去各种二次项, 由原来公式之中可知 $g_2 \approx y''/k$, 即 $k \approx |y''|$, 此处 $y'' \triangleq \frac{d^2 y}{ds^2}$ 以二维为例: $k \approx \frac{d^2 y}{dx^2}$ 但非 $\frac{d^2 y}{ds^2}$ 但 $ds =$

$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \therefore ds \approx dx$. 因此可化出 $k = \frac{d^2y}{ds^2} = y''$. 本节以 $y = y(x)$ 为前提

(2) 中曲率情况下: 保留 $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ 但舍去 $\left(\frac{dy}{dx}\right)^4$ 以上项.

$$k = \frac{d^2y}{dx^2} / \left[1 + \frac{3}{2} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \dots \right] \approx \frac{d^2y}{dx^2} \left[1 - \frac{3}{2} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \right] \quad (45)$$

现在连 $ds \approx dx$ 也不存在, 故 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 不能代以 d^2y/ds^2 , 这会起曲线无数方程的麻烦, 更何况 k 中现在还有非线性因子 $\left[1 - \frac{3}{2} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \right]$ 更有甚者, 挠率 $\tau = (y'' \cdot y \times y'') / k^2$ 式中 $y' = \frac{dy}{dx}$ 今分母为 k 之平方, 而 k 已出现非线性因子, 故挠度受影响看来更大, 结果动力学方程之建立, 其结果及解法, 必会更加复杂化. 鉴于实践中迟早会出现中弯臂, 甚至大弯臂, 故多体力学工作者亟应适当早作研究.

七、多体系动力学采用模态综合法之初步构想

由于多体系往往包括多个构件, 所以比一般结构更有必要采用及充分发挥模态综合法的优点.

1. 估计比较有效的方法之一: 对于人们相当感兴趣的Tissrend框架, 它与刚体模态框架的贴合, 可以预计若采用自由界面主模态集, 并补以剩余附着模态集, 结果所得之完备集, 将比较有效.

2. 应突出各种阻尼情况下的多体模态研究. 对于具有重要理论及实用价值之复模态问题宜多加重视.

3. 应把非线性模态之现有结果应用于多体系并结合本体系之特点往前开拓之, 如中弯臂非线性问题.

4. 在多体系中, 努力加强模态分析综合与模态试验理论及技术之综合配合运用.

八、结 论

由于当今有些机械手及机器人速度相当高, 而加速度甚至提高接近半个至一个量级, 且位置精度又高, 尤其体现在某些激光机器人上. 所以今后必导致对多挠体力学有更大需求, 包括空间曲线滑轨连接如果被导引的部件形体较大, 中间又有一定障碍, 则第二挠臂就很必要. 由此可见双挠臂多体动力学之重要及前景. 再者, 若深入研究, 则套筒方向约束上有内容.

参 考 文 献

- [1] Dechang Li, J. Guidance, Vol.10.No.3.May-June 1987, pp299-306
- [2] A.A.Shabana, Computer and Structure Vol.20 No.4 pp737-744, 1988
- [3] Y.X.Jiang, Delivered to Conference of Dynamics, Vibration and Control, ICDVC, 1989
- [4] Dynamics of Multibody Systems IUTAM/IFTOMM Symposium, Udine, Italy, September 16-20, 1985

**Several Dynamic Problems on Multibody Double Flexible
Spatial Curvilinear Tracks with Relative Translation
and the Application of Laser Robot**

Jiang Yingxang

Abstract

The dynamic and control equation obtained in this paper possesses a direct and obvious meaning and yields good result with the emphasis on the complex constraint relations. The Gear method is suggested for the solution of such complicated Stiff-type equation. Non-linear trouble due to medium track curvature is carefully studied. The problem of transformation between two kinds of spacial track center line parameter equations is also treated.