

# 典型形状飞行器反射光强的计算

崔敦杰 崔岩

**摘要:** 用光学系统探测和跟踪各种飞行器时, 对目标的可测性(作用距离), 系统的信噪比起至关重要作用的物理量是飞行器在探测方向上的光强或辐射强度。它除了与入射光的照度或辐照度、飞行器表面的反射率、飞行器形状有关以外, 还与入射光、观测方向和飞行器三者之间的几何关系有关。本文分别对平面、球面、圆柱面和圆锥面等典型形状计算了不同几何关系下的反射光强, 然后计算了火箭形状飞行器的反射光强。

**关键词:** 光度学; 反射。

## 一、引言

随着空间技术的发展, 人们研制了各种飞行器以满足国防和民用的需要。为了能够有效地探测、跟踪和控制这些飞行器, 各种工作方式的探测、跟踪系统应运而生。其中光学方法是最有效的方式之一。在光学方法中, 飞行器的光强是我们最关心的物理量。例如在传感器的作用距离估测、人造卫星和导弹的光强等级分类时, 都需要用到飞行器的光强, 在被动光学探测中也需要知道飞行器的光强。飞行器的光强是它们的主要特征之一。

物体的光强是由光线照射方向、观测方向和物体的几何形状决定的。不同几何形状的物体的光强是不同的。目前飞行器种类繁多, 形状各异, 为了能够有效地分析和计算它们的光强, 我们将飞行器的几何构形解剖为几种基本的面积分别分析, 而整个飞行器的光强则由这些基本面积的光强叠加而得。下文将分别对平面、球面、圆柱面和圆锥面物体进行光强计算, 然后, 由这几种基本面积复合计算出火箭的光强。为了简化计算, 首先假设:

- (1) 被照明物体的表面为理想漫反射体, 反射率为 $\rho$ , 并且不透光;
- (2) 照明光束是平行光, 在光束的垂直平面内照度均匀, 恒为 $E$ ;
- (3) 观测距离远大于物体的几何尺寸, 可以认为物体上各点对传感器所张的立体角相等。

上面的几条假设对一般应用情况是完全合理的。

## 二、几种典型被照明物体的光强计算

### 1. 平面物体<sup>[1]</sup>

如图1所示, 平面 $ABCD$ 的法线方向为 $\vec{n}$ , 光线照射方向为 $\vec{E}$ 、 $\vec{E}$ 、 $\vec{n}$ 之间的夹角为 $\theta_i$ 。坐标系的选取使 $z$ 轴与 $\vec{n}$ 重合,  $\vec{E}$ 在 $xoz$ 平面内。设观测方向为 $t$ , 它的极角和方位角分别为 $\theta_t$ 、 $\varphi_t$ 。则照射到平面 $ABCD$ 上的光通量为:

$$P = E \cdot s \cos\theta, \quad (1)$$

式中,  $s$  为平面  $ABCD$  的面积。平面  $ABCD$  的光出射度为:

$$M = \rho E \cos\theta, \quad (2)$$

其亮度为

$$B = \rho E \cos\theta / \pi \quad (3)$$

该平面在方向  $\vec{t}$  上的光强为:

$$\begin{aligned} I &= B s \cos\theta, \\ &= (\rho E s / \pi) \cos\theta \cdot \cos\theta, \quad (0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}) \end{aligned} \quad (4)$$

这一结果是众所周知的。

## 2. 球面物体

如图 2 所示, 选取球面物体的坐标系, 使得球心与原点重合, 入射光方向  $\vec{E}$  与  $x$  轴重合, 观测方向  $\vec{t}$  位于  $xy$  平面内, 方位角为  $\varphi$ 。则半径为  $R$  的球面上坐标为  $(r, \theta, \varphi)$  的

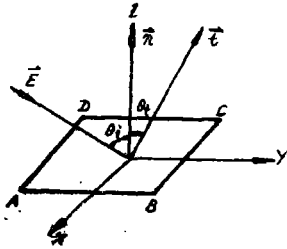


图 1 平面物体和所选坐标系

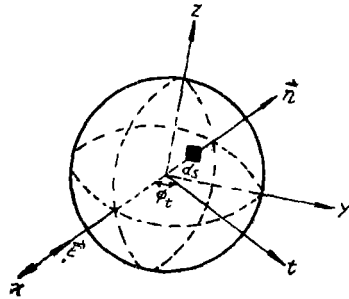


图 2 球面物体和所选坐标系

面元  $ds$  上的光通量为:

$$dP = \begin{cases} E \cdot ds \cos(\vec{n}, \vec{E}) & -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad (5)$$

式中  $ds = R^2 \sin\theta d\theta d\varphi$ ,  $\cos(\vec{n}, \vec{E}) = \sin\theta \cos\varphi$ 。  $ds$  上的光出射度为

$$M = \rho E \sin\theta \cos\varphi \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \quad (6)$$

$ds$  的亮度为:

$$B = \frac{\rho E}{\pi} \sin\theta \cos\varphi \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \quad (7)$$

面元  $ds$  对  $\vec{t}$  方向的光强贡献为:

$$dI = B \cdot ds \cdot \cos(\vec{t}, \vec{n}) \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \text{又,} \quad \cos(\vec{t}, \vec{n}) &= (\cos\varphi, \vec{i} + \sin\varphi, \vec{j}) \cdot (\sin\theta \cos\varphi \vec{i} + \\ &\quad \sin\theta \cdot \sin\varphi \vec{j} + \cos\theta \vec{k}) \\ &= \sin\theta \cos(\varphi - \varphi) \end{aligned}$$

所以有,

$$dI = -\frac{\rho E R^2}{\pi} \sin^3 \theta \cdot \cos \varphi \cdot \cos(\varphi - \varphi_i) d\theta d\varphi \quad (9)$$

$\vec{i}$  方向上的光强

$$\begin{aligned} I &= \iint dI \\ &= \frac{\rho E R^2}{\pi} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \int_{\varphi_i - \frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \cdot \cos(\varphi - \varphi_i) d\varphi \\ &= \frac{2\rho E R^2}{3\pi} [(\pi - \varphi_i) \cos \varphi_i + \sin \varphi_i] \end{aligned} \quad (10)$$

由 (10) 式可以看出, 球面被照明物体的光强  $I$  仅与光线入射方向和观测方向的夹角、球面半径有关, 光强  $I$  存在两个极值,

$$\begin{aligned} I_{max} &= \frac{2\rho E R^2}{3} \quad (\varphi_i = 0) \\ I_{min} &= 0 \quad (\varphi_i = \pi) \end{aligned} \quad (11)$$

图 3 示出了  $I$  随  $\varphi_i$  的变化曲线。



图 3 反射光强和  $\varphi_i$  角的关系

### 3. 圆柱面物体

如图 4 所示, 圆柱面的高为  $h$ , 底面半径为  $r$ 。在图 4 所示的坐标系下, 入射光矢量  $\vec{E}$ :  $(\sin \theta_i \vec{i} + \cos \theta_i \vec{k})$ , 观测方向矢量  $\vec{i}$ :  $(\sin \theta_i \cdot \cos \varphi_i \vec{i} + \sin \theta_i \cdot \sin \varphi_i \vec{j} + \cos \theta_i \vec{k})$ 。选取与  $z$  轴平行的一窄竖条作为面元  $ds$ ,  $ds = hr d\varphi$ , 它的法向矢量  $\vec{n}$ :  $(\cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j})$ , 则照射到  $ds$  上的光通量为

$$dP = \begin{cases} E \cdot ds \cos(\vec{E}, \vec{n}) = E ds \sin \theta_i \cos \varphi & \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi} \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad (12)$$

$ds$  的光出射度

$$M = \rho E \sin \theta_i \cos \varphi \quad (13)$$

$ds$  的亮度

$$B = \frac{\rho E}{\pi} \sin\theta_i \cos\varphi \quad (14)$$

$ds$ 面元对 $\vec{t}$ 方向的光强贡献为:

$$\begin{aligned} dI &= B \cdot ds \cos(\vec{t}, \vec{n}) \\ &= \frac{\rho E h r}{\pi} \sin\theta_i \sin\theta_i [\cos\varphi_i \cdot \cos^2\varphi + \sin\varphi_i \cdot \frac{\sin 2\varphi}{2}] d\varphi \end{aligned} \quad (15)$$

所以 $\vec{t}$ 方向上的光强为

$$\begin{aligned} I &= \int dI \\ &= \frac{\rho E h r}{2\pi} \sin\theta_i \sin\theta_i \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [\cos\varphi_i \cdot \cos^2\varphi + \sin\varphi_i \cdot \frac{\sin 2\varphi}{2}] d\varphi \\ &= \frac{\rho E h r}{2\pi} \sin\theta_i \cdot \sin\theta_i [(\pi - \varphi_i) \cos\varphi_i + \sin\varphi_i] \end{aligned} \quad (16)$$

由(16)式可以看出,柱面物体的光强 $I$ 随 $\varphi_i$ 的变化规律与球面相同,并且随 $\theta_i$ 、 $\theta_t$ 的正弦变化。

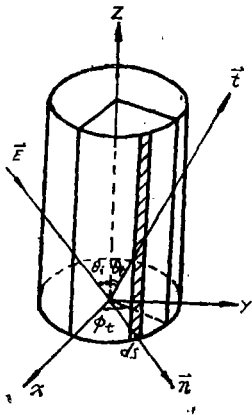


图4 圆柱面物体和所选坐标系

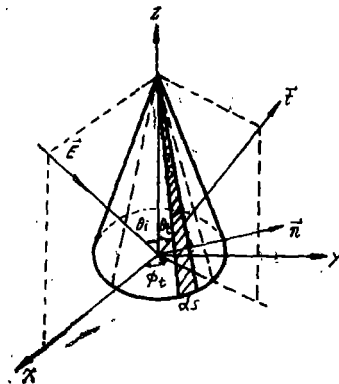


图5 圆锥面物体和所选坐标系

#### 4. 圆锥面物体

如图5所示,  $a$ 、 $b$ 分别为圆锥体的底面半径和高。在图中所选坐标系下,入射光方向矢量 $\vec{E}$ ,观测方向矢量 $\vec{t}$ 表示如下,  $\vec{E} : (\sin\theta_i \vec{i} + \cos\theta_i \vec{k})$ ,  $\vec{t} : (\sin\theta_t \cdot \cos\varphi_t \vec{i} + \sin\theta_t \cdot \sin\varphi_t \vec{j} + \cos\theta_t \vec{k})$ 。选取图中所示的一微小三角形作为面元 $ds$ ,其面积 $ds = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2} \cdot a d\varphi$ ,其法向矢量 $\vec{n} : (\sin\beta \cdot \cos\varphi \vec{i} + \sin\beta \cdot \sin\varphi \vec{j} + \cos\beta \vec{k})$ ,其中 $\sin\beta = b/\sqrt{a^2 + b^2}$ ,  $\cos\beta = a/\sqrt{a^2 + b^2}$ ,则照射到 $ds$ 上的光通量为:

$$dP = \begin{cases} E ds \cdot \cos(\vec{E}, \vec{n}) = E ds (\sin\theta_i \sin\beta \cos\varphi + \cos\theta_i \cdot \cos\beta) & \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad (17)$$

$ds$ 的光出射度为:

$$M = \rho E (\sin\theta_1 \cdot \sin\beta \cdot \cos\varphi + \cos\theta_1 \cdot \cos\beta) \quad (18)$$

$ds$ 的亮度为:

$$B = \frac{\rho E}{\pi} (\sin\theta_1 \cdot \sin\beta \cdot \cos\varphi + \cos\theta_1 \cdot \cos\beta) \quad (19)$$

$ds$ 面元对方向  $\vec{t}$  的光强贡献为:

$$\begin{aligned} dI &= B \cdot ds \cos(\vec{t}, \vec{n}) \\ &= \frac{\rho E a}{4\pi\sqrt{a^2+b^2}} \{b^2\sin\theta_1\sin\theta_1\cos(2\varphi - \varphi_1) + 2ab \sin\theta_1 \cdot \\ &\quad \cos\theta_1\cos(\varphi - \varphi_1) + 2ab \sin\theta_1\cos\theta_1\cos\varphi + b^2\sin\theta_1\sin\theta_1\cos\varphi_1 + \\ &\quad 2a^2\cos\theta_1\cos\theta_1\} d\varphi \end{aligned} \quad (20)$$

所以  $\vec{t}$  方向的光强为:

$$\begin{aligned} I &= \int dI \\ &= \frac{\rho E a}{4\pi\sqrt{a^2+b^2}} \{b^2\sin\theta_1\sin\theta_1[(\pi - \varphi_1)\cos\varphi_1 + \sin\varphi_1] + \\ &\quad 2a^2\cos\theta_1\cos\theta_1(\pi - \varphi_1) + 2ab \sin(\theta_1 + \theta_1)(\cos\varphi_1 + 1)\} \end{aligned} \quad (21)$$

光强  $I$  随  $\varphi_1$  的变化规律可由括号内的三项分别表述, 第一项随  $\varphi_1$  的变化与球面、柱面相同; 第二项为  $(\pi - \varphi_1)$ ; 第三项为  $(\cos\varphi_1 + 1)$ 。图 6 分别示出了它们随  $\varphi_1$  的变化曲线。当  $\varphi_1 = 0$  时,

$$I = \frac{\rho E a}{4\pi\sqrt{a^2+b^2}} [b^2\pi\sin\theta_1 \cdot \sin\theta_1 + 2a^2\pi\cos\theta_1 \cdot \cos\theta_1 + 4ab \sin(\theta_1 + \theta_1)]$$

当  $\varphi_1 = \pi$  时,  $I = 0$

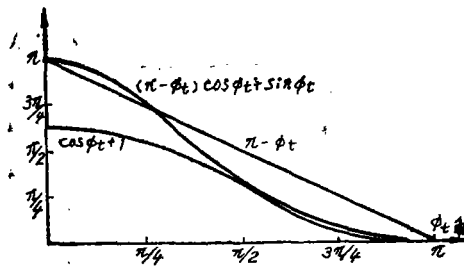


图 6  $(\pi - \varphi_1) \cdot \cos\varphi_1 + \sin\varphi_1$ ,  $(\pi - \varphi_1)$ ,  $\cos\varphi_1 + 1$  和  $\varphi_1$  角之间的关系

### 三、火箭的光强计算

我们首先设定火箭各部分的几何尺寸, 火箭的几何结构如图 7 所示, 图中同时示出了选取的坐标系。火箭的基本结构可分为两种: 圆锥面和圆柱面。设圆锥面的高为  $b$ , 底面半径

为 $r$ ，圆柱体的高为 $h$ 。光线入射方向 $\vec{E}:(\sin\theta_i \vec{i} + \cos\theta_i \vec{k})$ ，观测方向 $\vec{t}:(\sin\theta_t \cos\varphi_t \vec{i} + \sin\theta_t \sin\varphi_t \vec{j} + \cos\theta_t \vec{k})$ 。光强 $I$ 的表达式可分为下面两种情况

当  $0 \leq \theta_t < \frac{\pi}{2} + \arcsin(b/\sqrt{r^2 + b^2})$  时，

$$I = \frac{\rho E r}{4\pi\sqrt{r^2 + b^2}} \{b^2 \sin\theta_t \sin\theta_i [(\pi - \varphi_t) \cos\varphi_t + \sin\varphi_t] + 2r^2 \cos\theta_t \cos\theta_i (\pi - \varphi_t) + 2rb \sin(\theta_t + \theta_i) (\cos\varphi_t + 1)\} + \frac{\rho E h r}{2\pi} \sin\theta_t \sin\theta_i [(\pi - \varphi_t) \cos\varphi_t + \sin\varphi_t]$$

当  $\frac{\pi}{2} + \arcsin(b/\sqrt{r^2 + b^2}) \leq \theta_t \leq \pi$  时，

$$I = -\frac{\rho E h r}{2\pi} \sin\theta_t \sin\theta_i [(\pi - \varphi_t) \cos\varphi_t + \sin\varphi_t]$$

由上面的表达式可知：

- (1)  $I$  为光线入射方向、观测方向和火箭几何尺寸的函数；
- (2) 当  $\varphi_t = \pi$  时，光强  $I$  取最小值， $I_{\min} = 0$
- (3) 当  $\varphi_t = 0$  时，

$$I = \begin{cases} \frac{\rho E r}{4\pi\sqrt{r^2 + b^2}} \{b^2 \pi \sin\theta_t \sin\theta_i + 2\pi r^2 \cos\theta_t \cos\theta_i + 4rb \sin(\theta_t + \theta_i)\} + \frac{\rho E h r}{2} \sin\theta_t \sin\theta_i, & 0 \leq \theta_t < \frac{\pi}{2} + \arcsin(b/\sqrt{r^2 + b^2}) \\ \frac{\rho E h r}{2} \sin\theta_t \sin\theta_i, & \frac{\pi}{2} + \arcsin(b/\sqrt{r^2 + b^2}) \leq \theta_t \leq \pi \end{cases}$$

#### 四、结 论

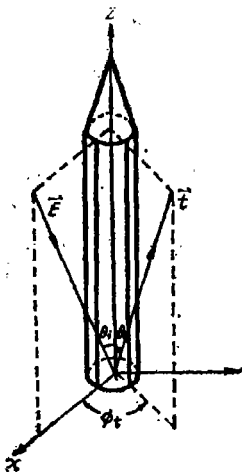


图7 火箭体与所选坐标系之间的关系

通过对平面、球面、圆柱面和圆锥面的反射光强推导，得到了它们反射光强的解析表达式。各种几何形状物体的光强除了与入射光的照度、物体表面反射率和几何形状有关之外，还与光线入射方向、观测方向和飞行器三者之间的几何关系有关。利用圆柱面和圆锥面物体的反射光强表达式，复合出火箭的反射光强表达式，它的变化规律已在上文中分析。对于其它类型和结构的飞行器的反射光强分析方法与此类同。

本文所进行的推导和计算是十分有意义的，它为飞行器的观测、识别、跟踪和光强分

类提供了理论依据，这些知识对于有关传感器的设计也是必需的。

参 考 文 献

- [1] Parry Moon and Domina Eberle Spencer, «The Photometric Field», The MIT Press Cambridge, Massachusetts London, England, 1981

**The Reflection Luminous Intensity Evaluation of Typical Flyer**

Cui Dunjie Cui Yan

**Abstract**

Luminous intensity or radiance intensity of flyers is very important physical parameter for the system signal to noise ratio when they are detected or tracked by an optical system. The reflection luminous intensity depends on the illuminance of incident light, the shape and the surface reflectance of flyer, the geometrical relation between the directions of sight and incident light. The calculations for reflection luminous intensities of plane, sphere, cylinder and circular cone are given in this paper. Then, the reflection luminous intensity of a rocket is calculated with above results.

Key words, Photometry, Reflection.