

# 驱动装置和负载的数学描述

邓士衡 韩荣久

**摘要:** 本文从基本的力学观点出发, 推导了大型光电经纬仪驱动装置和负载结构的数学模型, 并和实验结果对比, 具有良好的一致性, 本文同时提出了组合频率、反谐振峰等概念。利用该数学模型可在CAD工作站上实现光电经纬仪的动力学仿真。

## 一、前言

现代的光电经纬仪向着多功能、高精度的方向发展, 其结构愈来愈复杂, 既要求高精度又要求具有良好的动态性能, 这就给光电经纬仪的设计和制造提出了更高的要求, 在设计阶段通过理论分析和模型实验预示出所选用的驱动装置和负载结构的动态特性, 已经是设计阶段必不可少的了, 由于计算机的广泛使用, 结构有限元分析方法, 数字信号处理技术和系统辨识等方法的发展, 使结构动态分析和动态设计的应用成为可能。对所选定的驱动装置和结构进行模型化, 建立物理数学模型, 对一个大型复杂结构问题是非常突出的, 模型的规模, 模型物理参数的确定对实际结构力学性能的精度的影响都是直接的。本文描述了一种传统的计算方法, 并通过模型实验进行验证。

## 二、负载动力学

假定主动力矩加在马达的转子上, 外扰力矩是加在负载的转轴上。其示意图和动力学方程为:

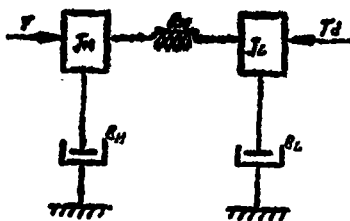


图1 负载动力学示意图

$$T = J_M \cdot \ddot{\theta}_M + B_M \cdot \dot{\theta}_M + K_M (\theta_M - \theta_L) \quad (1)$$

$$T_d = -K_M (\theta_M - \theta_L) + J_L \ddot{\theta}_L + B_L \cdot \dot{\theta}_L \quad (2)$$

先略去外扰力矩  $T_d$ , 阻尼  $B_M, B_L$ , 并引入拉氏算子则方程可简化为:

$$T = J_M S^2 \theta_M + (\theta_M - \theta_L) \cdot K_M \quad (3)$$

$$K (\theta_M - \theta_L) = J_L \cdot S^2 \theta_L \quad (4)$$

由(4)式  $K\theta_m = (J_L S^2 + K_M)\theta_L$

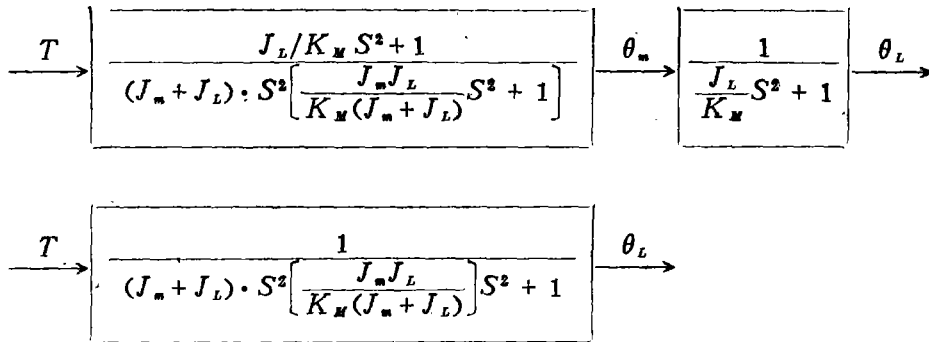
$$\frac{\theta_L}{\theta_m} = \frac{K_M}{J_L S^2 + K_M}$$

$$\frac{\theta_L}{\theta_m} = \frac{1}{\frac{J_L}{K_M} \cdot S^2 + 1} \quad (5)$$

$$\frac{\theta_m}{T} = \frac{J_L/K_M \cdot S^2 + 1}{\frac{J_m J_L}{K_M} \cdot S^4 + (J_m + J_L) S^2}$$

$$\frac{\theta_m}{T} = \frac{J_L/K_M S^2 + 1}{S^2 (J_m + J_L) \cdot \left[ \frac{J_m J_L}{K_M (J_m + J_L)} S^2 + 1 \right]} \quad (6)$$

其方框图为:



式中:

$\theta_L$ : 负载转角

$\theta_m$ : 马达转角

$T$ : 驱动力矩

$T_d$ : 外扰力矩

$K_M$ : 负载结构刚度

$B_L$ : 负载阻尼系数

$B_M$ : 马达阻尼系数

$J_L$ : 负载转动惯量

$J_M$ : 马达转子转动惯量

$S$ : 拉普拉斯算子

由上面的推导可以看出反映负载动力学特性的二个频率, 其一为

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{K_M}{J_L}} \quad (7)$$

它相当于把马达的输入端固定, 由负载刚度和负载惯量形成的弹性——惯量振动系统频率是负载的基本谐振频率。



图2 基本谐振频率

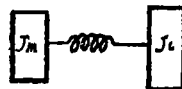


图3 结构谐振频率

另一个是 
$$\omega_1 = \sqrt{\frac{K_M(J_M + J_L)}{J_M \cdot J_L}} \quad (8)$$

它由马达本身惯量  $J_M$  及负载惯量  $J_L$  和负载的弹性系数所形成的双质量振动系统频率，一般称作负载的结构频率。下面证明，这个频率在考虑到马达本身的刚度之后，将不再独立存在。

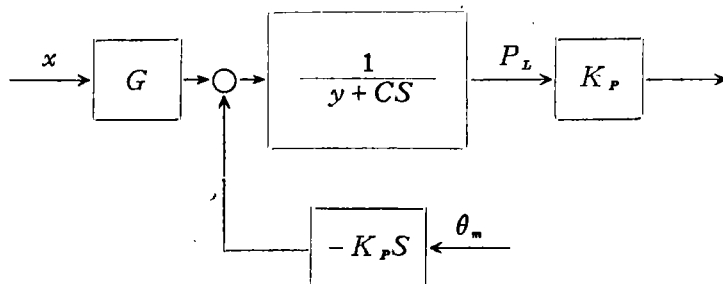
马达驱动部分的动力学方程为：

$$T = K_p P_L \quad (9)$$

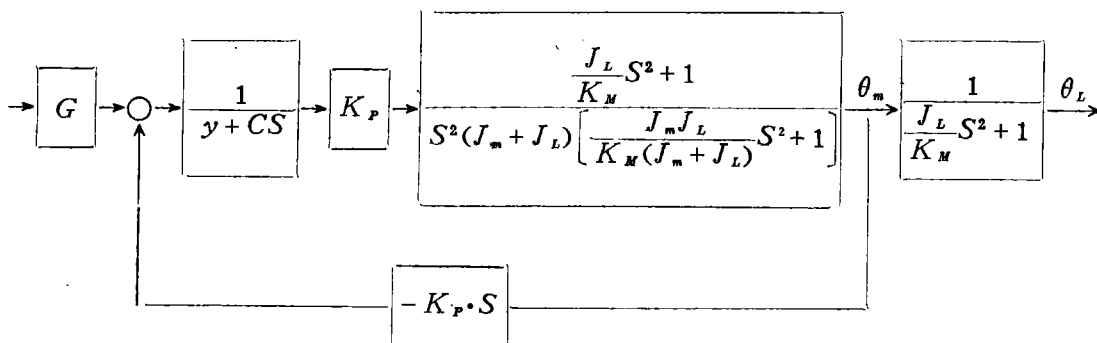
$$F_L = K_p \cdot S \theta_m = Gx - (y + CS) \cdot P_L$$

$$P_L = \frac{1}{y + CS} (Gx - K_p \cdot S \theta_m) \quad (10)$$

其方框图为：



和上面的负载联起来，其方框图为：



方程联立求解后则得到驱动—负载方程及其方框图。

上面公式中，所使用的符号意义为：

$K_p$ ：马达力矩常数

$C$ ：马达刚度系数

$G$ ：放大器增益

$y$ ：放大器承载能力系数

$x$ : 放大器输入当量位移

$P_L$ : 马达负载势位降

$S$ : 拉普拉斯算子

$$\frac{\theta_m}{GX} = \frac{1}{K_P^2} \left( \frac{J_L}{K_M} S^2 + 1 \right) / \left\{ \frac{C}{K_M K_P^2} J_M J_L S^4 + \frac{y}{K_M K_P^2} J_M J_L S^3 + \left[ \frac{J_L}{K_M} + \frac{C}{K_P^2} (J_M + J_L) \right] S^2 + \frac{y}{K_P^2} (J_M + J_L) S + 1 \right\} \quad (10)$$

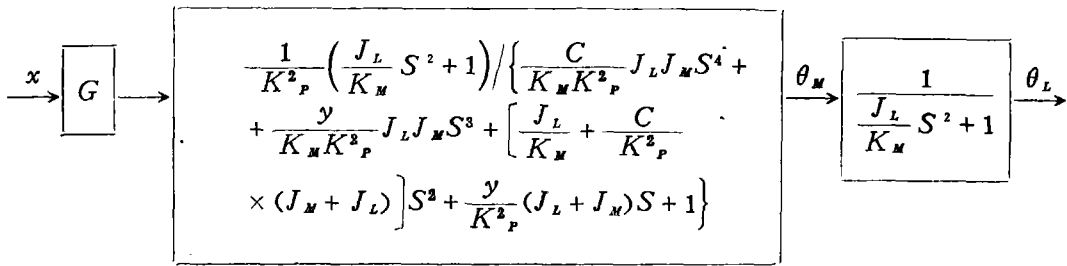


图4

由公式 (10) 及方框图 4 可知, 对于一个二级耦合系统, 原负载部份的结构谐振频率  $\omega_1 = \sqrt{\frac{K_M(J_M + J_L)}{J_M \cdot J_L}}$  在加入马达之后, 已不复独立存在了。它和马达的刚度组合在一起, 形成了一个四次方程式, 对方程求解则可得到两个频率  $\omega_1$  和  $\omega_3$  及其对应的阻尼系数  $\zeta_1$  和  $\zeta_3$ 。这时的  $\omega_1$  和  $\omega_3$ , 既不是马达的固有频率, 也不是负载结构频率, 而是二级耦合系统的组合频率。

若考虑阻尼  $B_M$ 、 $B_L$  则方程式及方框图为:

$$\begin{aligned} \frac{\theta_m}{GX} = & K_P \left( \frac{J_L}{K_M} S^2 + \frac{B_L}{K_M} S + 1 \right) / S \left\{ \frac{C}{K_M} J_L J_M S^4 + \left[ \frac{y}{K_M} \right. \right. \\ & \left. \left. + J_L J_M + \frac{C}{K_M} (J_L B_M + J_M B_L) \right] S^3 + \left[ \frac{y}{K_M} (J_L B_M \right. \right. \\ & \left. \left. + J_M B_L) + \frac{C}{K_M} (J_L K_M + J_M K_M + B_L B_M) + \frac{K_P^2}{K_M} J_L \right] S^2 \right. \\ & \left. + \left[ \frac{y}{K_M} (J_L K_M + J_M K_M + B_L B_M) + \frac{C}{K_M} (B_L + B_L) + \frac{K_P^2}{K_M} B_L \right] S \right. \\ & \left. + \left[ K_P^2 + y(B_L + B_M) \right] \right\} \quad (11) \end{aligned}$$

$$\frac{\theta_L}{\theta_m} = \frac{1}{\frac{J_L}{K_M} S^2 + \frac{B_L}{K_M} S + 1} \quad (12)$$

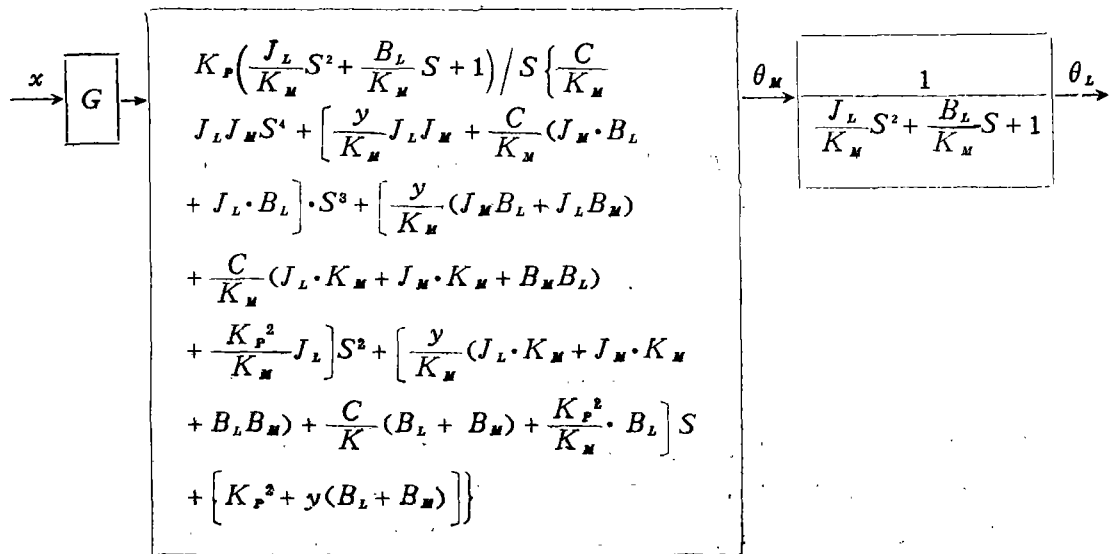


图 5

上面的方程 (11) 和 (12) 及方框图 5 是驱动装置加上负载后的传递函数。即我们所描述的物理数学模型。我们注意到  $\frac{J_L}{K_M} S^2 + \frac{B_L}{K_M} S + 1$ ，在方程中处于分式的分子，即在马达的输出端还出现一个  $\omega_2 = \sqrt{\frac{K_M}{J_L}}$ 。在 Bode 图上其尖峰将向下，所以  $\sqrt{\frac{K_M}{J_L}}$  对该系统将出现一个反谐振峰， $\omega_2$  为系统的反谐振频率，在数值上等于这个二级耦合系统的基本谐振频率。我们在实验中测得了这个反谐振峰的存在及反谐振频率，并和计算结果接近。

### 三、结 束 语

上面我们推导了二阶耦合驱动装置——负载的数学模型，在一定条件下，例如质量和弹性环比较集中时和实验结果具有较好的一致性，随着科学技术的发展，要采用更为详细的计算方法——有限元分析，但文中所提出的几个基本问题却是共同的，具有普遍意义。

数学模型确定之后，就可进行编程并进行模拟仿真，变换参数，寻求敏感性参数，最后则提出有根据的改进措施。对大型光电经纬仪，提高其基本谐振频率仍是我们在设计中致力追求的。同时，从模型方程我们可以看出， $J_M, J_L, B_L, B_M \dots$  等参数的选取。在结构上作适当的变化，则可以改善负载结构的动特性。例如  $B_L$  是负载阻尼，一般结构常很小，若人为的加入阻尼环节、对改善  $\omega_1$ ，提高结构负载的频率具有一定的实际意义。

本工作得到唐九华同志和干东英同志的指导，在这里表示感谢。

#### 参 考 文 献

- [1] D.V.Stallaed; IEEE transaction on Application and industry. 71.1964.
- [2] C.H.Wilts; Principles of Feedback Control Addison-wesley Publishing Company, INC.1960
- [3] D.R.Wilson; Modern Practice in Servo Design Pergamon Press,1970.

## Mathematical Model of Large Scale E-O Theodolite Driving Unit and Its Load

Deng Shiheng Han Rongjiu

### Abstract

The mathematical model of E-O Theodolite driving unit and load construction is deduced from the basical mechanics point of view, and the results proved to be well coincided with the experiment. The concepts of composite frequency and anti-resonance peak are also provided in this paper.